mentum verae curuae, quam corpus describit, demittatur in hoc productum ex C perpendiculum $C\Theta$, eritque $M\mu : M\nu = CM : C\Theta$, vnde fit $C\Theta = \frac{wp\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Ex hoc vero perpendiculo cognoscitur vera corporis celeritas, erit enim $v = \frac{a^2cv}{w^2up^2}$ (589) ideoque $u = \frac{a^2c}{w^2p^2}$ et $v = \frac{a^2c(q^2+w^2p^2)}{w^2p^2y^2}$. His loco u et v positis valoribus, erit $C\Theta = \frac{wpy}{\sqrt{(q^2+w^2p^2)}}$, quam breuitatis gratia vocemus π. Ex hac autem π cognita innotescit ipsa vis centripeta P, quae facit vt corpus in hac data orbita, hocque modo mobili moueatur. Namque erit $P = \frac{2a^2cd\pi}{\pi^3dy}$ (592). At ob $\pi^2 = \frac{w^2p^2y^2}{q^2+w^2p^2}$, erit $\frac{1}{\pi^2} = \frac{q^2}{w^2p^2y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{w^2y^2} + \frac{1}{w^2p^2}$, ideoque $-\frac{2d\pi}{\pi^3} = -\frac{2dy}{y^3} + \frac{2dw}{w^3y^2} + \frac{2dy}{w^2y^3} - \frac{2dw}{w^3p^2} - \frac{2dp}{w^2p^3}$ seu $\frac{d\pi}{\pi^3} = \frac{dy(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{q^2dw}{w^3y^2q^2} + \frac{dp}{w^2p^3}$. Consequenter habebitur $P = \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3} + \frac{2a^2cq^2dw}{w^3y^2p^2dy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

730. Posito radio $=1$, est $\frac{m\mu}{CM} = \frac{(w-1)pdy}{qy}$ elementum anguli (A)CA quem orbita confecit dum corpus arcum (A)(M) percurrit. Hanc ob rem erit ang. (A)CA $= \int \frac{(w-1)pdy}{qy}$. Estque $w-1:1$ vt celeritas angularis orbitae, ad celeritatem angularem corporis, dum est in M, in ipsa orbita.

Corollarium 2.

731. Celeritas corporis in orbita, quae est vt $\sqrt{u}$, reciproce proportionalis est ipsi wp. Ergo, nisi w sit constans, fieri non potest, vt corpus hoc mo-

modo in orbita quiescente moueatur, attractum ad centrum C.

Corollarium 3.

732. Posito igitur w constante, i. e. ratione motus angularis corporis ad motum angularem orbitae perpetuo eadem, erit etiam celeritas corporis in orbita $\sqrt{u}$ reciproce proportionalis perpendiculo C(T) in tangentem. Atque vis centripeta ad C tendens, atque efficiens vt corpus hac ratione in orbita quiescente moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy}$. Sit enim celeritas respectu orbitae quam corpus in (A) habet, debita altitudini γ, erit $\sqrt{\gamma} : \sqrt{c} = 1 : w$ (p. hyp.) atque $c = w^2\gamma$, ex quo vis centripeta ad C tendens, faciensque vt corpus in orbita quiescente moueatur, erit $= \frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, vt etiam ex supra traditis inuenitur (592).

Corollarium 4.

733. Angulus igitur (A)CA in hac hypothesi, qua w ponitur constans, qui ab orbita absoluitur, dum corpus arcum (A)(M) percurrit, erit $= (w-1)\int \frac{pdy}{qy} = (w-1)$ ang. (A)C(M). Ergo vna tota corporis in orbita reuolutione, ipsa orbita circa C gyrabitur angulo $(w-1)$ 360 graduum.

Corollarium 5.

734. Vis autem, quae efficit, vt corpus in hac orbita mobili proportionaliter motui angulari in ipsa orbita, moueatur erit $= \frac{2a^2cdp}{w^2p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2y^3}$ seu

seu $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy}+\frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Quare differentia inter vim centripetam pro orbita immobili et vim pro orbita mobili reciproce proportionalis est cubo distantiae corporis a centro virium C.

Corollarium 6.

735. Si sit $w=1$, erit $w-1=0$, motusque orbitae nullus, quo casu etiam vis centripeta fit $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3 dy}$ euanescente altero termino. Idem euenit si $w=-1$ seu $w-1=-2$, quo casu orbita in antecedentia mouetur duplo velocius, quam ipsum corpus in orbita ingreditur. At vera curua, quae hoc motu a corpore describitur, non differt ab orbita, nisi quod sit inuersa.

Corollarium 7.

