ad eos motus potest accommodari. Hocque tum maxime est faciendum, vt linea f inueniatur, quae se habeat ad corporis a centro distantiam, vt vis grauitatis ad vim centripetam. Altera vis, quae corpus ad planum datum trahit, quodammodo distantiae proportionalis effici potest; id tamen si non accidat, litera g vt variabilis debet considerari, ex quo vero proxime motus nodorum poterit colligi; inter omnes ipsius g valores quasi medium eligendo. In motu lunae nodorum motus maxime attendi meretur, quippe qui iuxta nostram determinationem fit in antecedentia. Obseruatur autem nodi ab oppositione praecedentis nodi distantia fere 43′; ita vt sit $\frac{180(m-1)}{m} = \frac{43}{60}$ atque $m = 1 + \frac{43}{10757} = 1\frac{1}{250}$. Ex quo vis lunam ad planum eclipticae perpetuo trahens a posteriore potest cognosci.

CA-

CAP. SE[...]CTI &c.
Hocque tum / inueniatur, / distantiam, / Altera vis, / it, quodam- / potest; id / variabilis de- / e motus no- / ipsius g va- / tu lunae no- / ur, quippe / it in antece- / oppositione / ′, ita vt sit / $\frac{1}{57} = 1\frac{1}{250}$. / ticae perpe- / iosci.
MOTU
P
Si cor / que / tiae / turbat, / tam min
Ex / potentia / gentialem / eodem / uetur p / signari p / licitantiu / normale / pus exe / cum dir / resistenti
CA-

CAPUT SEXTUM

DE MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 104.

Theorema.

860.

Si corpus moueatur in medio resistente a quotcunque potentiis absolutis sollicitatum: vis resistentiae actionem potentiarum absolutarum aliter non turbat, nisi quod vim tangentialem ex illis ortam minuat.

Demonstratio.

Ex capite praecedente satis intelligitur omnes potentias absolutas resolui posse in duas vires tangentialem et normalem, si quidem motus fit in eodem plano. At si corpus non in eodem mouetur plano, tum tres vires aequiualentes assignari possunt loco quotcunque potentiarum sollicitantium, quarum vna est tangentialis et duae normales. Vis autem, quam resistentia in corpus exerit, directio semper congruere ponitur cum directione corporis (117). Quamobrem vis resistentiae ad vim tangentialem est referenda, quam

 im-

imminuit, quia motum corporis retardat; vires vero normales prorſus non afficit. Manifeſtum igitur eſt reſiſtentiam potentiarum abſolutarum effectum aliter non turbare, niſi quatenus vis tangentialis ex iis orta a reſiſtentia minuitur. Q. E. D.

Corollarium I.

861. Reſiſtentiae igitur effectus totus in alteranda corporis celeritate conſiſtit, neque eius directionem immutat, niſi quatenus virium normalium actio variatur variata celeritate.

Corollarium 2.

862. Niſi igitur praeter reſiſtentiam adſint potentiae abſolutae, fieri non poteſt, vt corpus in linea curua moueatur, ſed perpetuo in recta moueri perget, quoad motum ſuum perdiderit.

Scholion I.

863. In hoc igitur capite, quo motus curuilineos tractabimus, neceſſe eſt, vt cum reſiſtentia ſimul potentias abſolutas conſideremus; easque tales, quae reſolutione praebeant vim normalem, ne in eandem rem capite 4. pertractatam incidamus. Hanc ob rem primo potentiam ad punctum infinite diſtans tendentem, ſeu directionem ſibi perpetuo parallelam conſeruantem conſiderabimus. Deinde ad vires centripetas progrediemur, aliasque quouis modo diſpoſitas potentias. Denique etiam motus non

LIBER(...CTI CURVIL.
non in eo(... retardat; vires
dio reſiſter ... Manifeſtum igi-
... ſolutarum effe-
... us vis tangenti-
Q. E. D.
864. ... ſtus totus in al-
duae norm ... neque eius di-
tiae R; c ... irium normali-
nentes, qu
hic locum
tur T – R.
... ſtentiam adſint
... eſt, vt corpus
865. ... petuo in recta
vis a celeri ... perdiderit.
oporteat p
cap. 4. fuſe
reſiſtentiae ... io motus curui-
rum aperiet ... cum reſiſtentia
inueniebant ... us; easque ta-
diuidemus, ... normalem, ne
reſiſtentia ... tam incidamus.
in ea deter ... unctum infinite
abſoluta fue ... ſibi perpetuo
mus. Tert ... imus. Deinde
abſoluta dat ... aliasque quouis
da. Deniq ... e etiam motus
ris in ſingu ... non
abſoluta eiu

non in eodem plano factos, quales oriantur in medio reſiſtente, examini ſubiiciemus.

Corollarium 3.

864. Si vis tangentialis ſit T, et vna ſeu duae normales N ſeu N et M, et vis reſiſtentiae R; canones effectum harum virium continentes, quos in praecedente capite dedimus, etiam hic locum habebunt, ſi modo in iis loco T ponatur T – R.

Scholion 2.

865. Quemadmodum reſiſtentiam, cuius vis a celeritate corporis pendere ponitur, exponi oporteat per legem reſiſtentiae et exponentem in cap. 4. fuſe eſt oſtenſum. Hoc vero capite varietas reſiſtentiae magnum campum rerum pertractandarum aperiet, quae in capite praecedente locum non inueniebant. Praeterea hanc tractationem ita ſubdiuidemus, vt primo ex datis potentiis abſolutis et reſiſtentia curuam deſcriptam et motum corporis in ea determinemus. Deinde ſi curua et potentia abſoluta fuerit data, ex his reſiſtentiam deducemus. Tertio ex data curua et reſiſtentia potentia abſoluta datam habens directionem erit inueſtiganda. Denique ex data curua, et celeritate corporis in ſingulis eius punctis et reſiſtentia, potentia abſoluta eiusque directio poterit inueniri. Primariam autem

autem huius capitis diuisionem motus in eodem plano et non in eodem plano factus constituet.

PROPOSITIO 105.
Problema.

866. *Si corpus moueatur in medio resistente quocunque sollicitatum a potentiis absolutis quibuscunque ita tamen vt motum suum in eodem plano absoluat; definire canones, quos in motu suo corpus obseruat.* Tabula XI. Fig. 3.

Solutio.

Describat corpus hac ratione sollicitatum curuam AMB; sit eius celeritas in M debita altitudini v, et curuae elementum $Mm = ds$. Ponatur porro vis normalis ex omnibus potentiis absolutis orta $= N$, cuius ergo directio erit MN normalis in curuam; vis vero tangentialis ex iisdem potentiis absolutis orta $= T$, cuius directio est MT tangens curuae in M. Atque vis resistentiae in M sit $= R$. His positis motus corporis definiri debet ex vi normali N et vi tangentiali T–R (864). Sit iam radius osculi in $M = r$, eritque $N = \frac{2v}{r}$ (552) et $dv = (T-R)\,ds$; (cit.). Ex his duabus aequationibus, si eliminetur v, prodibit aequatio naturam curuae AMB exponens, simulque corporis in singulis locis celeritas ex aequatione $N = \frac{2v}{r}$ innotescit. Q. E. I.

Co-

LIB CTI CURV.
in eodem plano
stituet.
86 $dv = \frac{Nd}{}$ –R)ds co v; descript
)5.
o resistente quo-
s quibuscunque
no absoluat; de-
obseruat.
86 nem, i celeritat poterit que aeq rem aeq
llicitatum curlebita altitudi- Ponatur porro luris orta $= N$, lis in curuam; ntiis absolutis gens curuae in R. His posi- vi normali N iam radius os-) et $dv = (T-$ uationibus, si turam curuae is in singulis $\frac{2v}{r}$ innotescit.
86 bet dim aequatio euoluer elimina uimus, tinet, examin
87 ter ad
Co-

Corollarium 1.

867. Erit igitur $v = \frac{Nr}{2}$. Vnde habebitur $dv = \frac{Ndr + rdN}{2}$. Qui valor si in aequatione $dv = (T-R)\,ds$ substituatur loco dv, et in R ponatur $\frac{Nr}{2}$ loco v; prodibit aequatio pro curua a corpore descripta.

Corollarium 2.

868. Si in R, v vnicam habuerit dimensionem, id quod accidit, si resistentia est quadratis celeritatum proportionalis; aequatio $dv = (T-R)\,ds$, poterit separari, ex eaque v determinari. Haecque aequatio cum $v = \frac{Nr}{2}$ coniuncta dabit simpliciorem aequationem pro curua descripta.

Scholion.

869. Praeter hunc casum, quo v vnicam habet dimensionem in R, plurimi dantur alii, quibus aequatio $dv = (T-R)\,ds$ potest integrari; sed eos euoluere non est opus, cum nihilominus v possit eliminari. Hunc vero casum ideo praecipue notauimus, quia reuera ad fluidorum resistentiam pertinet, et quem propterea prae aliis diligentius examinabimus.

PROPOSITIO 106.
Problema.

870. *Tendat vis sollicitans vbique normaliter ad rectam positione datam AP; et moueatur cor-* Tabula XI. Fig. 4.

pus

pus in medio quocunque resistente; determinare curuam AMB *in qua corpus mouebitur, et ipsum corporis motum.*

Solutio.

Sit vis quae corpus in M sollicitat $=P$, cuius ergo directio erit MP. Celeritas corporis in M debeatur alt. v, et vis resistentiae ibi sit $=R$. Capiatur elementum Mm, ductaque mp sit $AP=x$, $PM=y$ et $Mm=ds$. Erit $Pp=Mr=dx$ et $mr=dy$. Porro ducatur tangens MT in eamque ex P perpendicularis PT. His factis vis P resoluetur in normalem $\frac{P.PT}{PM}=\frac{Pdx}{ds}$ et tangentialem $\frac{P.MT}{MP}=\frac{Pdy}{ds}$. Quia autem haec vis tangentialis motum corporis retardat eius negatiuum est capiendum. Posito igitur radio osculi in $M=r$, erit $\frac{Pdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ et $dv=-Pdy-Rds$ (866). Ex quibus aequationibus tum ipsa curua tum motus corporis poterit inueniri. Q. E. I.

Corollarium 1.

871. Posito dx constante est radius osculi $r=-\frac{ds^3}{dxddy}$. Hanc ob rem habebitur sequens aequatio $P=-\frac{2vddy}{ds^2}$. Qui valor ipsius P in altera aequatione substitutus dabit aequationem $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-Rds$, seu ob $dyddy=dsdds$ haec $dv=\frac{2vdds}{ds}-Rds$. Quae aequatio locum habet, quaecunque fuerit potentia P, modo eius directio sit MP.

Co-

LIBE… CTI CURVIL.
…leterminare cur-
…, et ipsum cor-
87…
que mul…
tiae sit…
…citat $=P$, cuius
…corporis in M
…i sit $=R$. Ca-
…mp sit $AP=x$,
…dx et $mr=dy$.
…ic ex P perpen-
…etur in norma-
…$=\frac{Pdy}{ds}$. Quia
…corporis retar-
Posito igitur
…$dv=-Pdy-Rds$
…tum ipsa curua
Q. E. I.
87…
seu…
formis…
Tempu…
erit =…
radius osculi
…sequens aequa-
…altera aequa-
…$dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-$
…$=\frac{2vdds}{ds}-Rds$.
…ique fuerit po-
8…
forme,…
tam A…
ritatu…
Co-

Corollarium 2.

872. Si resistentiae lex fuerit ratio quaecunque multiplicata celeritatum et exponens resistentiae sit quantitas vtcunque variabilis q ita vt sit $R=\frac{v^m}{q^m}$, tum habebitur ista aequatio $dv=\frac{2vdds}{ds}-\frac{v^m ds}{q^m}$, cuius integralis est $v^{1-m}=\frac{(m-1)dx^{2m-2}}{ds^{2m-2}}\int\frac{ds^{2m-1}}{q^m dx^{2m-2}}$.

Corollarium 3.

873. Si in eadem hypothesi fuerit $m=1$, erit $\frac{dv}{v}=\frac{2dds}{ds}-\frac{ds}{q}$, cuius integralis est $lv=2l\frac{ds}{dx}-\int\frac{ds}{q}$, seu $e^{\int\frac{ds}{q}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$. Si praeterea resistentia fuerit vniformis seu $q=c$, erit $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ seu $v=\frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}$. Tempus igitur hoc casu quo arcus AM absoluitur erit $=\int\frac{e^{\frac{s}{2c}}dx}{\sqrt{a}}$.

PROPOSITIO 107.

Problema.

874. *Si et potentia et medium resistens sit vniformе, illiusque directio sit* MP *normalis in rectam datam* AP; *medium vero resistat in ratione duplicata celeritatum, determinare motum corporis proiecti.* Tabula XII. Fig. 4.

Solu-

Solutio.