736. Si $w>1$ orbita in consequentia mouetur cum motus, quo sit maior, eo maior etiam erit vis centripeta. At si $w<1$, orbita in antecedentia tendit, et vis centripeta fit minor, ob w^2-1 negatiuum.

Corollarium 8.

737. Si $w=0$ fit etiam $c=0$, corpusque in recta linea mouebitur, quia motus angularis orbitae hoc casu aequalis fit et contrarius motui angulari corporis in orbita.

Corollarium 9.

738. Si w est numerus negatiuus, nempe $=-n$, corpus in eadem mouebitur curua ac si esset $w=$ $+n$, hoc tantum discrimine, quod corpus in contrarias plagas progrediatur. Et hanc ob rem vis centripeta eundem retinet valorem, siue w affirmatiue siue negatiue accipiatur. Idem etiam vniuersaliter, si w est quantitas variabilis, obtinet.

Exemplum.

739 Sit curua (A)(M) B) ellipsis, et centrum virium C eius alterutær focus. Ponatur eius latus rectum $=$L et axis transuersus (A)(B)$=$A; erit $a=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}$, et $4pp=\frac{ALy}{A-y}$. Sit praeterea w constans, erit vis, quae facit vt corpus in hac ellipsi mobili moueatur $=\frac{4c^2\gamma}{Ly^2}+\frac{2c^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Angulus vero (A)CA, quem orbita absoluit, dum corpus in ea arcum (A)(M) percurrit, erit $=(w-1)$(A)C(M) (733). Aequatio vero pro ipsa curua, quam corpus describit, cuius elementum est Mμ, habebitur inuenienda aequatione inter CM$=r$, et C$\Theta=\pi$. Est autem $pp=\frac{ALy}{4A-4y}$, et $qq=\frac{4Ay^2-4y^3-ALy}{4A-4y}$, qui valores in aequatione $\pi=\frac{wpy}{\sqrt{(qq+w^2p^2)}}$ substituti dabunt aequationem pro ipsa curua descripta hanc $\pi\pi=\frac{w^2ALy^2}{4Ay-4y^2+(w^2-1)Ay}$.

Scholion I.

740. Curuae ipsae, quas corpora a huiusmodi viribus centripetis sollicitata describunt, difficillime alias cognoscerentur, earumque forma hac consideratione non adhibita nequaquam posset de-

determinari. Maximam igitur habent vtilitatem huiusmodi virium centripetarum inuestigationes pro curuis ex datis vtcunque generatis, quo reciproce ex viribus centripetis datis ipsae curuae earumque proprietates innotescant. Occurrunt enim in motibus corporum coelestium tam complexae virium ea sollicitantium expressiones, vt omnino eorum orbitae determinari nequeant, nisi forte illae vires comprehendantur in tali quodam casu, de quo a posteriori vis centripeta est inuenta.

Scholion 2.

741. Si corpus in huiusmodi orbita mobili moueri deprehenditur, motus eius et distantia quouis tempore a centro C poterit determinari. Atque quoties corpus in orbita in puncta (A) et (B) peruenit, tum in minima vel maxima a C erit distantia. Quare cum motus gyratorius lineae (A)(B), quae linea absidum vocatur, sit datus; definiri poterit, quando corporis a centro C distantia sit maxima vel minima. *Neutonus* hanc rem pertractauit in princ. Libro 1. tota Sect. IX. eaque theoria vtitur ad motum lineae absidum orbitae lunaris determinandum. Sed minus accurate haec consideratio ad lunam accommodari potest, cum vis lunam sollicitans non ad punctum quoddam fixum C, vt hic posuimus, sed perpetuo variabile tendat. Operam igitur dabimus, vt, postquam reliqua hac pertinentia explicauerimus, alias propositiones magis idoneas afferamus, quae ad motum lunae transferri queant.

PRO-

PUNCT... E MOTU
PR... habent vtilitatem ... n inuestigationes ... eratis, quo reciproce ... ipsae curuae earumque ... Occurrunt enim ... tam complexae ... ones, vt omnino ... eant, nisi forte illae ... quodam casu, de ... inuenta.
742. C... que centripeta V... curuam, quam ... tante y distanti... sollicitatum desc...
Agente vi ... leritas, qua in ... um C(A) norm... et ponatur C(A ... (M)(B).orbita, ... in (A) secundum ... te debita altitu... sitione manifes... in eadem orbit... data ratione a... mobili, moue... angularis orbit... ipsa orbita d... (732), atque ... gentem orbita... spicuum est, ... pus in orbita ... $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, ide... ergo ob datam ... nimus (p. hyp.
...odi orbita mobili ... s et distantia quo... eterminari. Atque ... A) et (B) peruenit, ... it distantia. Quare ...)(B), quae linea ... ri poterit, quan... t maxima vel mi... ctauit in princ. Li... ria vtitur ad mo... s determinandum. ... ratio ad lunam ac... m sollicitans non ... vt hic posuimus, ... Operam igitur da... c pertinentia ex... magis idoneas af... ansferri queant.
PRO-

PROPOSITIO 90.

Problema.

742. *Cognita curua, quam corpus vi quacunque centripeta* V *sollicitatum describit, determinare curuam, quam corpus a vi centripeta* $V+\frac{c}{y^3}$ (*denotante* y *distantiam* MC *corporis a centro virium* C), *sollicitatum describet.*

Solutio.

Agente vi centripeta $V+\frac{c}{y^3}$, sit corporis celeritas, qua in (A) secundum directionem ad radium C(A) normalem proiicitur, debita altitudini c, et ponatur $C(A)=a$. Vrgente autem vi V, sit (A)(M)(B) orbita, in qua corpus mouebitur proiectum in (A) secundum eandem directionem, sed celeritate debita altitudini γ. Iam ex praecedente propositione manifestum est, vi $V+\frac{c}{y^3}$ effici, vt corpus in eadem orbita (A)(M)(B), sed circa centrum C in data ratione ad motum angularem in ipsa orbita mobili, moueatur. Sit igitur $w-1$ ad 1 vt motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in ipsa orbita dum est in M, et sit etiam $c=w^2\gamma$ (732), atque vocetur perpendiculum ex C in tangentem orbitae in M demissum $CT=p$. Hinc perspicuum est, vim centripetam facientem, vt corpus in orbita immobili (A)(M)(B) moueatur, fore $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, ideoque $V=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}$, quam aequationem ergo ob datam curuam (A)(M)(B) construibilem ponimus (*p. hyp.*). Vis autem efficiens, vt corpus

in

in eadem orbita descripto modo mobili moueatur, erit $=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}+\frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$ (734). Quamobrem habebitur $V+\frac{C}{y^3}=\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}+\frac{2a^2\gamma(w^2-1)}{y^3}$. Ex quo prodit $C=2a^2\gamma(w^2-1)=\frac{2a^2c(w^2-1)}{w^2}$ atque $w^2=\frac{2a^2c}{2a^2c-C}$. Erit ergo $w-1:1=\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}:1$ atque $\gamma=\frac{2a^2c-C}{2a^2}$. Inuenta igitur curua, quam corpus in (A) celeritate altitudinis $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum describit sollicitatum a vi V, vis $V+\frac{C}{y^3}$ efficiet, vt corpus in (A) celeritate $\sqrt{c}$ proiectum moueatur in eadem orbita mobili ita, vt sit motus angularis orbitae ad motum angularem corporis in hac orbita, quemadmodum est $\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$ ad 1. Motus autem corporis in ipsa orbita idem erit, quem habet in orbita immobili a vi tantum V sollicitatum et in (A) celeritate debita altitudini $\frac{2a^2c-C}{2a^2}$ proiectum, qui motus per hypothesin est cognitus. Q. E. I.

Corollarium 1.

743. Dum igitur corpus in orbita ex (A) ad (B) peruenit, seu circa centrum C angulo 180 gr. reuoluitur, ipsa orbita interea angulo $\frac{\sqrt{2a^2c}-\sqrt{(2a^2c-C)}}{\sqrt{(2a^2c-C)}}$. 180 grad. circa C gyrabitur.

Corollarium 2.

764. Si igitur recta (A)(B) est linea absidum, erit punctum (A) ima, punctum (B) vero summa absis, vti in astronomia vocantur; corpus igitur ab abside ima ad summam perueniet absoluto motu angulari circa C gradus $\frac{180}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$.

Co-

Corollarium 3.

745. Tempus, quo corpus in orbita mobili ex (A) in M peruenit, aequatur tempori quo in quiescente ex (A) in (M) pertingit. Angulus vero (A)CM se habet ad ang. (A)C(M) vt w ad 1 i. e. vt $\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{C}{2a^2c})}}$ ad 1.

Exemplum.