Ponatur potentia corpus perpetuo verſus AP trahens $=g$ et exponens reſiſtentiae $=c$, reliquae denominationes vero maneant vt ante. Erit igitur $P=g$ et $R=\frac{v}{c}$. Vnde orientur ſequentes aequationes $\frac{gdx}{ds}=\frac{2v}{r}$ ſeu $gds^2+2vddy=0$ poſito dx conſtante; atque $dv=-gdy-\frac{vds}{c}$. Ex his vero aequationibus coniunctis iam inuenimus $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ (873). Quare cum ſit $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$ prodit eliminata v iſta aequatio $ge^{\frac{s}{c}}dx^2=-addy$, qua natura curuae deſcriptae continetur. Cum ſit $dsdds=dyddy$ erit etiam $ge^{\frac{s}{c}}dx^2dy=-2adsdds$. Ponatur $dx=pds$, erit $dds=-\frac{dpds}{p}$ et $dy=ds\sqrt{(1-pp)}$. His ſubſtitutis proueniet iſta aequatio $ge^{\frac{s}{c}}ds=\frac{2adp}{p^3\sqrt{(1-pp)}}$, quae ad conſtruendam curuam deſcriptam ſufficit. Aequationis vero huius integralis aequatio eſt $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{a\sqrt{(1-pp)}}{p^2}-a.l\frac{1+\sqrt{(1-p^2)}}{p}$. Reſtituto vero $\frac{dx}{ds}$ loco p habetur $gce^{\frac{s}{c}}=C-\frac{adyds}{dx^2}-a\,l\frac{ds+dy}{dx}$. Quae eſt aequatio differentialis primi gradus atque ſimplicior reddi non poteſt. Q. E. I.

Corollarium 1.

875. Pro curua deſcripta aequatio ſtatim differentialis tertii gradus prodit: Nam ob $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, erit

LI … UNCTI CURVIL.
erit a … rpetuo verſus AP
tione … entiae $=c$, reli-
$y=c$ … ant vt ante. Erit
… rientur ſequentes
… $2ddy=0$ poſito dx
axe A … Ex his vero
$=v$ e … nimus $e^{\frac{s}{c}}$ $v=\frac{ads^2}{dx^2}$
ergo … prodit eliminata
tur e … na natura curuae
a co … $dsdds=dyddy$ erit
… natur $dx=pds$,
… His ſubſtitutis
facto … quae ad
tur c … ſufficit. Aequa-
curua … io eſt $gce^{\frac{s}{c}}=$
… uto vero $\frac{dx}{ds}$ loco p
nueni … Quae eſt aequatio ſimplicior reddi
ibi dx … quatio ſtatim dif-
$\mu+\nu^2$ … m ob $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, erit

erit $dv=-gdy+\frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$, quibus valoribus in aequatione $dv=-gdy-\frac{vds}{c}$ ſubſtitutis prodibit $dsdd\,y=c\,d^3y$.

Corollarium 2.

876. Sit ſinus anguli, quem curua in A cum axe AP conſtituit $=\mu$, eiusque coſinus $=\sqrt{(1-\mu^2)}$ $=\nu$ et altitudo celeritati in A debita $=b$. Facto ergo $s=0$ et $ds:dx=1:\nu$, fieri debet $v=b$, habebitur ergo ex $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{ads^2}{dx^2}$ haec $\nu^2b=a$, vnde conſtans a cognoſcitur.

Corollarium 3.

877. Porro in aequatione curuae vltima facto $s=0$ et $ds:dx=1:\nu$ et $ds:dy=1:\mu$, inuenietur conſtans $C=gc+\mu b+\nu^2bl\frac{1+\mu}{\nu}$. Quare pro curua deſcripta haec orietur aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}}-1)$ $=\frac{\mu dx^2-\nu^2dyds}{dx^2}+\nu^2l\frac{(1+\mu)dx}{\nu(dy+ds)}$. Ad celeritatem vero nueniendam inſeruit aequatio $e^{\frac{s}{c}}v=\frac{\nu^2bds^2}{dx^2}$.

Corollarium 4.

878. Si fuerit D punctum ſupremum, erit ibi $dx=ds$ et $dy=0$. Habebitur ergo $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}}-1)=\mu+\nu^2l\frac{1+\mu}{\nu}$ ſeu $e^{\frac{s}{c}}=\frac{b\mu+gc+\nu^2bl\frac{1+\mu}{\nu}}{gc}$. Ex qua aequa-

aequatione reperitur arcus $AMD = cl\dfrac{b\mu + gc + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{\nu}}{gc}$. Altitudo vero debita celeritati quam corpus habebit in D erit $= \dfrac{\nu^2 gbc}{gc + b\mu + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{\nu}}$.

Corollarium 5.

879. Si in B curua eandem habere ponatur inclinationem ad axem AP quam habuit in A, erit $ds:dx:dy = 1:\nu:-\mu$. Hinc ergo emerget ista aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = 2\mu + \nu^2 l\frac{1+\mu}{1-\mu}$ ex qua prodit arcus $ADB = cl\dfrac{2\mu b + gc + \nu^2 bl\frac{1+\mu}{1-\mu}}{gc}$.

Corollarium 6.

880. Constructio curuae etiam facilis deduci potest ex aequatione $dsddy = cd^3y$. Namque ponatur $dy = pdx$, erit $dpdx\surd(1+pp) = cddp$. Porro fiat $dx = \frac{dp}{q}$, erit ob $ddx = o$; $ddp = \frac{dpdq}{q}$, vnde prodibit ista aequatio $dp\surd(1+pp) = cdq$, atque $q = \frac{1}{c}\int dp\surd(1+pp)$. Sumta igitur abscissa $x = \int\frac{cdp}{\int dq\surd(1+pp)}$ erit $y = \int\frac{cpdp}{\int dp\surd(1+pp)}$. Hisque respondebit $v = -\frac{cs(1+pp)}{2\int dp\surd(1+pp)}$. Vnde cognoscitur pro p accipiendam esse quantitatem negatiuam.

Corollarium 7.

Tabula XI. Fig. 5. 881. Si corpus in A proiiciatur secundum directionem ipsius AP, et potentia tendat deorsum, tota

LIB[...]NCTI CURVIL. A M D = c l tota cur[...] vero debita celefietque y[...] D erit $\nu = 1$, h[...] $1) = \frac{dyds}{dx^2}$ 5. 88[...] m habere ponatur puncto l[...] habuit in A, erit ter ds, [...] go emerget ista ne longi[...] ex qua prodit ar- 6. [...]iam facilis deduci Namque pona- p)=cddp. Porro $=\frac{dpdq}{q}$, vnde pro- cdq, atque $q = \frac{1}{c}\int$ [...]a $x = \int\frac{cdp}{\int dq\surd(1+pp)}$ [...]espondebit v = - [...]ro p accipiendam 7. [...]iatur secundum di- [...] tendat deorsum, tota

tota curua AM a corpore descripta cadet infra AP, fietque y seu PM negatiua; atque cum sit $\mu = o$ et $\nu = 1$, habebitur pro curua AM ista aequatio $\frac{gc}{b}(e^{\frac{s}{c}} - 1) = \frac{dyds}{dx^2} - l\frac{dx}{ds+dy}$ (877).

Corollarium 8.

882. Data igitur tangentis in quocunque puncto M inclinatione ad rectam AP seu ratione inter ds, dy et dx, inueniri potest ex hac aequatione longitudo arcus AM.

Scholion.

[illegible] Experimenta docuere aerem corporibu[illegible] e in duplicata celeritatum ratione. Cum i[illegible] grauitatis sit vniformis et aer in non nimis alt[illegible]ntantiis eandem fere densitatem seruet, casus corporum in aere proiectorum apprime ad hanc propositionem refertur. Determinauimus igitur veram curuam, quam globi ex sclopetis vel tormentis vel alio modo proiecti describunt. Sumitur vulgo pro hac curua parabola, quippe quae in vacuo est proiectoria, et aer tam subtile fluidum esse creditur, vt eius resistentia in computum duci non mereatur. Insensibilis quidem vtique est resistentia aeris, si corpus magnum parua celeritate proiiciatur. Sed longissime a parabola aberrabit proiectoria, si exiguum corpus magna vi proiiciatur. His autem in casibus, tametsi hic vera assignata est proiectoria, maxime dolendum est, aequationem tam esse

esse intricatum, vt vix quicquam ad vsum practicum ex ea possit deduci. *Neutonus* in Phil. hoc problema non attigit, neque post eum quisquam tentauit, donec *Keilius* ad hoc problema *Ioh. Bernoulli* prouocauerit, etsi ipse solutionem exhibere non potuerit. Dedit autem solutionem non solum *Ioh. Bernoullius* in Act. Lips. 1719 m. Mai, sed eodem fere tempore *Iac. Hermannus* Phoronomiae suae inseruit. Sequens autem problema, in quo resistentia ipsis celeritatibus proportionalis ponitur, tum a *Neutono* in Princ. tum a *Hugenio* in tract. de causa grauitatis, est solutum.

PROPOSITIO 108.

Problema.

Tabula XI. Fig. 4.

884. *Si medii resistentia fuerit vt ipsa corporis celeritas et potentiae directio MP; praetereaque tam potentia sit vniformis quam medium resistens: determinare curuam, quam corpus proiectum describit, atque celeritatem in singulis locis.*

Solutio.

Positis vt in praecedente Prop. potentia vniformi $=g$, exponente medii resistentis $=c$, altitudine celeritati in M debita $=v$; $AP=x$, $PM=y$ et arcu $AM=s$; erit ex vi normali vt ante $gds^2+2vddy=0$, sumto dx pro constante. Ex vi tangentiali vero ob resistentiam hoc casu $=\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ habebitur ista aequatio $dv=-gdy-\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$. Ex his aequationibus con-

LIB. ... TI CURVIL.
coniunc... vsum practi-
tur $\sqrt{v}$= ... in Phil. hoc
... eum quisquam
... lema Ioh. Ber-
ista aeq... nem exhibere
... em non solum
que ite... m. Mai, sed
simul ... Phoronomiae
Q. E. ... lema, in quo
... nalis ponitur,
... tio in tract. de
8
aequati...
aequati... vt ipsa corporis
gdy+... etereaque tam
fuissent ... ens: determi-
ddy V- ... scribit, atque
8
altitud...
in A ... potentia vni-
μ^2)= ... tis $=c$, alti-
ex quo ... $=x$, PM$=y$
... ante gds^2+2
... x vi tangen-
8 ... habebitur
punct... aequationibus
con-

coniunctis per §. 872 vbi fit $q=c$ et $m=\frac{1}{2}$ obtinetur $\sqrt{v}=-\frac{ds}{2ax}\int\frac{dx}{\sqrt{c}}-\frac{ds\sqrt{a}}{2dx}-\frac{xis}{2dx\sqrt{c}}=\frac{ds(\sqrt{ac}-x)}{2dx\sqrt{c}}$, eritque ergo $v=\frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Vnde pro curua descripta prouenit ista aequatio $2gcdx^2=-ddy(\sqrt{ac}-x)^2$ seu $-\frac{ddy}{dx}=\frac{2gcdx}{(\sqrt{ac}-x)^2}$ cuius integralis est $\frac{dy}{dx}=-\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x}+k$. Atque iterum integrando $y=kx-2gcl\frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}-x}$. Vnde simul constabit v, ex aequatione $v=\frac{ds^2(\sqrt{ac}-x)^2}{4cdx^2}$. Q. E. I.

Corollarium I.

885. Pro curua descripta statim haec aequatio differentialis tertii gradus prodiisset, si ex aequatione $v=-\frac{gds^2}{2ddy}$, eiusque differentiali $dv=-gdy+\frac{gds^2d^3y}{2ddy^2}$ valores in aequatione $dv=-gdy-\frac{ds\sqrt{v}}{\sqrt{c}}$ fuissent substituti. Prouenisset enim $d^3y\sqrt{gc}=-ddy\sqrt{-2ddy}$.

Corollarium 2.

886. Si corpus in A proiiciatur celeritate altitudini b debita, et sinus anguli, quem tangens in A cum AP constituit sit $=\mu$ eius cosinus $\sqrt{(1-\mu^2)}=\nu$, erit in puncto A, $b=\frac{a}{4\nu^2}$ seu $a=4\nu^2b$, ex quo constans indefinita a determinatur.

Corollarium 3.

887. Aequatio porro $\frac{dy}{dx}=-\frac{2gc}{\sqrt{ac}-x}+k$ ad punctum A translata dabit $\frac{\mu}{\nu}=-\frac{2g\sqrt{c}}{\sqrt{a}}+k$ =-

$= -\frac{g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} + k$ ob $a = 4\nu^2 b$. Hinc inuenietur indefinita quantitas $k = \frac{\mu\sqrt{b}+g\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}}$.

Corollarium 4.