746. Sit vis V reciproce proportionalis quadrato distantiae a centro seu $V=\frac{ff}{yy}$, erit curua (A)(M)(B) ellipsis, in cuius foco positum est centrum virium C. Sit eius axis transuersus (A)(B) $=A$, et latus rectum $=L$, erit $a=\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}=(A)C$ et $(B)C=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-AL)}$. Ob $4pp=\frac{ALy}{A-y}$ erit $\frac{2a^2\gamma dp}{p^3dy}=\frac{4a^2\gamma}{Ly^2}=\frac{ff}{yy}$. Hinc fit $4a^2\gamma=Lff=4a^2c-2C$, vnde $L=\frac{4a^2c-2C}{ff}$. Atque $c=\frac{Lff+2C}{4a^2}$. Quae est altitudo debita celeritati corporis in (A) pro orbita mobili ex vi centripeta $\frac{ff}{y^2}+\frac{C}{y^3}$. Motus vero angularis orbitae erit ad motum angularem corporis in orbita vt $\frac{\sqrt{(\frac{1}{2}Lff+C)}-\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}$ ad 1. Atque corpus ab abside ima ad summam perueniet, postquam motu angulari ang. $\frac{180\sqrt{(\frac{1}{2}Lff+C)}}{\sqrt{\frac{1}{2}Lff}}=180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. absoluerit.

PRO-

PROPOSITIO 91.
Problema.

747. *Si figura, quam corpus a quacunque vi centripeta describit, non multum differt a circulo, determinare motum absidum.*

Solutio.

Comparandus est huiusmodi motus cum motu corporis in ellipsi mobili parum excentrica cuius focus alteruter positus sit in centro virium. In hac igitur orbita quiescente corpus mouebitur sollicitatum a vi centripeta quadratis distantiarum reciproce proportionali. In eadem vero orbita mobili corpus mouebitur, si fuerit vis centripeta $= \frac{ffy+C}{y^3}$ (746). Manentibus praecedentibus denominationibus ponatur $y = a+z$, erit z respectu ipsius a valde paruum, quia curua a corpore descripta circulo proxima ponitur. Quare vis centripeta illa erit $= \frac{aff+C+ffz}{y^3}$, et $2a$ quam proxime erit aequalis ipsi lateri recto L. Iam ponatur vis centripeta corpus sollicitans $= \frac{P}{y^3}$ in qua P sit functio quaecunque ipsius y. Ponatur in P loco y eius valor $a+z$ abeatque P reiectis terminis, in quibus z plus vna habet dimensionem, ob z tam paruum in $E+Fz$. Hac ergo formula cum $aff+C+ffz$ comparata habebitur $F = ff$, seu $f = \sqrt{F}$ et $aF+C = E$, seu $C = E-aF$. His substitutis corpus ab hac vi centripeta $\frac{P}{y^3}$ sollicitatum ab abside ima ad summam perueniet, absoluto

PU. MOTU
to motu a... 91.
Seu posito ...
co C erit ...
dem orbit... a quacunque vi ... differt a circulo,
748. ...
pus circa ...
motu angu...
tus enim ...
motui an...
$= \frac{ff}{yy} + \frac{C}{y^3}$
...motus cum mo- ...excentrica cuius ...irium. In hac ...ebitur sollicita- ...iarum recipro- ...orbita mobili ...tripeta $= \frac{ffy+C}{y^3}$ ...s denominatio- ...ctu ipsius a val- ...escripta circulo ...ipeta illa erit ...erit aequalis ip- ...centripeta cor- ...tio quaecunque ...alor $a+z$ abe- ...plus vna habet ...$E+Fz$. Hac ...arata habebitur ...seu $C = E-aF$. ...ipeta $\frac{P}{y^3}$ sollici- ...eniet, absolu- to
749. ...
P est ipsi...
cente a el...
$= dE$, id...
ad summa...
750 ...
P ipsius y ...
Quamobr...
abside im...
$180\sqrt{\frac{Pdy}{ydP}}$ ...
stet y, p...
y discre...

to motu angulari angulo $180\sqrt{(1+\frac{2C}{Lff})}$ grad. (746). Seu posito $2a$ loco L, et F loco ff atque $E-aF$ loco C erit iste angulus graduum $180\sqrt{\frac{E}{aF}}$. Si quidem orbita non multum a circulari discrepat. Q. E. I.

Corollarium 1.

748. Linea vero absidum (A)(B), dum corpus circa C reuoluitur angulo 360 gr. mouebitur motu angulari per angulum $\frac{\sqrt{E}-\sqrt{aF}}{\sqrt{E}}$ 360 grad. Motus enim angularis orbitae proportionalis ponitur motui angulari corporis, ob vim centripetam $= \frac{ff}{yy} + \frac{C}{y^3}$ (734).

Corollarium 2.

749. Quia E est functio talis ipsius a, qualis P est ipsius y, erit Fz incrementum ipsius E crescente a elemento z. Quare posito $z = da$ erit $Fda = dE$, ideoque, angulus, quo corpus ab abside ima ad summam peruenit est $= 180\sqrt{\frac{Eda}{adE}}$ grad.

Corollarium 3.