888. Pro curua igitur descripta inuenietur ista aequatio differentialis $dy = \frac{2\mu\nu b\,dx\sqrt{c} - \mu x\,dx\sqrt{b} - gx\,dx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}} = \frac{\mu dx}{\nu} - \frac{gx\,dx\sqrt{c}}{2\nu^2 b\sqrt{c} - \nu x\sqrt{b}}$. Ex qua deducitur $\frac{ds^2}{dx^2} = \frac{(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu g x(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2 c x^2}{\nu^2(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2}$. Quare cum sit $v = \frac{ds^2(2\nu\sqrt{bc} - x)^2}{4c\,dx^2}$. Reperietur tandem $v = \frac{(2\nu b\sqrt{c} - x\sqrt{b})^2 - 2\mu g x(2\nu bc - x\sqrt{bc}) + g^2 c x^2}{4\nu^2 bc}$.

Corollarium 5.

889. Aequatio autem integralis pro curua quaesita erit $y = \frac{\mu x\sqrt{b} + gx\sqrt{c}}{\nu\sqrt{b}} - 2gc\,l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$. Ex qua constructio curuae per logarithmicam facile perficitur.

Corollarium 6.

890. Tempus etiam, quo arcus AM absoluitur facile definitur. Nam cum sit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$ erit tempus per arcum $AM = 2\sqrt{c}\,l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc} - x}$.

Corollarium 7.

891. Apparet etiam ex aequatione pro curua AM eam habere assymtoton: Nam cum x non possit esse maior quam $2\nu\sqrt{bc}$; si capiatur $AE = 2\nu\sqrt{bc}$ erit applicata in $E = -\infty$ ideoque assymtotos curuae AMDB. Intelligitur hoc etiam ex tempore

LIBI … TI CURVIL.
re quo… nietur indefini-
diculare…
ipta inuenietur
$dy = o$. … citur $\frac{ds^2}{dx^2} =$
Deinde … uare cum sit
erit alt… adem $v =$
et ipsa
alis pro curua
D ab a… $l\frac{2\nu\sqrt{bc}}{2\nu\sqrt{bc}-x}$. Ex
quo co… ithmicam faci-
cus AM absol-
ex A … $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{2dx\sqrt{c}}{2\nu\sqrt{bc}-x}$ erit
nem p…
ta eni…
direct… ttione pro cur-
gens i… lam cum x non
in D. … piatur AE = 2ν
nem … ne assymtotos
consi… iam ex tempo-
nem … re

re quod fit infinitum antequam corpus ad perpendicularem per E ductam peruenit.

Corollarium 8.

892. Punctum summum D reperietur si fiat $dy = o$. Tum autem inuenitur $x = \frac{2\mu\nu b\sqrt{c}}{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}} = AC$. Deinde cum sit in D $ds = dx$ et $2\nu\sqrt{bc} - x = \frac{2\nu gc\sqrt{b}}{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}$ erit altitudo debita celeritati in puncto $D = \frac{\nu^2 g^2 bc}{(\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c})^2}$ et ipsa celeritas in $D = \frac{\nu g\sqrt{bc}}{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

893. Applicata vero CD seu distantia puncti D ab axe AP erit $= 2\mu\sqrt{bc} - 2gc\,l\frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{g\sqrt{c}}$ et tempus quo corpus ex A in D peruenit erit $= 2\sqrt{c}\,l\frac{\mu\sqrt{b} + g\sqrt{c}}{g\sqrt{c}}$.

Scholion.

894. Reduci igitur potest casus, quo corpus ex A oblique proiicitur ad casum, quo ad directionem potentiae normaliter ex D proiicitur. Cognita enim celeritate, qua corpus in A proiicitur, et directione inueniri poterit punctum D in quo tangens ipsi AC est parallela, et celeritas corporis in D. Quare ad meliorem huius motus cognitionem expedit motum tanquam in D incipientem considerari, quem in finem sequentem propositionem adiecimus.

PRO-

PROPOSITIO 109.
Problema.

Tabula XI. Fig. 5.

895. *Si corpus vbique aequaliter deorsum attrabatur, atque in A secundum directionem borizontalem AP data velocitate proiiciatur in medio vniformi, quod in simplici celeritatum ratione resistat: determinare curuam AM, quam corpus describet et motum corporis in hac curua.*

Solutio.

Cum propositio haec sit casus specialis praecedentis, maneant omnes denominationes, vt ante. Fiet autem y seu applicata PM negatiua, quia curua AM infra AP cadet, atque erit $\mu = 0$ et $\nu = 1$. Existente ergo g potentia sollicitante, c exponente resistentiae, b altitudine celeritati in A debita, v altitudine coleritati in M debita, et $AP = x$ et $AM = s$; habebitur aequatio pro curua AM haec differentialis $dy = \frac{gxdx\sqrt{c}}{2b\sqrt{c}-x\sqrt{b}}$ (888), atque haec integralis $y = \frac{gx\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 2gcl\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-x}$ (889). Porro erit $v = \frac{(2b\sqrt{c}-x\sqrt{b})^2+g^2cx^2}{4bc}$ (888). Atque tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\,l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-x}$ (890). Quae aequationes tam curuam AM quam motum in hac curua determinant. Q. E. I.

Corollarium 1.

896. Si $l\frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}-x}$ in seriem conuertatur prodibit $\frac{x}{2\sqrt{bc}} + \frac{x^2}{2.4bc} + \frac{x^3}{3.8bc\sqrt{bc}} + \frac{x^4}{4.16b^2c^2} +$ etc. Quamobrem

LIBE CTI CURVIL
obrem er 09.
pus, quo $\frac{x^3}{12bc\sqrt{b}} +$ liter deorsum attractionem borizonur in medio vniratione resistat: us describet et mo-
897 magnum in parab quo arcu $\frac{g^2x^2}{4b} = b +$ gere lice specialis praecetiones, vt ante. atiua, quia cur- $\mu = 0$ et $\nu = 1$.
898 curuae A mittatur $-x$, et $+\frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}} +$ ritur $= 2$ ite, c exponente i in A debita, v AP$=x$ et AM AM haec diffetque haec inte-). Porro erit tempus quo ar- (890). Quae n motum in hac
899 asymtoto corpus e posset pe teret. aequale conuertatur pro- + etc. Quamobrem

obrem erit $y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12b\sqrt{bc}} + \frac{gx^4}{32b^2c} +$ etc. et tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{x^2}{4b\sqrt{c}} + \frac{x^3}{12bc\sqrt{b}} + \frac{x^4}{32b^2c\sqrt{c}} +$ etc.

Corollarium 2.

897. In vacuo igitur quando c fit infinite magnum erit $y = \frac{gx^2}{4b}$; quo igitur casu curua AM abit in parabolam, cuius parameter est $\frac{4b}{g}$, et tempus quo arcus AM absoluitur est $= \frac{x}{\sqrt{b}}$, atque $v = b + \frac{g^2x^2}{4b} = b + gy$, quemadmodum ex Prop. 72. colligere licet.

Corollarium 3.

898. Sumta $AE = 2\sqrt{bc}$ erit verticalis EF curuae AM assymtotos. Quare si ex M in EF demittatur perpendiculum MQ, erit $MQ = PE = 2\sqrt{bc} - x$, et $EQ = y$. Ponatur $MQ = z$, erit $y = -2cg + \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + 2gcl\frac{2\sqrt{bc}}{z}$, et tempus quo arcus AM percurritur $= 2\sqrt{c}\,l\frac{2\sqrt{bc}}{z}$.

Corollarium 4.

899. Punctum igitur E per quod transit asymtotos EF tantum distat a puncto A, quousque corpus ex A si nulla adesset potentia sollicitans g, posset pertingere, antequam motum omnem amitteret. Atque simili modo patet tempus per AM aequale esse tempori per AP potentia g euanescente.

te. Intelligitur hoc ex eo, quod g in his expressionibus non inest.

Corollarium 5.

900. Ducatur ex M tangens MT, erit $QT = -\frac{zdy}{z} = 2gc - \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$. Per M ducatur MR constituens cum EF angulum, cuius tangens est $= \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$. Quo facto erit $QR = \frac{gz\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$; ideoque $RT = 2gc$.

Corollarium 6.

901. Si igitur MT consideretur vt applicata curuae AM ad axem EF obliquangula; erit curua AM ob subtangentem RT constantem logarithmica obliquangula subtangentis $= 2gc$, et tangens anguli inclinationis applicatarum MR ad asymtoton $EF = \frac{\sqrt{b}}{g\sqrt{c}}$.

Scholion.

902. Proiectoriam in hac resistentiae et vis sollicitantis hypothesi non solum ope logarithmicae construi posse, sed ipsam esse logarithmicam obliquangulam obseruauit *Ioh. Bernoulli* in Actis Lips. 1719. Cuius solutio cum hac nostra egregie conuenit.

PROPOSITIO 110.

Problema.

Tabula XI. Fig. 4. 903. *Posita potentiae absolutae vniformis directione MP verticali et medio, quod etiam vniforme*

LIBERO IN MEDIO RESISTENTE. … PUNCTI CURVIL.
me ponitur, re… leritatum ratione… corpus proiectum… in his expressi-
…T, erit QT = …R constituens … Quo fa-
Manente … tate in $M = \sqrt{v}$ … resistentis $= c$, … cata celeritatum … Quare habebunt … et $dv = -g\,dy -$ … motus corporis … autem $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$ … $\frac{g^m ds^{2m}}{2^m(-ddy)^m}$. … istam aequation… curuae natura. … $= pdx$, eritque … $\sqrt{(1+p^2)}$. Qu… $dp)^{m-2} ddp = -g^m$ … ro $dx = \frac{dp}{q}$, erit … $2(-2)^{m-2} c^m q^{m-1}$ …
r vt applicata …; erit curua logarithmica … tangens an… ad asymtoton
…stentiae et vis …e logarithmi… …ogarithmicam …noulli in Actis nostra egregie
… vniformis di… etiam vnifor- me

me ponitur, resistente in quacunque multiplicata celeritatum ratione: determinare curuam AM, quam corpus proiectum describit.

Solutio.

Manente $AP = x$; $PM = y$, $Mm = ds$, celeritate in $M = \sqrt{v}$, potentia $= g$, exponente medii resistentis $= c$, resistat medium in ratione $2m$ *cuplicata* celeritatum; eritque $R = \frac{v^m}{c^m}$, et $P = g$ (870). Quare habebuntur istae aequationes $gds^2 = -2vddy$ et $dv = -g\,dy - \frac{v^m ds}{c^m}$, ex quibus tum curua AM tum motus corporis in curua determinatur. Aequatio autem $v = -\frac{gds^2}{2ddy}$ dat $dv = -g\,dy + \frac{gds^2 d^3y}{2ddy^2}$, et $v^m = \frac{g^m ds^{2m}}{2^m(-ddy)^m}$. Hinc eliminata v peruenitur ad istam aequationem $c^m d^3y = -\frac{g^{m-1}}{2^{m-1}} \frac{ds^{2m-1}}{(-ddy)^{m-2}}$ pro curuae natura. Ad hanc construendam ponatur $dy = pdx$, eritque $ddy = dxdp$, $d^3y = dx\,ddp$ et $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$. Quibus substitutis habebitur $2^{m-1}c^m(-dp)^{m-2}ddp = -g^{m-1}dx^m(1+pp)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ponatur porro $dx = \frac{dp}{q}$, eritque $ddp = \frac{dpdq}{q}$. Vnde habebitur $2(-2)^{m-2}c^m q^{m-1}dq = -g^{m-1}dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$, et integrangrando $q^m = -\frac{mg^{m-1}}{2(-2)^{m-2}c^m}\int dp(1+p^2)^{\frac{2m-1}{2}}$. Ex qua aequatione datur q in p, quo inuento sumta abscissa $x = \int\frac{dp}{q}$, est respondens applicata $y = \int\frac{pdp}{q}$. Atque celeritati debita altitudo $v = -\frac{g(1+pp)}{2q}$; et tempus quo arcus AM absoluitur i. e. $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{dp\sqrt{2}}{\sqrt{-gq}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

904. Perspicuum est quoties $2m$ fuerit vel numerus affirmatiuus impar vel numerus negatiuus par valorem ipsius q algebraice per p posse exhiberi.

Corollarium 2.

905. Si resistentia est constans seu $m=0$, et corpus initio in A proiectum sit celeritate $\sqrt{b}$ secundum horizontalem AP, erit applicata PM, y negatiua, ideoque habebuntur hae aequationes $gds^2 = 2vddy$ et $dv = gdy - ds$ seu $v = b + gy - s$. Vnde prodibit haec aequatio $\frac{gds^2}{2ddy} = b + gy - s$.

Corollarium 3.