750. Quia E talis est functio ipsius a, qualis P ipsius y, poterit in $\frac{Eda}{adE}$ poni y loco a et P loco E. Quamobrem existente vi centripeta $\frac{P}{y^3}$, corpus ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo $180\sqrt{\frac{Pdy}{ydP}}$ graduum. Atque in hac expressione si restet y, poterit eius loco a scribi, quippe parum ab y discrepans.

Co-

Corollarium 4.

757. Si fuerit $\frac{da}{a} > \frac{dE}{E}$ seu $\frac{dy}{y} > \frac{dP}{P}$, ellipsis motu suo verum corporis motum exprimens mouebitur in consequentia. Sin vero $\frac{dy}{y} < \frac{dP}{P}$ linea absidum in antecedentia mouebitur. At si $\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$ seu $P = ay$, quo casu vis centripeta reciproce proportionalis est quadratis distantiarum, linea absidum quiescet, seu corpus, postquam motu angulari angulum 180 gr. absoluerit ab abside ima ad summam et vicissim pertingit.

Corollarium 5.

725. Dato autem angulo, quo corpus ab abside altera ad alteram peruenit qui sit 360μ grad. erit $\mu^2 = \frac{Pdy}{ydP}$ ideoque $P^{\mu\mu} = ay$, seu $P = ay^{\frac{1}{\mu\mu}}$. Vis ergo centripeta quae facit, vt lineae absidum tantus sit motus, erit $y^{\frac{1-3\mu^2}{\mu^2}}$.

Corollarium 6.

763. Si accidit vt $\frac{Pdy}{ydP}$ seu dP fiat negatiuum, motus absidum erit imaginarius. Ex quo cognoscitur corpus nunquam ad absidem alteram peruenire posse ab altera progressum. Sed perpetuo vel magis recessurum a centro vel ad id accessurum, siue in orbita clausa prorsus non moueri.

Corollarium 7.

754. Si vis centripeta proportionalis sit distantiarum potestati y^n, erit $P = y^{n+3}$. Quare fiet $\frac{Pdy}{ydP}$

PUN : MOTU
$\frac{Pdy}{ydP} = \frac{1}{n+3}$, peruenier a a summa v absoluto an
$\frac{dy}{y} > \frac{dP}{P}$, ellipsis xprimens moue- $\frac{dy}{y} < \frac{dP}{P}$ linea absi- At si $\frac{dy}{y} = \frac{dP}{P}$ seu iproce proporti- inea absidum qui- u angulari angu- na ad summam et
755. nalis, et $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ quo $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ reu idem punc re descript redeat atq tum curua centrum C eandem vi
quo corpus ab ai sit 360μ grad, $P = ay^{\frac{1}{\mu\mu}}$. Vis eae absidum tan-
756. reciproca Hac ergo sum, ad a non peru ratione q na prorsus nirum abi rithmica
fiat negatiuum, ex quo cognosci- teram peruenire erpetuo vel ma- cessurum, siue in
ortionalis sit dis- +3. Quare fiet $\frac{Pdy}{ydP}$

$\frac{Pdy}{ydP} = \frac{1}{n+3}$, atque corpus ab abside ima ad summam peruenier absoluto angulo circa C graduum $\frac{180}{\sqrt{(n+3)}}$; a summa vero vel ima abside ad eandem reuertetur absoluto angulo $\frac{360}{\sqrt{(n+3)}}$ grad.

Corollarium 8.

755. Si ergo fuerit $\sqrt{(n+3)}$ numerus rationalis, et m minimus numerus integer, quo fiat $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ quoque numerus integer; tum corpus post $\frac{m}{\sqrt{(n+3)}}$ reuolutiones circa centrum C peractas in idem punctum incidet, totidemque curua a corpore descripta absoluet spiras, antequam in se ipsam redeat atque claudatur. At si $n+3$ non est quadratum curua nunquam in se redibit, sed infinitas circa centrum C habebit spiras, neque vnquam corpus in eandem viam reuertetur.

Exemplum I.

756. Attrahat centrum virium in ratione reciproca triplicata distantiarum, erit $n+3=0$. Hac ergo hypothesi corpus ab altera abside egressum, ad alteram nisi infinitis reuolutionibus peractis non perueniet. Atque si vis centripeta in maiore ratione quam triplicata distantiarum decrescat curua prorsus non habebit duas absides sed vel in infinitum abibit, vel in ipso centro, vt spiralis logarithmica terminabitur.

 Exem-

Exemplum 2.

757. Si vis centripeta est quadratis distantiarum reciproce proportionalis erit $n+3=1$. Quare tum corpus motu angulari absolutis 180 gr. ab altera abside ad alteram perueniet, et curua post quamuis reuolutionem in se ipsam redibit. Corpus enim in ellipsi in cuius alterutro foco centrum virium est positum mouebitur, eiusque axis transuersus est ipsa linea absidum.

Exemplum 3.

758. Sit vis centripeta distantiis reciproce proportionalis, est $n+3=2$. Corpus igitur ab abside ima ad summam perueniet absoluto angulo $\frac{180}{\sqrt{2}}$ grad. seu 227 gr. 16′. Orbita vero ob $\sqrt{2}$ irrationale nusquam in se redibit.

Exemplum 4.

759. Si vis centripeta est constans in omni distantia, erit $n=0$. Hoc ergo casu corpus ab altera abside egressum ad alteram perueniet motu angulari percurso angulo $\frac{180}{\sqrt{3}}$ grad. i. e. 103 gr. 55′, quam proxime.

Exemplum 5.

760. Si vis centripeta est directe, vt corporis a centro distantia, quo casu corpus in ellipsi moueri constat, in cuius centro centrum virium est positum (631). Absis igitur ima ab summa distabit angulo 90 grad. Idem vero ex hac regula deducitur; nam ob $n=1$, erit $\frac{180}{\sqrt{n+3}}=90$.

Scho-

PUN
761.
um tanta v
beret reuol
quamcorpu
sola vis cei
Ex quibus
vsus perspic
sent difficil
candem h
prop. 45.
762.
thesi vis ce
portionali
finito per
quasi subit
valet, si c
que simili
triplicata
statim ac i
que vltra
Vtrum vis
locitate q
as absid
autem vis
tione dec
vel ea ma
E MOTU
2.
quadratis distanti-
it $n+3=1$. Qua-
solutis 180 gr. ab
et, et curua post
i redibit. Corpus
foco centrum viri-
que axis transuer-
3.
istantiis reciproce
Corpus igitur ab
r absoluto angulo
ta vero ob $\sqrt{2}$ ir-
4.
constans in omni
asu corpus ab al-
perueniet motu
ad. i. e. 103 gr.
5.
irecte, vt corpo-
corpus in ellipsi
entrum virium est
a ab summa dista-
ex hac regula de-
$=90$.
Scho-

Scholion 1.

761. Quoties igitur corpus circa centrum virium tanta velocitate proiicitur, vt fere in circulo deberet reuolui, ope huius propositionis vera curua, quamcorpus describet potest determinari, id quod ex sola vis centripetae consideratione fieri non potest. Ex quibus eo magis huiusmodi contemplationum vsus perspicitur, cum res, quae alias determinatu essent difficillimae ex iis facile definiantur. *Neutonus* eandem hanc propositionem exposuit Sect. IX. prop. 45.

Scholion 2.

762. Iam supra ostendimus corpus in hypothesi vis centripetae cubo distantiae reciproce proportionalis ad centum descendens ad id tempore finito peruenire, neque deinde ex eo egredi sed quasi subito annihilari (675) (676). Idem etiam valet, si corpus recta ad centrum descendat. Atque simili modo, si vis centripeta in maiore quam triplicata distantiarum ratione decrescat, corpus statim ac in centrum peruenerit, ibi euanescet, neque vltra centrum progredietur, neque reuertetur. Vtrum vis enim eueniat, curua, quam corpus velocitate quadam proiectum describeret, haberet duas absides, quod esset absurdum (756). Quoties autem vis centripeta in minore quam triplicata ratione decrescit, vt in simplici distantiarum ratione vel ea maiore, corpus, postquam in centrum per-ue-

uenerit, in eadem recta, qua ad centrum accessit, recedet; perspicitur hoc enim ex ratione reciproca duplicata (655), et simplici de qua patet (266) corpus non vltra centrum posse progredi. At si $n+1>0$ corpus recta ad centrum descendens finitam habebit celeritatem, qua vltra centrum in eadem recta progredietur, quoad motum amiserit (273). Hoc ergo modo satisfecimus desiderato superiori (272), quo motum corporis recta descendentis, cum in centrum peruenisset, definiri oportebat.

PROPOSITIO 92.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 2. 763. *Inuenire vires centripetas tendentes ad duo virium centra* C *et* D, *quae faciant, vt corpus in data curua* AMB *et data in singulis punctis* M *celeritate moueatur.*

Solutio.