906. Commodius autem hic casus tractabitur, si in aequatione differentiali tertii gradus ponatur $m=0$ prodit enim $gd^3y = -\frac{2ddy^2}{ds}$ seu substitutionibus per p et q factis haec $\frac{gdq}{q} = -\frac{2dp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, cuius integralis est $glq = 2l\frac{\sqrt{(1+pp)}-p}{a}$, seu obseruata homoge-

neitate $aq = (\sqrt{(1+p^2)}-p)^{\frac{2}{g}} = \frac{adp}{dx}$. Hinc habebitur $dx = \frac{adp}{(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2}{g}}}$. Quae denuo integrata dat $2x = \frac{ga}{(2+g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+g}{g}}} + \frac{ga}{(2-g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-g}{g}}} + k$. Hincque reperitur $y = \int pdx$ et absoluta integratione $4y = \frac{ga}{(2+2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2+2g}{g}}} - \frac{ga}{(2-2g)(\sqrt{(1+pp)}-p)^{\frac{2-2g}{g}}} + i$. Patet igitur hanc curuam fore algebraicam nisi sit g vel 1 vel 2.

Scholion.

907. Aeque late patet *Ioh. Bernoullii* solutio proiectoriarum in medio resistente quam dedit in Act. Lipf. A. 1719 Mai. ac haec nostra solutio vbi etiam constructionem generalem pro his curuis dedit. Antequam autem hanc potentiae vniformis hypothesin relinquamus, problemata inuersa soluemus, quibus determinabimus resistentiam, quae efficit vt corpus in hac potentiae vniformis et deorsum tendentis hypothesi datam curuam describat. Haec enim materia tum a *Newtono* in Phil. tum a *Ioh. Bernoullio* in Act. Lipf. A. 1713 pluribus est pertractata; vbi Viri acutissimi multa eximia notauerunt.

PROPOSITIO III.

Problema.

Tabula XI. Fig. 6.

908. *Posita potentia absoluta g uniformi et deorsum tendente, determinare resistentiam in singulis locis M, qua fiat, vt corpus datam curuam BAM describat.*

Solutio.

Ponatur vt ante $AP = QM = x$, $PM = AQ = y$, et elementum arcus $AM = ds$. Deinde sit celeritas in $M = \sqrt{v}$ et resistentia in $M = R$. His igitur comparatis cum Prop. 106. fiet $P = g$, et y negatiue debet accipi; eritque $gds^2 = 2vddy$, sumto dx constante (871) et $dv = gdy - Rds$ (870). Ex illa aequatione autem est $v = \frac{gds^2}{2ddy}$ ideoque $dv = gdy - \frac{gds^2 d^3y}{2ddy^2}$. Coniunctis igitur his aequationibus prodibit $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$. Quare cum curua sit data, ex eius aequatione reperietur finitus valor ipsius R, ideoque innotescit resistentia Q. E. I.

Corollarium 1.

909. Erit igitur vis resistentiae in M ad vim sollicitantem g vt dsd^3y ad $2ddy^2$. Seu posito radio osculi in $M = r$, ob $r = \frac{ds^3}{dxddy}$ erit $\frac{dsd^3y}{2ddy^2} = \frac{3dsdy - dxdr}{2ds^2}$. Quare erit $g : R = 2ds^2 : 3dsdy - dxdr$.

Corollarium 2.

910. Altitudo generans celeritatem in M nempe v ex ipsa curua determinatur est enim $v = \frac{gds^2}{2ddy}$. Seu introducto radio osculi r ob $\frac{ds^2}{ddy} = \frac{rdx}{ds}$ erit $v = \frac{grdx}{2ds}$.

LIBERO · INCTI CURVIL. · III. · $v = \frac{gds^2}{2ddy}$. S · $= \frac{rdx}{ds}$ erit · a g vniformi et de- · stentiam in singu- · ; datam curuam B · 911. · leritatum ra · matur incog · inuentum sit · exponens q= · dii resistenti · resistentis e: · M = x , PM = · AM = ds. De- · resistentia in M · cum Prop. 106. · cipi; eritque gds² · 71) et dv = gdy − · autem est v = gds²/2ddy · iunctis igitur his · Quare cum cur- · perietur finitus va- · esistentia Q. E. I. · 912. · osculi r, · Consequente · radio osculi · mi gradus d · I. · ntiae in M ad vim · Seu posito ra- · dy erit dsd³y/2ddy² = · ²: 3dsdy−dxdr. · 913. · est verticalis · quoque resi · parabolam i · formiter de · satis constat · 2. · celeritatem in M · ninatur est enim · v =

Corollarium 3.

911. Si resistentia ponatur in duplicata celeritatum ratione, exponens vero resistentiae sumatur incognitus q erit $R = \frac{v}{q} = \frac{gds^2}{2qddy}$. Cum igitur inuentum sit $R = \frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$; inuenietur medii resistentis exponens $q = \frac{dsddy}{d^3y}$. Similique modo pro aliis medii resistentis hypothesibus inueniri potest medii resistentis exponens.

Corollarium 4.

912. Introducto ad q determinandum radio osculi r, erit $\frac{d^3y}{ddy} = \frac{ddy(3dsdy - dxdr)}{ds^3} = \frac{3dsdy - dxdr}{rdx}$. Consequenter fiet $q = \frac{rdxds}{3dsdy - dxdr}$. Cognito igitur radio osculi r tam R quam q per differentialia primi gradus determinabuntur.

Corollarium 5.

913. Si curua AM fuerit parabola, cuius axis est verticalis AC, quia in ea est $d^3y = 0$, prodibit quoque resistentia $R = 0$. Ex quo cognoscitur parabolam in vacuo describi posse a corpore vniformiter deorsum tracto, quemadmodum cuique satis constat.

Co-

Corollarium 6.

914. Si curua fuerit parabola quaecunque superioris ordinis ita vt sit $a^{n-1}y = x^n$, erit $dy = \frac{nx^{n-1}dx}{a^{n-1}}$ et $ds = \frac{dx\sqrt{(a^{2n-2} + n^2x^{2n-2})}}{a^{n-1}}$. Porroque ob dx constans $ddy = \frac{n(n-1)x^{n-2}dx^2}{a^{n-1}}$ et $d^3y = \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3}{a^{n-1}}$. Quare fiet $R = \frac{(n-2)g\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{3n(n-1)x^{n-1}}$. Atque posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae $q = \frac{x\sqrt{(a^{2n-2}+n^2x^{2n-2})}}{(n-2)a^{n-1}}$.

Scholion.

915. Alia exempla curuarum, quae loco AM assumi possunt hic non adiungo; sed iis sequentes propositiones destino, cum diligentius examinari mereantur. Considerabo autem praecipue circulum et hyperbolam cum hae curuae a Viris citatis maxime sint tractatae.

PROPOSITIO 112.
Problema.

Tabula XI. Fig. 6. 916. *Posita vi absoluta g uniformi et perpetuo deorsum trahente; inuenire resistentiam, quae faciat*

LIBERO ... NCTI CURVIL.
ciat vt ... moueatur. ... bola quaecunque $= x^n$, erit $dy =$ ... $+ n^2x^{2n-2})$.
Sit ... et radius ... erit g:R ... QM. H ... $R = \frac{3g.QM}{2AC}$ ... M erit = ... leritatum ... sistentiae ... $n(n-1)x^{n-2}dx^2$ ... Quare fi- ... Atque ... itatum propor- ... ae $q =$
917 ob QM ... resistenti ... per CA ... quae loco A ... sed iis sequen- ... ligentius exami- ... utem praecipue ... curuae a Viris
918 QM eua ... quam in ... sistentia ... tione. ... sollicitab ... 112. ... formi et perpetuo ... tiam, quae faciat

ciat vt corpus libere in peripheria circuli BAMD *moueatur.*

Solutio.

Sit radius circuli $AC = a$, erit $x^2 = 2ay - y^2$, et radius osculi in $M = a = MC$. Quare ob $dr = 0$ erit $g:R = 2ds:3dy$. Est vero $ds:dy = a:x = AC:QM$. Hanc ob rem erit $g:R = 2AC:3QM$ seu $R = \frac{3g.QM}{2AC}$. Altitudo vero generans celeritatem in M erit $= \frac{gadx}{2ds} = \frac{g.QC}{2}$. At si resistentia quadratis celeritatum proportionalis ponatur erit exponens resistentiae $q = \frac{adx}{3dy} = \frac{a.QC}{3QM}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

917. Dum corpus per arcum BA ascendit ob QM tum existentem negatiuam, erit quoque resistentia per BA negatiua; seu motus corporis per CA a medio accelerabitur vi tangentiali $\frac{3g.QM}{2AC}$.

Corollarium 2.

918. Resistentia vero in puncto A, quia QM euanescit, erit nulla; corpus igitur in A tanquam in vacuo mouebitur. In puncto vero D resistentia erit ad potentiam g in sesqui altera ratione. In B vero tantundem sursum a resistentia sollicitabitur.

Corollarium 3.

919. Cum igitur in B et D directio vis resistentiae cum directione potentiae g conueniat; Corpus in B sursum vrgebitur vi $\frac{1}{2}g$; in A deorsum trahetur a vi g, et in D sursum iterum a vi $\frac{1}{2}g$.

Corollarium 4.

920. Quia $\frac{QM}{AC}$ exprimit sinum anguli ACM posito radio $=1$, erit resistentia in $M = \frac{3}{2}g$ sin. ACM, seu resistentia vbique est vt sinus anguli ACM, quo corpus ab A declinauit.

Corollarium 5.

921. Porro est $\frac{a \cdot QC}{QA}$ tangens arcus MD. Quare posita resistentia quadratis celeritatum proportionali erit exponens resistentiae q aequalis tertiae parti cotangentis arcus AM.

Corollarium 6.

922. Cum altitudo debita celeritati in M sit $= \frac{g \cdot QC}{2}$; erit celeritas in $A = \sqrt{\frac{g \cdot AC}{2}}$; in B vero et D erit celeritas $= o$. Quia igitur corpus in B reuera sursum pellitur vi $= \frac{g}{2}$, mirum non est corpus in B sursum moueri incipere.

Corollarium 7.

923. Corpus igitur tam in quadrante BA quam AD in loco aeque distitis a puncto A aequales habebit celeritates. Infra vero horizontalem BD corpus peruenire non potest ob QC negatiuam, quo casu celeritas fit imaginaria.

LIB[…]TI CURVIL

habebit […] rectio vis re- corpus […] g conueniat; quo ca[…] in A deor- […]rum a vi $\frac{1}{2}g$.

92[…] anguli ACM peruene[…] $M = \frac{3}{2}g$ sin. ligi pot[…] sinus anguli pus in D […] pus iter[…] modo it[…] tio per […] $=\frac{1}{2}g$ su[…] arcus MD. motu o[…]eritatum pro- pellatur […] q aequalis ter- nulla vis […] nem qu[…] Sed ad […] perfecte […]ritati in M sit verticali […] in B vero et quum pr[…] pus in B reue- in B seu […]on est corpus pheriae […] recta ver[…] Ceterum […] quae C[…]uadrante BA quae sun[…]o A aequales tionibus. ha-

Scholion.

924. Quorsum autem corpus, cum in D peruenerit, sit progressurum, facile ex allatis colligi potest. Nam cum celeritas in D sit $=o$ et corpus in D sursum vrgeatur vi $\frac{1}{2}g$, perspicuum est corpus iterum sursum moueri debere. Eodem autem modo iterum per arcum DMA ascendet, quo initio per BA ascendit, quia tam in D quam in B vi $=\frac{1}{2}g$ sursum vrgetur. Hoc vero mirabile in hoc motu occurrit, quod corpus in B quiescens sursum pellatur et nihilominus in curua moueatur, etiamsi nulla vis adesse videatur, quae corporis directionem quam in E sursum accepit, posset inflectere. Sed ad hoc respondeo vis in B directionem non perfecte sursum tendere, sed infinite parum a vera verticali aberrare, id quod sufficit ad motum obliquum producendum. Directio enim vis resistentiae in B seu potius vis accelerantis est elementum peripheriae circuli in B insistens, quod non perfecte est recta verticalis, sed infinite parum inclinata ad EC. Ceterum haec nostra egregie conueniunt cum iis quae Cel. *Bernoulli* dedit in Act. Lips. A. 1713 et quae sunt in *Neutoni* Princ. Phil. posterioribus editionibus. In prima enim editione error in solutio-

 nem

nem irrepſit, quo inductus fuit, vt rationem g ad R ſtatueret aequalem rationi AC ad QM. Monitus autem de hac a *Bernoullio* in ſequentibus editionibus hunc lapſum emendauit.

PROPOSITIO 113.

Problema.

Tabula XII. Fig. 1. 925. *Poſita vt ante vi abſoluta* g *vniformi et deorſum trahente; inuenire vim reſiſtentiae, qua efficitur vt corpus in hyperbola* NAM *axem* CAQ *verticalem habente libere moueri poſſit.*

Solutio.

Sit C centrum hyperbolae et ſemiaxis transuerſus $AC = a$, ſemiaxis vero coniugatus ſit $= c$. Ponatur $CQ = t$ et $QM = AP = x$; eritque ex natura hyperbolae $c^2t^2 = a^2x^2 + a^2c^2$. Sumta autem $PM = AQ = y$ erit $y = t - a$, et $dy = dt$, $d^2y = d^2t$ atque $d^3y = d^3t$. Ex aequatione vero habebitur $t = \frac{a\sqrt{(x^2+c^2)}}{c}$ et $dt = \frac{ax\,dx}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ ideoque $ds = \frac{dx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Porro fiet $ddt = ddy = \frac{ac\,dx^2}{(x^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$

et $d^3t = d^3y = -\frac{3acx\,dx^3}{(x^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}$. Ex quibus erit $\frac{d^3y}{ddy} = -\frac{3x\,dx}{x^2+c^2}$ et $\frac{d^3y}{ddy^2} = -\frac{3x\sqrt{(x^2+c^2)}}{ac\,dx}$. Conſequenter pro-

LIBERO … I CURV.
prouenie … rionem g ad
$v = \frac{g(\ldots}{}$ … QM Mo-
dratis celer … entibus edi-
ponens re…
Q. E. I.
926. et MT = … ; vniformi et
R = − … e, qua ef-
CQ. MT : … CAQ ver-
927. indicio id … axis trans-
non poſſe i… tus ſit = c.
pus a medi… e ex natu-
arcum NA … nta autem
ſtentia R eri… , d²y = d²t
in N, erit … habebitur
… ds =
928. … acdx²
AC : CT. … (x²+c²)^{3/2}
= 3g.NT/2CT. … s erit d³y/ddy
ſolutam g
A reſiſtent … nſequenter
ab A diſta … pro-

proueniet reſiſtentia $R = -\frac{3gx\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{2ac^2}$ atque $v = \frac{g(c^4+c^2x^2+a^2x^2)\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac^3}$. Reſiſtentia vero quadratis celeritatum proportionali poſita erit exponens reſiſtentiae $q = -\frac{\sqrt{(x^2+c^2)}(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}{3cx}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

926. Ducta tangente MT erit $QT = \frac{ax^2}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$ et $MT = \frac{x\sqrt{(c^4+c^2x^2+a^2x^2)}}{c\sqrt{(x^2+c^2)}}$. Conſequenter prodibit $R = -\frac{3g.MT.\sqrt{(x^2+c^2)}}{2ac} = -\frac{3g.CQ.MT}{2a^2}$ ſeu $R : g = -3.CQ.MT : 2.AC^2$.

Corollarium 2.

927. Quia reſiſtentia R inuenitur negatiua, indicio id eſt deſcenſum per AM in hyperbola fieri non poſſe in medio reſiſtente, ſed requiri vt corpus a medio promoueatur. At dum corpus per arcum NA aſcendit, quia fit ds negatiuum, reſiſtentia R erit affirmatiua. Hanc ob rem ſi corpus eſt in N, erit reſiſtentia $R = \frac{3g.CQ.NT}{2AC^2}$.

Corollarium 3.

928. Ex natura hyperbolae eſt $CQ : AC = AC : CT$. Itaque erit reſiſtentia in N ſeu $R = \frac{3g.NT}{2CT}$. Vel erit reſiſtentia R ad potentiam abſolutam g vt $3NT$ ad $2CT$. In vertice ergo A reſiſtentia euaneſcit, creſcitque quo magis N ab A diſtat.

Corollarium 4.

929. Altitudo debita celeritati corporis in M vel N, est $=\frac{g.CQ^2.MT^2}{2.AC^2.QT}$ vti ex valore ipsius v et natura hyperbolae facile deducitur. Cum autem sit MT=NT et CQ.NT$=\frac{2R.AC^2}{3g}$, erit $v=\frac{2R^2.AC^2}{9g.QT}$.

Corollarium 5.

930. Si resistentia ponatur celeritatibus proportionalis et exponens resistentiae sit q, erit $R=\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{q}}$ et $v=R^2q$. Quare inuenietur $q=\frac{2AC^2}{9g.QT}$. Hac igitur hypothesi exponens erit reciproce vt subtangens QT.

Corollarium 6.

931. At si resistentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis sitque exponens resistentiae q erit existente corpore in N hic exponens $q=\frac{NT.CQ}{3\,TQ}$. Seu ducta ex C parallela CR tangenti NT occurrens applicatae QM productae in R erit $q=\frac{CR}{3}$.

Scholion.

932. Quod ante in circulo et nunc in hyperbola obseruauimus resistentiam in altero arcu fieri affirmatiuam in altero negatiuam, id in omnibus curuis circa supremum punctum A duos arcus similes et aequales vt AN et AM habentibus locum obti-

tinet. Nam cum generaliter pro arcu AM sit resistentia $R=\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, quia in arcu AN sit ds negatiuum erit in N resistentia $R=-\frac{gdsd^3y}{2ddy^2}$, ita vt resistentia in N sit negatiuum resistentiae in M. Quare cum in rerum natura non detur resistentia negatiua, qua motus corporis acceleratur, fieri non potest, vt corpus in medio resistente curuam describat, quae circa summum punctum A habeat duos ramos similes et aequales. Altitudo vero generans celeritatem tam in M quam in N est eadem, eius enim valor $\frac{gds^2}{2ddy}$ non mutatur, etiamsi ds fiat negatiuum. Cum igitur istius modi curuae a *Newtono* ideo sint consideratae, vt aliquam erueret, pro qua medii resistentis densitas non multum variaret; seu nostro tractandi modo in qua exponens resistentiae vbique fere sit eiusdem valoris; quo talem curuam pro proiectoria in medio resistenti vniformi habere posset sine sensibili errore: alias curuas non diametro verticali praeditas cum *Newtono* considerabimus, cuius modi sunt hyperbolae assymtoton verticalem habentes, quippe quae propius accedunt ad logarithmicam, quae a corpore in medio resistente in simplici celeritatum ratione coque vniformi describitur. In alia enim resistentiae hypothesi *Newtonus* proiectorias non determinauit, sed contentus fuit veris proximas assignare. Quod institutum, cum verae proiectoriae a nobis datae tam sint implicatae, vt vix quicquam ex iis ad praxin possit deduci, etiam sequemur.

PRO-

PROPOSITIO 114.

Problema.

T.bul. XII. Fig. 2. 933. *Sit curua NM hyperbola cuiuscunque gradus alteram habens asymtoton CP verticalem, determinare resistentiam, quae efficiat vt corpus perpetuo vi g deorsum sollicitatum in hac hyperbola possit moueri.*

Solutio.

Consideretur asymtotos CP tanquam axis, ad eumque ex M normalis ducatur MP. Posita CP $=y$ et MP$=x$, quae supra generaliter tradidimus haec locum habebunt, si modo ibi dx sumatur negatiuum. Sit RC altera assymtotos et C centrum hyperbolae; sinus ang. RCP$=\alpha$, eiusque cosinus $\sqrt{(1-\alpha^2)}=\beta$. Erit ergo producta PM in R, PR$=\frac{\alpha y}{\beta}$ et CR$=\frac{y}{\beta}$. Ex M ducatur MQ parallela asymtoto CR, erit MQ$=\frac{x}{\alpha}$ et PQ$=\frac{\beta x}{\alpha}$; ideoque CQ$=\frac{\alpha y-\beta x}{\alpha}$. At ex natura hyperbolarum erit $a^n=\frac{x^{n-1}(\alpha y-\beta x)}{\alpha^n}$, atque hinc $y=\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$ et $dy=\frac{\beta dx}{\alpha}-\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx}{x^n}$. Ducta tangente MT erit PT$=-\frac{xdy}{dx}=-\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{(n-1)\alpha^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, MT$=\frac{xds}{dx}$, ita vt sit $ds=\frac{MT\,dx}{x}$. Hoc vero casu quo x in altera parte sumitur fit MT negatiua.

. LIB ... CTI CURVIL. negatiu ... 14. $n(n-1$ ... bola cuiuscunque ... verticalem, de- ... vt corpus per- ... hyperbola pos- Ex his qui val R. Er atque $\frac{gx^{n-}}{2n(n-}$ in ratio ... nquam axis, ad MP. Posita CP ... liter tradidimus ponens ... ibi dx sumatur ... otos et C cen- ... P$=\alpha$, eiusque ... producta PM Ex quo ... M ducatur MQ $=\frac{x}{\alpha}$ et PQ$=\frac{\beta x}{\alpha}$; feu q ... a hyperbolarum Q. E. ... hinc $y=\frac{\beta x}{\alpha}+$ ... $a^n dx$. Du- 93 ... $\frac{xdy}{dx}=-\frac{\beta x}{\alpha}+$ R$=\frac{}{2n}$ ... $ds=\frac{MT\,dx}{x}$. Hoc stentia ... sumitur fit MT ne-

Porro ob dx constans erit $ddy=\frac{n(n-1)\alpha^{n-1}a^n dx^2}{x^{n+1}}$ et $d^3y=-\frac{(n+1)(n-1)n\alpha^{n-1}a^n dx^3}{x^{n+2}}$. Ex his oritur $\frac{g\,ds\,d^3y}{2ddy^2}=-\frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ qui valor facto MT negatiuo aequatur resistentiae R. Erit itaque R$=\frac{g(n+1)x^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$ (908). atque altitudo debita celeritati in M seu $v=\frac{gx^{n-1}.\,MT}{2n(n-1)\alpha^{n-1}a^n}$. Si medium resistere ponatur in ratione $2m$ *cuplicata* ratione celeritatum et exponens resistentiae sit q, erit R$=\frac{v^m}{q^m}$ ideoque $q=\frac{v}{R^{\frac{1}{m}}}$

Ex quo fiet $q=\frac{g^{\frac{m-1}{m}}x^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}MT^{\frac{2m-1}{m}}}{2^{\frac{m-1}{m}}(n^2-n)^{\frac{m-1}{m}}(n+1)^{\frac{1}{m}}\alpha^{\frac{(m-1)(n-1)}{m}}a^{\frac{n(m-1)}{m}}}$

seu $q^m=\frac{g^{m-1}x^{(m-1)(n-1)}MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)\alpha^{(m-1)(n-1)}a^{n(m-1)}}$.

Q. E. I.

Corollarium I.

934. Quia est $x^{n-1}=\frac{\alpha^n a^n}{\alpha y-\beta x}$, erit resistentia R$=\frac{g(n+1)\alpha.\,MT}{2n(n-1)(\alpha y-\beta x)}=\frac{g(n+1)MT}{2n(n-1)CQ}$. Vnde erit resistentia R ad potentiam g vt $(n+1)$ MT ad $2n(n$

$2n(n-1) CQ$. Simili modo hoc loco x^{n-1} valore ſubſtituto erit $v = \frac{g.MT^2}{2n(n-1)CQ}$ et $q^m =$
$\frac{g^{m-1} MT^{2m-1}}{2^{m-1}(n^2-n)^{m-1}(n+1)CQ^{m-1}}$.

Corollarium 2.

935. Deſcendente corpore in infinitum fiet $x=0$, et $MT = PT = \frac{(n-1)a^{n-1}a^n}{x^{n-1}}$, euaneſcente x. In profunditate ergo infinita erit $R = \frac{g(n+1)}{2n}$, ideoque finitae magnitudinis, at erit $v = \frac{g(n-1)a^{n-1}a^n}{2nx^{n-1}}$. Quare cum neceſſario ſit $n > 1$, euaneſcente x fiet corporis celeritas infinitae magna.

Corollarium 3.

936. Poſita igitur reſiſtentia $R = \frac{v^m}{q^m}$, in profunditate infinita, debebit etiam q eſſe infinite magna; his itaque locis corpus in vacuo mouebitur. Ex quo ſequitur quo magis corpus deſcendat eo minorem fore reſiſtentiam, ſeu potius medium eo rarius.

Corollarium 4.

937. In hyperbola appolloniana ſit $n = 2$. Pro hac igitur curua inuenitur $R = \frac{3gx.MT}{4aa^2} =$

LI ... CTI CURVIL.
loco x^{n-1} va-
$= \frac{3g.M}{4}$ ... et $q^m =$
9 ... n infinitum fiet
portio ... euaneſcen-
nens r
Hac i ... erit $R = \frac{g(n+1)}{2n}$,
perbol ... erit $v =$
ceſſario ſit n
9 ... celeritas infini-
leritat
ſtentia
tur,
$R = \frac{v^m}{q^m}$, in pro-
9 ... ſſe infinite ma-
deſcril ... uo mouebitur,
corpu ... deſcendat eo
potius medium
C —
pus,
loniana ſit n
MP ... ur $R = \frac{3gx.MT}{4aa^2} =$

$= \frac{3g.MT}{4.CQ}$, et $v = \frac{g.MT^2}{4CQ}$, atque $q^m =$
$\frac{g^{m-1}. MT^{2m-1}}{3.2^{2m-2}. CQ^{m-1}}$.