Moueatur corpus ab A per M ad B, et sit eius celeritas in M debita altitudini v, ponatur $CM=y$ et $DM=z$. Ducta vero tangente TV in eamque ex C et D demissis perpendiculis CT et DV, dicantur $CT=p$ et $DV=q$. Vis centripeta porro, quae ad C tendit sit $=P$, et ea, quae ad D trahit sit $=Q$. Vis igitur normalis ex vtraque orta erit $=\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}$, et vis tangentialis accelerans motum corporis erit $=-\frac{P\sqrt{(y^2-p^2)}}{y}-\frac{Q\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$ cadentibus tangentibus in antecedentia. Posito ergo radio osculi in $M=r$, et elemento curuae $=ds$ erit $\frac{Pp}{y}+\frac{Qq}{z}=\frac{2v}{r}$ (561), et $dv=-\frac{Pds\sqrt{(y^2-p^2)}}{y}-\frac{Qds\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$ (559). Est vero $ds=\frac{ydy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}=\frac{zdz}{\sqrt{(z^2-q^2)}}$, ideoque $dv=-Pdy-Qdz$. Ex his duabus aequationibus coniunctis habebitur $P=\frac{2vyzdz+qrydv}{przdz-qrydy}$ et $Q=\frac{2vzydy+przdv}{qrydy-przdz}=-\frac{2vzydy+przdv}{przdz-qrydy}$. Est vero $r=\frac{ydy}{dp}=\frac{zdz}{dq}$; ergo $zdz=\frac{ydy\sqrt{(z^2-q^2)}}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$ atque $dq=\frac{dp\sqrt{(z^2-q^2)}}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Tandem dicta $CD=k$ erit $k^2=y^2+z^2-2pq-2\sqrt{(y^2-p^2)(z^2-q^2)}$, ex quibus P et Q prout libuerit determinari possunt. Q. E. I.

Corollarium 1.

764. Si corpus in curua motu aequabili debeat moueri ita vt sit $v=c$, et $dv=0$; erit $P=\frac{2cyzdz}{przdz-qrydy}$ et $Q=-\frac{2czydy}{przdz-qrydy}$. Atque $P:Q=dz:-dy$.

Corollarium 2.

865. Si fuerit $v=\frac{cb^2}{p^2}$, seu celeritas corporis reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem demissum; erit $dv=-\frac{2cb^2dp}{p^3}$. His substitutis fit $Q=0$, erit enim $przdv=-\frac{2cb^2rzdp}{pp}=-\frac{2cb^2zydy}{pp}=-2vzydy$. Atque $P=\frac{2cb^2pyzdz-2cb^2qy^2dy}{p^3r(pzdz-qydy)}=\frac{2cb^2y}{p^3r}$ (714). Haec enim vis sola efficiet, vt corpus hoc modo in ista curua moueatur.

Exemplum.

766. Sit curua data AMB ellipsis et centra C et D eius foci. Ponatur eius axis transuersus $AB=A$ et latus rectum $=L$, eritque ex natura ellipsis

PUNCI OTU
et elemento c ... trum accessit,
764. S ... tendentes ad
865. S ... B, et sit eius
766. S ... uli in $M=r$, et

lipsis $4pp = \frac{ALy}{A-y}$ et $4qq = \frac{ALz}{A-z}$. At praeterea erit $z = A - y$, et $r = \frac{4(Ay-yy)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}} = \frac{4(Az-zz)^{\frac{3}{2}}}{A\sqrt{AL}}$. Ex quo prodibit $P = \frac{Avdy - ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$ et $Q = \frac{Avdz - zdv(A-z)}{2zdz(A-z)} = \frac{Avdy + ydv(A-y)}{2ydy(A-y)}$, ideoque $P + Q = \frac{Av}{yz}$ et $Q - P = \frac{dv}{dy}$.

PROPOSITIO 93.
Problema.

Tab. VIII. Fig. 3. 767. *Moueatur corpus data celeritate in curua etiam data AMB, et oportet inueniri vim centripetam ad centrum C tendentem vna cum vi perpetuo ad rectam AB normaliter in directione MP corpus trahente, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac curua cum praescriptaque celeritate libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in puncto M existentis celeritas debita altitudini v, et distantia $MC = y$, perpendicularis vero $MP = z$. Ponatur vis corpus ad centrum C trahens $= P$ et vis secundum MP trahens $= Q$. Ducta tangente MV in M demittantur in eam perpendicula CT et PQ, quae dicantur p et q. His factis erit vis normalis ex vtraque orta $= \frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z}$ et vis tangentialis $= \frac{P\sqrt{(y^2-p^2)}}{y} + \frac{Q\sqrt{(z^2-q^2)}}{z}$. Posito ergo radio osculi in $M = r$ erit $\frac{Pp}{y} + \frac{Qq}{z} = \frac{2v}{r}$ (561) et $dv = -Pdy - Qdz$ (559). Ex his itaque reperietur $P = \frac{2vyzdz + qrydv}{przdz - qrydy}$ et $Q = -\frac{2vzydy - przdv}{przdz - qrydy}$. Ponatur autem $CP = x$, erit $\sqrt{(dx^2+dz^2)} : dx = z : q$; vnde $q =$