Corollarium 5.

938. Si reſiſtentia ponatur celeritatibus proportionalis, erit in omnibus his hyperbolis exponens reſiſtentiae directe vt CQ, ob $m=\frac{1}{2}$ hoc caſu. Hac igitur reſiſtentiae hypotheſi corpus omnes hyperbolas poterit libere deſcribere.

Corollarium 6.

939. Si reſiſtentia ponatur in duplicata celeritatum ratione vt ſit $m=1$, erit exponens reſiſtentiae in $M = \frac{MT}{n+1}$. Quo magis igitur MT variatur, eo magis quoque medium erit difforme.

Corollarium 7.

940. Tempus praeterea quo elementum Mm deſcribitur ſeu $\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}}$. Tempus igitur, quo corpus in M vsque peruenit, eſt vt $\int \frac{dx}{x^{\frac{n+1}{2}}}$ i. e. vt $C - \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}$, ſeu potius vt $\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}} - C$. Quare tempus, quo corpus ex N in M peruenit, erit vt $\frac{1}{MP^{\frac{n-1}{2}}} - \frac{1}{NP^{\frac{n-1}{2}}}$.

Corollarium 8.

950. In parabola igitur appolloniana in qua $n = 2$ erit tempus, quo corpus ab N ad M peruenit vt $\sqrt{NP} - \sqrt{MP}$ ob NP.MP constans nempe $= \frac{ac^2}{4}$.

Scholion.

951. Ex his manifestum est corpus in medio resistente vniformi huiusmodi hyperbolas describere non posse, cum exponens resistentiae nimium sit variabilis, quippe qui tandem fit infinite magnus. Quamobrem *Neutoni* institutum, quo has hyperbolas loco verarum proiectoriarum in medio resistente vniformi substituere voluit probari non potest. In medio enim secundum quadrata celeritatum resistente, exponens est vt tangens MT, quae tam descendendo, quam ad punctum N regrediendo vehementer variatur. Intelligi etiam haec inconuenientia potest ex celeritate, quae descendendo in infinitum crescit, cum tamen in medio vniformi non vltra datum terminum crescere queat. Praeterea non satis liquet in resistentiae quadratis celeritatum proportionalis hypothesi curuam descriptam habere asymtoton verticalem, quemadmodum in medio resistente in simplici ratione celeritatum. Nam hic resistentia etiam, si corpus a nulla potentia vrgetur, totius motus linea est finita; quae vero si resistentia quadratis celeritatum proportionalis ponitur, fit infinita. Ex quo etiam consequi videtur proiectoriam in hac resistentia non esse habituram asymtoton. Hoc saltem certum est non habere hanc curuam asymtoton hyperbolicam. Interim tamen habet asymtoton verticalem alius generis, quae ex quadratura curuae, per rectificationem parabolae datae, determinatur. Sed relicta potentiae vniformis hypothesi, pergamus ad potentiam variabilem, cuius tamen directio vbique sibi sit parallela. Ex datis quidem potentia et resistentia curuam descriptam non inuestigabimus cum hoc Prop. 106 iam sit factum; sed data curua atque vel potentia vel resistentia vel celeritate reliqua determinabimus.

PROPOSITIO 115.

Problema.

953. *Sit potentia absoluta vtcunque variabilis et vbique deorsum tendens iuxta* MP, *determinare resistentiam requisitam ad hoc, vt corpus in data curua* AM *moueatur.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Sit $AP = x$, $PM = y$ et elementum arcus AM $= ds$: tum sit vis qua corpus in M secundum MP sollicitatur $= P$, et altitudo celeritati in M debita $= v$, atque resistentia in $M = R$. His positis erit $dv = -Pdy - Rds$ (870), et $v = -\frac{Pds^2}{2ddy}$ (871), sumto to dx conſtante. Ex hac ergo aequatione erit $dv = -P\,dy - \frac{dPds^2}{2ddy} + \frac{Pds^2d^3y}{2ddy^2}$; vnde prodibit $R = \frac{dPds}{2ddy} - \frac{Pdsd^3y}{2ddy^2}$ ſeu $\frac{2R}{ds} = d.\frac{P}{ddy}$. Inueniuntur ergo tam v quam R per datas quantitates P, x et y expreſſa. Q. E. I.

Corollarium I.

953. Poſito radio osculi in $M = r$ erit $ddy = -\frac{ds^3}{rdx}$, et $d^3y = -\frac{3dsdyddy}{rdx} + \frac{ds^3dr}{r^2dx} = \frac{3ds^4dy}{r^2dx^2} + \frac{ds^3dr}{r^2dx}$. Vnde prodit $v = \frac{Prdx}{2ds}$ et $R = -\frac{rdPdx - Pdxdr - 3Pdsdy}{2ds^2}$.

Corollarium 2.

954. Si lex reſiſtentiae ſit celeritatum ratio duplicata et exponens $= q$ erit $R = \frac{v}{q}$ et $q = \frac{v}{R}$. Quocirca reperietur $q = \frac{Pdsddy}{Pd^3y - dPddy}$, ſeu $q = -\frac{Prdxds}{rdPdx + Pdxdr + 3Pdsdy}$.

Corollarium 3.

955. Sit vis P ad grauitatem 1 vt y ad f erit $P = \frac{y}{f}$, ideoque $R = -\frac{rdxdy - ydxdr - 3ydsdy}{2fds^2}$ et $v = \frac{yrdx}{2fds}$, atque $q = -\frac{yrdxds}{rdydx + ydxdr + 3ydsdy}$.

Corollarium 4.

956. Si curua A M fuerit circulus radii $AC = a$, erit $r = a$, $dr = 0$, $dy = \frac{(a-x)dx}{y}$ et $ds = \frac{adx}{y}$. Vnde prodit $v = \frac{Py}{2}$, et reſiſtentia $R = -\frac{ydP}{2adx} - \frac{3P(a-x)}{2a}$, atque $q = -\frac{aPydx}{y^2dP + 3P(a-x)dx}$.

Exemplum I.

957. Sit curua AM circulus cuius centrum C et radius $AC = a$. Corpus autem perpetuo ad axem AC attrahatur in ratione diſtantiarum ita vt ſit $P = \frac{y}{f}$; erit $v = \frac{y^2}{2f}$, ideoque celeritas in M erit ut applicata MP. Deinde reſiſtentia R fiet $= -\frac{y(a-x) - 3y(a-x)}{2af} = -\frac{2y(a-x)}{af} = -\frac{2PM.CP}{f.AC}$ et $q = -\frac{PM.AC}{4.CP}$. Celeritas autem in puncto A erit $= 0$, et reſiſtentia, dum corpus in quadrante ascendit negatiua, ſeu corpus a medio accelerabitur. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit infinite magnum, fit enim $\int\frac{ds}{\sqrt{v}} = \int\frac{adx\sqrt{2f}}{2ax - x^2} = -\sqrt{\frac{f}{2}}\,l\,0 + \sqrt{\frac{f}{2}}\,l\,\frac{x}{2a-x}$. Id quod etiam per ſe intelligitur, nam cum celeritas in A ſit $= 0$, et hic tam vis ſollicitans $\frac{y}{f}$, quam vis medii euaneſcat, corpus perpetuo in A debebit perſeuerare.

Exemplum 2.

958. Manente curua AM circulo, ſi vis abſoluta fuerit reciproce vt diſtantia PM ſeu $P = \frac{f}{y}$, erit $v = \frac{f}{2}$. Quare celeritas corporis vbique erit eadem, ſeu corpus feretur motu aequabili per circuli peripheriam et tempus, quo arcus quiuis AM abſoluitur erit vt ipſe arcus AM. At reſiſtentia in M erit $= -\frac{f(a-x)}{ay} = -\frac{f.CP}{AC.PM}$. Reſiſtentia igitur dum corpus

pus per quadrantem ascendit erit negatiua; dum autem per sequentem quadranten descendit, resistentia fiet affirmatiua seu erit vera resistentia. Ex resistentia porro inuenitur $q = -\frac{AC.PM}{2.CP}$. In puncto igitur A resistentiae vis promouens erit infinite magna; vt et potentia sollicitans, quae resistentiae est aequalis.

Exemplum 3.

959. Manente AM circulo sit vis sollicitans vt potestas quaecunque distantiae MP, seu $P = \frac{y^n}{f^n}$; erit $dP = \frac{ny^{n-2}(a-x)dx}{f^n}$. Ex his igitur prodibit $v = \frac{y^{n+1}}{2f^n}$ et resistentia $R = \frac{(n+3)y^n(a-x)}{2af^n}$. Vnde fit $R:P = -(n+3)CP:2AC$. Quare si fuerit $n = -3$, seu potentia P reciproce vt cubus distantiae MP, euanescet resistentia R, corpusque ab hac potentia sollicitatum in vacuo moueri poterit in circulo AM. Deinde si $n+3$ est numerus affirmatiuus resistentia per quadrantem ascensus erit negatiua. At si $n+3$ est numerus negatiuus resistentia per hunc quadrantem fit affirmatiua.

Exemplum 4.

Tabula XII. Fig. 4. 960. Si curua AMB fuerit talis, vt radius osculi in M sit reciproce, vt applicata PM, id quod omnes

omnes curuas elasticas competit erit $r = \frac{a^2}{y}$ et $dr = -\frac{a^2dy}{y^2}$. Fiet igitur $v = \frac{a^2Pdx}{2yds}$, et $R = \frac{a^2Pdxdy}{2y^2ds^2} - \frac{a^2dPdx}{2yds^2} - \frac{3Pdy}{2ds}$. Cum autem sit $-\frac{ds^3}{dxddy} = \frac{a^2}{y}$, atque integrando $2a^2dx = ds(y^2+c^2)$, et $dy = \frac{dx\sqrt{(4a^4-(y^2+c^2)^2)}}{y^2+c^2}$. Hinc erit $v = \frac{P(y^2+c^2)}{4y}$. Atque $R = \frac{P(c^2-3y^2)\sqrt{(4a^4-(y^2+c^2)^2)}}{8a^2y^2} - \frac{dP(y^2+c^2)^2}{8a^2ydx}$. Sit nunc $P = \frac{y}{f}$, et $dP = \frac{dx\sqrt{(4a^4-(y^2+c^2)^2)}}{f(c^2+y^2)}$, erit $v = \frac{y^2+c^2}{4f}$ et $R = -\frac{3y\sqrt{(4a^4-(y^2+c^2)^2)}}{4a^2f} = -\frac{3ydy}{2fds}$. Ideoque $R:P = -3dy:2ds$. Quam diu igitur corpus ascendit resistentia est negatiua, at quando descendit erit affirmatiua.

PROPOSITIO 116.

Problema.

961. *Si data sit curua AM et resistentia per quantitates ad curuam pertinentes; inuenire potentiam absolutam P perpetuo normaliter ad axem AC tendentem, quae faciat vt corpus in hac curuam libere moueri possit.* Tabula XII. Fig. 5.

Solutio.

Sit $AP = x$, $PM = y$ et elementum curuae $= ds$. Deinde sit resistentia in $M = R$, quae ergo per x, y et s dabitur; potentia quaesita sit $= P$ et celeritas in M debita altitudini v. His positis erit; $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$ (871), et $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - Rds$ (cit.).

Ex

Ex hac aequatione ob dx conſtans reperitur integrando $v = \frac{a ds^2}{dx^2} - \frac{ds^2}{dx^2}\int \frac{R dx^2}{ds}$. Inuenta autem v innotescet P ex aequatione $P = -\frac{2v ddy}{ds^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

962. Erit igitur $P = -\frac{2a ddy}{dx^2} + \frac{2ddy}{dx^2}\int \frac{R dx^2}{ds}$. Per meras igitur quantitates datas determinatur P.

Corollarium 2.

963. Quia conſtans addita a prolubitu poteſt accipi, ita ea poterit determinari, vt corpus in puncto A vel alio quodam dato puncto datam habeat celeritatem.

Corollarium 3.

964. Si reſiſtentia ponatur quadratis celeritatum proportionalis et exponens reſiſtentiae q erit $q = \frac{a ds^2}{R dx^2} - \frac{ds^2}{R dx^2}\int \frac{R dx^2}{ds}$.

Corollarium 4.

965. Tempus quo arcus AM percurritur eſt $\int \frac{ds}{\sqrt{v}}$, in qua expreſſione ſi valor ipſius v ſubſtituatur proueniet tempus per $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{(a - \int \frac{R dx^2}{ds})}}$

Co-

LIBE ... TI CURVIL.
... :peritur integ... tem v inno- ... Q. E. I.
966 ... tis 1 vt ... ad dx, e... que ten... $(a-x)$. ... datas deter-
967 ... $y = \sqrt{(2$ ... $ddy = -$ ... atque ... $= \frac{ds}{dx}$ ſe... $(a-x)$, ... corpus ... $(c-x)$. $P = \frac{2AC^2}{PN}$ ... in ſupre... ibidem ... ctum n... eret im... A, qui... celeratu... celerita... quadran... gatiuam
... olubitu po- ... , vt corpus ... ncto datam ... lratis celeri- ... ſiſtentiae q ... curritur eſt ... v ſubſtitua- ... $\frac{dx}{\sqrt{(a - \int \frac{R dx^2}{ds})}}$
Co-

Corollarium 5.

966. Si reſiſtentia ponatur ad vim grauitatis 1 vt tangens in M ad ſubtangentem ſeu vt ds ad dx, erit $v = \frac{ds^2}{dx^2}(a - x)$ et $P = -\frac{2ddy}{dx^2}(a - x)$ atque tempus per $AM = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-x)}} = 2\sqrt{a} - 2\sqrt{(a-x)}$. At porro erit $q = \frac{ds}{dx}(a - x)$.

Exemplum.

967. Sit curua circulus cuius radius $AC = b$, erit $y = \sqrt{(2bx - xx)}$ et $dy = \frac{dx(b-x)}{y}$ et $ds = \frac{b dx}{y}$, atque $ddy = -\frac{b^2 dx^2}{y^3}$. Ex his habebitur $v = \frac{b^2}{y^2}(a - \int \frac{R y dx}{b})$ atque $P = \frac{2b^2}{y^3}(a - \int \frac{R y dx}{b}$. Ponatur reſiſtentia $= \frac{ds}{dx}$ ſeu $R = \frac{b}{y}$, erit $v = \frac{b^2}{y^2}(a - x)$, et $P = \frac{2b^2}{y^3}$ $(a - x)$, atque $q = \frac{b}{y}(a - x)$. Tempus vero quo corpus ex A in M peruenit erit $= 2\sqrt{a} - 2\sqrt{}$ $(c - x)$. Si vlterius ſit $b = a$, erit $v = \frac{AC^2 . PC}{PM^2}$, et $P = \frac{2AC^2 PC}{PM^3}$, et $R = \frac{AC}{PM}$. Celeritas igitur corporis in ſupremo circuli puncto erit $= 0$, et potentia P ibidem euaneſcit. Corpus autem vltra hoc punctum non poterit progredi, quia alias celeritas fieret imaginaria, inde igitur reuertetur ad punctum A, quia a reſiſtentia quae in receſſu fit negatiua acceleratur. Dum autem peruenerit in A, quia hic celeritas eſt infinite magna, hoc motu ſuo deſcribet quadrantem infra AC, in quo ob potentiam P negatiuam ſurſum vrgebitur.

 PRO-

PROPOSITIO 117.

Problema.

Tabula XII. Fig. 3.

968. *Si medium fuerit uniforme atque resistat in duplicata ratione celeritatum determinare potentiam absolutam deorsum tendentem, quae faciat ut corpus in hoc medio resistente describat curuam datam* AM.

Solutio.

Posita $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus AM $= ds$, celeritate in $M = \sqrt{v}$, exponente medii resistentis $= c$, et potentia absoluta $= P$, erit igitur $R = \frac{v}{c}$. His positis erit $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$ et $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - \frac{vds}{c}$ (871). Quare habebitur $\frac{dv}{v} = \frac{2dyddy}{ds^2} - \frac{ds}{c}$ et integrando $lv = l\frac{ads^2}{dx^2} - \frac{s}{c}$ seu $v = \frac{ae^{-\frac{s}{c}}ds^2}{dx^2}$. Valore igitur ipsius v inuento erit $P = -\frac{2ae^{-\frac{s}{c}}ddy}{dx^2}$. Data ergo curua tum v tum P inueniuntur. Q. E. I.

Corollarium 1.

969. Tempus quo corpus arcum AM absoluit seu $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ erit $= \int\frac{e^{\frac{s}{2c}}dx}{\sqrt{a}}$. Data ergo curua seu aequa-

aequ… fatte… funt… tio … ue atque re- determinare po- quae faciat ut it curuam da- te q… natu… nae … ito arcus AM ate medii re- P, erit igitur … caua … pote … erit … tiuur … A P … Valo- … ntur. Q. E. I. norn… corp… by = … = – … m AM absol- P = … go curua seu aequa-

aequatione inter s et x, habebitur quoque tempus saltem per quadraturas. Eae igitur curuae ad hoc sunt commodissimae, pro quibus datur aequatio inter s et x.

Corollarium 2.

970. Quia a pro lubitu potest accipi, utpote quantitas integratione adiecta, eius determinatione essici potest, ut vel celeritas in dato curuae loco sit data, vel potentia sollicitans.

Corollarium 3.

971. Si curua AM versus axem AP est concaua, tum est ddy negatiuum, his igitur casibus potentia corpus ad axem AP trahet. At si curua erit conuexa versus AP, quia tum ddy fit affirmatiuum, potentia P fit negatiua, seu corpus ab axe AP repelletur.

Exemplum 1.

972. Sit curua AM parabola axem habens normaliter insistentem rectae AP, qualis in vacuo a corpore ex A oblique proiecto describitur, erit $by = fx - x^2$, ideoque $dy = \frac{fdx}{b} - \frac{2xdx}{b}$ atque $ddy = -\frac{2dx^2}{b}$. His substitutis erit potentia sollicitans $P = \frac{4a}{b e^{\frac{s}{c}}}$. Ex quo intelligitur quo diutius motus con-

continuetur, eo magis decrescere potentiam P. Facto autem c infinite magno id quod fit in vacuo erit $e^{\frac{s}{c}} = 1$ atque potentia $P = \frac{4a}{b}$ et idcirco constans.

Exemplum 2.

973. Sit curua AM talis vt eius aequatio sit $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3$, erit $dy = \alpha dx - 2\beta x dx - 3\gamma x^2 dx$ et $d^2y = -2\beta dx^2 - 6\gamma x dx^2$. Hinc erit $P = \frac{4\beta a + 12\gamma a x}{e^{\frac{s}{c}}}$. In puncto A est $dy = \alpha dx$, et $\frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \alpha^2$. Altitudo igitur debita celeritati initiali in A est $a(1+\alpha^2)$ quae si dicatur b erit $a = \frac{b}{1+\alpha^2}$ et α est tangens anguli sub quo corpus ex A proiicitur. Deinde ex ipsius dy valore reperitur $ds = dx\sqrt{(1 + \alpha^2 - 4\alpha\beta x + 4\beta^2 x^2 - 6\alpha\gamma x^2 + 12\beta\gamma x^3 + 9\gamma^2 x^4)} = dx \sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{2\alpha\beta x dx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$ etc. Neglectis igitur reliquis terminis foret $s = x\sqrt{(1+\alpha^2)} - \frac{\alpha\beta x^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, atque $e^{\frac{s}{c}} = 1 + \frac{x\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c} - \frac{\alpha\beta x^2}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{x^2(1+\alpha^2)}{2c^2}$ etc. qui termini quoque reiici possunt si c fuerit valde magnum. Quare quo P fiat quam proxime constans nempe $= g$, debebit esse $4\beta a = g$, et $\frac{3\gamma}{\beta} = \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}}{c}$. Atque si assumta fuisset haec aequatio $y = \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \delta x^4$, prodiisset $\frac{6\delta}{\beta} = \frac{(1+\alpha^2)}{2c^2} - \frac{\alpha\beta}{c\sqrt{(1+\alpha^2)}}$. Erit ergo

$$\beta = \frac{g(1+\alpha^2)}{4b}, \quad \gamma = \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{g(1+\alpha^2)^2}{48bc^2}$$

$-\frac{\alpha g^2 (1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{96 b^2 c}$. Haec igitur curua quarti ordinis erit quam proxime proiectoria in medio valde raro vniformi, quod resistit in duplicata celeritatum ratione, et potentia vniformi g deorsum tendente.

Corollarium 4.

974. Quia aeris resistentia est quadratis celeritatum proportionalis, si in aere valde grauis globus atque magnus ingenti vi proiiciatur, tum b et c erunt quantitates maximae. Quare pro proiectoria huius corporis accipi poterit haec aequatio $y = \alpha x - \frac{g(1+\alpha^2)}{4b} x^2 - \frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{12bc} x^3$, quae curua a vera proiectoria quam minime differet.

Corollarium 5.

975. Sit AMDB haec proiectoria; in qua vt inueniatur punctum B, quo corpus proiectum incidit in horizontalem AB pono $y = 0$, eritque Tabula XII. Fig. 5.

$$x^2 = -\frac{3cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ hincque } x = -$$

$$\frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}} + \sqrt{\left(\frac{9c^2}{4(1+\alpha^2)} + \frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}. \quad \text{Erit}$$

ita-

itaque $AB=\sqrt{\left(\frac{9c^2}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}+\frac{12\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}-\frac{3c}{2\sqrt{(1+\alpha^2)}}$. Innotescit igitur ex hac aequatione longitudo iactus ex data celeritate initiali, et inclinatione.

Corollarium 6.

976. Punctum iactus summum D reperietur faciendo $dy=o$. Fiet autem $o=\alpha-\frac{g(1+\alpha^2)}{2c}x-\frac{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}{4bc}x^2$ seu $x^2=-\frac{2cx}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}+\frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$

Atque ex hac aequatione $AC=\sqrt{\left(\frac{c^2}{1+\alpha^2}+\frac{4\alpha bc}{g(1+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}\right)}-\frac{c}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$.

Corollarium 7.

977. Iactus longissimus, qui eadem celeritate initiali $\sqrt{b}$ producitur, prodibit si anguli inclinationis tangens α ex ista aequatione determinatur $3\alpha\sqrt{(1+\alpha^2)}-\frac{8b(1+\alpha^2)}{g}+\frac{24\alpha^2 b}{g}=\alpha\sqrt{(9c^2(1+\alpha^2)+\frac{48\alpha bc\sqrt{(1+\alpha^2)}}{g})}$ seu hac $4b(1-2\alpha^2)^2-3\alpha gc(1-2\alpha^2)\sqrt{(1+\alpha^2)}=3\alpha^3 gc\sqrt{(1+\alpha^2)}$ seu ista simpliciore $4b(1-2\alpha^2)^2=3\alpha gc(1-\alpha^2)\sqrt{(1+\alpha^2)}$.

Co-

LIBERO … CURVIL.
978. … horizontali A … to $=1$ erit … aequatione v … pro iactu lon … peritur quan …
979. … mum produc … rectus, qui i … rectus. At … tum $5b$, pa …
980. … tur celeritat … Quamobrem … ctoriae natu … ascendit er …
981. … accipiantur …
Co-

Corollarium 8.

978. Si sinus anguli quem curua in A cum horizontali AC constituit, sit $=\varepsilon$, posito sinu toto $=1$ erit $9\varepsilon^4-6\varepsilon^2+1=\frac{3\varepsilon c}{4b}(1-2\varepsilon^2)$. Ex qua aequatione valor ipsius ε erutus, dabit directionem pro iactu longissimo. Ex hac autem aequatione reperitur quam proxime $\varepsilon=\sqrt{\frac{5b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$.

Corollarium 9.

979. Angulus igitur, qui iactum longissimum producit, aliquantulum est minor quam semi rectus, qui in vacuo satis facit. Nam si esset $\varepsilon=\sqrt{\frac{6b+gc\sqrt{2}}{12b+2gc\sqrt{2}}}$ foret $\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{2}}$, ideoque angulus semirectus. At cum hic in numeratore habeamus tantum $5b$, parumper erit minor.

Corollarium 10.

980. Si corpus in A horizontaliter proiiciatur celeritate $\sqrt{a}$, fiet $\alpha=o$, atque y negatiua. Quamobrem positis $AP=x$ et $PM=y$, istius proiectoriae natura hac exprimetur aequatione $y=\frac{gx^2}{4b}+\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$. Pro curua autem AN in qua corpus ascendit erit $y=\frac{gx^2}{4b}-\frac{gx^3}{12bc}+\frac{gx^4}{48bc^2}$.

Corollarium 11.

981. Si adhuc plures termini quam quatuor accipiantur prodiret aequatio pro curua AM haec

$y=$

$y = \frac{gx^2}{4b} + \frac{gx^3}{12bc} + \frac{gx^4}{48bc^2} + \frac{gx^5}{240bc^3} +$ etc. qui termini cum seriem summabilem constituant, quam minime a vero aberrabitur, si y ponatur aequalis summae huius seriei. Erit autem $2by = c^2g(e^{\frac{x}{c}} - 1) - cgx$. Pro arcu vero ascensus AN erit $2by = cgx - c^2g(1 - e^{-\frac{x}{c}})$.

Corollarium 12.

982. Tempus quo arcus AM percurritur est $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}}$, cum sit $g = \frac{2vddy}{ds^2}$. Est vero $2bdy = cge^{\frac{x}{c}}dx - cgex$ et $2bddy = ge^{\frac{x}{c}}dx^2$. Prodibit igitur $\int \frac{\sqrt{2ddy}}{\sqrt{g}} = \int \frac{e^{\frac{x}{2c}}dx}{\sqrt{b}} = \frac{2c}{\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$. Atque si b et c in scrupulis pedis rhenani exprimuntur erit tempus per $AM = \frac{c}{125\sqrt{b}}(e^{\frac{x}{2c}} - 1)$ minutis secundis (222).

Scholion.

983. Hac igitur ratione vero proxime determinauimus proiectoriam in aere a corporibus proiectis descriptam, quae non difficulter loco parabolae, quae vulgo adhiberi solet, potest substitui. Hanc quidem eandem aequationem deducere potuissemus ex vera aequatione $d\cdot ddy = cd^3y$ (875), harum proiectarum supra inuenta. Sed cum ibi haec

LIBER VCTI CURVIL.

haec redu +etc. qui ter-
mus, pra nstituant, quam
aequationi ponatur aequalis
menter de m $2by = c^2g(e^{\frac{x}{c}}$
curuae cun us AN erit $2by$
pothesibus
sed cum a
beant iis in
l percurritur est
Est vero $2bdy =$
Prodibit igitur
684.
cis M, qu Atque si b et
MP tenden
ua AM et untur erit tem-
moueri poss minutis secun-

Positi
arcus AM
$= v$, quae proxime de-
tia corpus a corporibus
= R. His culter loco pa-
P = $-\frac{2vd}{ds}$, potest substi-
ex aequati nem deducere
erit R = $y = cd^3y$ (875),
duplicata c Sed cum ibi
haec

haec reductio esset omissa, hic eam afferre maluimus, praecipue quod hoc loco clarius appareat aequationis assumtae terminos posteriores vehementer decrescere. Denique simili quoque modo curuae cum proiectoriis in aliis medii resistentis hypothesibus proxime conuenientes possunt inueniri; sed cum aliae hypotheses in mundo locum non habeant iis inueniendis hic non immorabimur.

PROPOSITIO 118.

Problema.

684. *Inuenire tam resistentiam in singulis locis M, quam potentiam absolutam deorsum secundum MP tendentem, quae faciant vt corpus in data curua AM et data cum celeritate in singulis punctis M moueri possit.* Tabula XII. Fig. 3.

Solutio.

Positis vt ante $AP = x$, $PM = y$, elemento arcus $AM = ds$ et altitudine celeritati in M debita $= v$, quae igitur omnia dantur. Deinde sit potentia corpus in M deorsum trahens $= P$ et resistentia $= R$. His positis statim reperitur P ex aequatione $P = -\frac{2vddy}{ds^2}$ (871). At resistentia R inuenietur ex aequatione $dv = \frac{2vdyddy}{ds^2} - Rds$ (cit.). Quare erit $R = \frac{2vdyddy}{ds^3} - \frac{dv}{ds}$. Si resistentiae lex ponatur duplicata celeritatum ratio, eiusque exponens $= q$;

 erit

erit $R = \frac{v}{q}$, ex quo prodibit $q = \frac{v\,ds^3}{2v\,dy\,ddy - dv\,ds^3}$ sumto dx pro constante. Q. E. I.

Corollarium 1.

985. Quia dx est constans erit $dyddy = dsdds$. Hanc ob rem erit $R = \frac{2v\,dds}{ds^2} - \frac{dv}{ds}$, seu $R = ds\,d.-\frac{v}{ds^2}$. Atque hinc erit $q = \frac{v\,ds^2}{2v\,dds - dv\,ds}$ seu $q = \frac{v}{ds\,d.-\frac{v}{ds^2}}$.

Corollarium 2.

986. Si corpus debet motu uniformi per curuam AM ferri ita vt sit $v = b$, proueniet $P = -\frac{2b\,ddy}{ds^2}$ et $R = \frac{2b\,dy\,ddy}{ds^3} = \frac{2b\,dds}{ds^2}$, atque $q = \frac{ds^2}{2\,dds}$.

Corollarium 3.

987. In motu igitur vniformi, dum corpus in curua AM ascendit, resistentia R semper est negatiua seu motum corporis accelerat. At quando corpus iterum descendit, medium reuera resistet.

Corollarium 4.

988. Posito radio osculi in $M = r$, quia est $r = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$ erit $dd\,y = -\frac{ds^3}{r\,dx}$. Hanc ob rem habebitur $P = \frac{2v\,ds}{r\,dx}$ et $R = -\frac{2v\,dy}{r\,dx} - \frac{dv}{ds}$, atque $q = -\frac{rv\,dx\,ds}{2v\,dy\,ds + r\,dx\,dv}$.

Co-

Corollarium 5.

989. Posito iterum $v = b$ et $dv = o$, erit $P = \frac{2b\,ds}{r\,dx}$ et $R = -\frac{2b\,dy}{r\,dx}$, atque $q = -\frac{r\,dx}{2\,dy}$. In supremo igitur puncto quo sit $dy = o$ et $ds = dy$ erit $P = \frac{2b}{r}$ atque resistentia ibi euanescit, nisi forte curuatura ibi sit infinite magna seu $r = o$.

Exemplum.

990. Sit curua AM circulus cuius centrum in C, qui motu aequabili seu celeritate $\sqrt{b}$ debeat describi. Posito eius radio $AC = a$, erit $dy = \frac{dx(a-x)}{y}$, $ds = \frac{a\,dx}{y}$ et $r = a$. Ex quibus inuenitur potentia absoluta deorsum tendens $P = \frac{2b}{y}$, seu erit reciproce vt distantia PM. Resistentia vero erit $= -\frac{2b(a-x)}{ay}$. Dum igitur corpus ascendit resistentia erit negatiua atque reciproce proportionalis tangenti arcus AM. Ac si resistentia sit quadratis celeritatum proportionalis, erit eius exponens $q = -\frac{ay}{2(a-x)} = -\frac{AC.PM}{2PC}$. Est itaque q negatiua atque aequalis dimidiae tangenti arcus AM. Quando autem corpus versus horizontem AC accedit, fiet tum resistentia R tum q affirmatiua, seu medium reuera resistet.

PROPOSITIO 119.
Problema.

991. *Si medium sit uniforme atque resistat in quacunque multiplicata celeritatum ratione: detur-* Tabula XIII Fig. 1.

que

que praeterea motus corporis progressiuus secundum horizontalem AP; *inuenire potentiam deorsum tendentem et curuam quam corpus describet.*

Solutio.

Posita CP$=x$, PM$=y$, arcu AM$=s$, sit celeritas horizontalis corporis, dum est in M, debita altitudini u, erit verae celeritatis in M altitudo debita $=\frac{uds^2}{dx^2}=v$. Sit porro exponens medii resistentis $=c$ et lex ratio $2m$ *plicata* celeritatis, erit resistentia $R=\frac{v^m}{c^m}=\frac{u^m ds^{2m}}{c^m dx^{2m}}$. His positis erit $P=\frac{2vddy}{ds^2}=\frac{2uddy}{dx^2}$ (871), pono enim ddy loco $-ddy$, quia in nostro casu y deorsum cadit. Deinde erit $dv=\frac{2vdyddy}{ds^2}-R\,ds$ (cit.). At vero est $dv=\frac{duds^2}{dx^2}+\frac{2udsdds}{dx^2}$. Hinc ergo ob $dsdds=dyddy$ habebitur $\frac{duds}{dx^2}=-\frac{u^m ds^{2m+1}}{c^m dx^{2m}}$ seu $c^m dx^{2m-2}du+u^m ds^{2m-1}=0$. Datur autem u in x; et hanc ob rem ds ex hac aequatione per x tantum poterit determinari; erit scilicet $ds=\frac{c^{\frac{m}{2m-1}}dx^{\frac{2m-2}{2m-1}}(-du)^{\frac{1}{2m-1}}}{u^{\frac{m}{2m-1}}}$. Vnde inuenire licet aequationem pro curua inuenta. Hac vero inuenta simul innotescit P ex aequatione $P=\frac{2uddy}{dx^2}$. Q. E. I.

Co-

LIB. CTI CURVIL.

Corollarium 1.

992. Motus igitur horizontalis non potest esse vniformis, foret enim ob $du=0$, etiam $ds=0$; nisi in vacuo quo $c=\infty$, vbi semper et necessario est aequabilis. Multo minus quoque in medio resistente motus horizontalis poterit esse acceleratus, tum enim ds vel negatiuum vel imaginarium obtineret valorem, quod vtrumque absurdum. Motus ergo horizontalis debebit esse retardatus, quo fiat du negatiuum.

Corollarium 2.

993. Si resistentia fuerit ipsis celeritatibus proportionalis, fiet $m=\frac{1}{2}$ et aequatio pro curua abit in $du\sqrt{c}+dx\sqrt{u}=0$. Quae autem, quia non continet s vel y, ad curuam pertinere non potest. Haec autem aequatio ipsum motum horizontalem determinat. Id quod indicio est in hac resistentiae hypothesi, non quemuis motum horizontalem pro lubitu accipi posse, sed necessario eum esse accipiendum, qui hac aequatione determinatur.

Corollarium 3.

994. Iste autem motus horizontalis congruit cum motu corporis horizontali in AP in eodem medio resistente, sed a nulla potentia sollicitatum. Ex quo cognoscitur, quaecunque fuerit potentia corpus sollicitans, modo eius directio vbique de-

or-

orsum tendat, in medio resistente in simplici celeritatum rationem motum horizontalem perpetuo esse eundem. Qua in re motus in hac resistentiae hypothesi similis est motui in vacuo, in quo motus horizontalis semper est aequabilis, quantum cunque potentia deorsum tendens sit variabilis.

Corollarium 4.

995. Assumto igitur hoc motus horizontalis valore, altera aequatio $P = \frac{2uddy}{dx^2}$ curuam descriptam determinabit, in qua pro P vero quamcunque quantitatem assumere licebit. In hac igitur resistentiae hypothesi, hoc problema generaliter est solutum: vt inueniatur curua, quam corpus vtcunque deorsum sollicitatum describit.

Corollarium 5.

996. Cum autem sit $-\frac{du\sqrt{c}}{\sqrt{u}} = dx$, erit $2\sqrt{bc} - 2\sqrt{cu} = x$, posita celeritate initiali in $A = \sqrt{b}$. Fiet ergo $2\sqrt{cu} = 2\sqrt{bc} - x$ et $u = \frac{(2\sqrt{bc}-x)^2}{4c}$. Pro curua ergo descripta haec habebitur aequatio $2cP\,dx^2 = ddy(2\sqrt{bc}-x)^2$.

Corollarium 6.

997. Hae igitur omnes curuae asymtoton habebunt verticalem in distantia $2\sqrt{bc}$ a vertice A. Namque x maius esse nequit quam $2\sqrt{bc}$ et cum cor-

LI CTI CURVIL.
corpu simplici celeri- progr perpetuo esse non vl sistentiae hypo- quo motus ho- quantum cunque ilis.
fibus horiz thesi motus horizontalis curuam describ- ero quamcunque c igitur resisten- raliter est solu- corpus vtcunque
lerita tegra bita, thesi feren um i $= dx$, erit $2\sqrt{}$ iali in $A = \sqrt{b}$. Pro r aequatio $2cP$
erit uae asymtoton bc a vertice A. $2\sqrt{bc}$ et cum cor-

corpus horizontaliter motum vltra hunc terminum progredi nequeat, etiam corpus in curua latum non vltra pertingere poterit.

Corollarium 7.

998. Si in aliis quoque resistentiae hypothesibus motus horizontalis in curua AM cum motu horizontali in recta AP in eadem resistentiae hypothesi congruens accipiatur, ita vt ponatur $du = -\frac{u^m\,dx}{c^m}$; prodibit pro curua AM haec aequatio $ds = dx$ et $P = 0$. Illa igitur congruentia in aliis resistentiae hypothesibus nequidem locum habet.

Corollarium 8.

999. Sit igitur resistentia vt quadratum celeritatis seu $m = 1$. Quare erit $ds = -\frac{c\,du}{u}$, et integrando posita b altitudine celeritati in A debita, $s = c\,l\,\frac{b}{u}$. In hac igitur resistentiae hypothesi erit arcus A M diuisus per $2c$ aequalis differentiae logarithmorum celeritatum horizontalium in A et M.

Corollarium 9.

1000. In hac ergo resistentiae hypothesi erit $u = e^{-\frac{s}{c}}b$. Ex quo prodibit $P = \frac{2b\,ddy}{e^{\frac{s}{c}}\,dx^2}$.

 Seu