$\frac{zdx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$ et posito dx constante est $r = \frac{(dx^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddz}$. Erit autem porro $y = \sqrt{(x^2+z^2)}$, et $p = \frac{zdx - xdz}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$. His substitutis prodibit $P = \frac{2vydxdzddz - ydxdv(dx^2+dz^2)}{x(dx^2+dz^2)^2}$, et $Q = -\frac{2vydydxddz + (zdx - xdz)(dx^2+dz^2)dv}{x(dx^2+dz^2)^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

768. Si corpus aequabiliter in curua moueri debeat ita vt sit $v = c$ et $dv = o$, erit $P = \frac{2cydxdzddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$ et $Q = -\frac{2cydydxddz}{x(dx^2+dz^2)^2}$.

Corollarium 2.

769. Si curua sit circulus, cuius centrum in C existat, et radius dicatur $= a$. Erit $r = a$, $y = a$ $p = a$, et $q = \frac{z^2}{a}$. Quare prodibit $P = \frac{2v}{a} + \frac{zdv}{adz}$ et $Q = -\frac{dv}{dz}$. Ergo cognita Q erit $P = \frac{2v}{a} - \frac{Qz}{a}$. Atque si est $v = c$ et $dv = o$, erit $Q = o$, et $P = \frac{2c}{a}$.

Scholion.

770. Ex hac propositione in se spectata, qua ipsa curua a corpore descripta datur, parum vtilitatis consequitur ad curuas, quas corpora a compositis viribus sollicitata describunt, determinandas. Ab hac vero ad alias propositiones progredi licet, in quibus curuae a corporibus descriptae non ipsae dantur; sed generantur ex motu vnius pluriumue datarum, quemadmodum in superioribus propositionibus, in quibus de motu absidum tractauimus, est factum.

PRO-

PROPOSITIO 94.
Problema.

Tab. VIII, Fig. 4.

771. *Si moueatur corpus vtcunque in curua AMB ipsa vero curua interea reuoluatur circa punctum fixum C: inueniri oportet duas vires, quarum altera perpetuo ad punctum fixum C, altera normaliter ad rectam positione datam PC sit directa, quae duae vires efficiant, vt corpus in hac orbita mobili libere moueatur.*

Solutio.

Sit corporis in M existentis celeritas, qua in ipsa curua elementum Mm percurrit, debita altitudini v, atque celeritas angularis corporis in orbita ad veram celeritatem angularem corporis circa C vt 1 ad w, seu celeritas angularis corporis in orbita ad celeritatem angularem ipsius orbitae, dum corpus est in M vt 1 ad $w-1$. Ponatur radius CM$=y$, et perpendiculum CT, ex C in tangentem orbitae in M demissum $=p$, ipsa vero tangens $MT=q$, ita vt sit $q=\surd(y^2-p^2)$. Ex M in rectam positione datam DP demittatur perpendiculum MP, quod dicatur z, et CP, x, ita vt sit $x=\surd(y^2-z^2)$. Iam dum corpus elementum Mm percurrit, ponatur orbita interea angulo $=mC\mu$ circumferri; quamobrem motu composito corpus in μ perueniet, sumto $C\mu=Cm$, eritque $M\mu$ elementum verae curuae, in qua corpus mouetur, in quod productum demittatur ex C perpendiculum $C\Theta$. Centro C describatur ar-

culus $M\nu$, erit $mn=\mu\nu=dy$, et $Mn:M\nu=1:w$. Est vero $Mn=\frac{ydy}{q}$, vnde $M\nu=\frac{wpdy}{q}$, ex quo habebitur $M\mu=\frac{dy}{q}\surd(w^2p^2+q^2)$, atque porro $C\Theta=\frac{wpy}{\surd(w^2p^2+q^2)}$ et $M\Theta=\frac{qy}{\surd(w^2p^2+q^2)}$. Fiat $Mm:M\mu=\surd v:\frac{\surd v(w^2p^2+q^2)}{y}$, cuius quadratum $\frac{v(w^2p^2+q^2)}{y^2}$ exhibet altitudinem debitam verae corporis celeritati; huius igitur incrementum est $=\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2}+\frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2}-\frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3}+\frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Radius osculi autem verae curuae, in qua corpus incedit est

$$=\frac{ydy}{d.C\Theta}=\frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy+wy^3dp+py^3dw-p^3ydw}$$

$$=\frac{ydy(w^2p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{w(w^2-1)p^3dy+wy^3dp+pq^2ydw}.$$ Posito sinu toto $=1$, erit sinus anguli CMP$=\frac{x}{y}$ et cosinus $=\frac{z}{y}$. At anguli $CM\Theta$ sinus erit $=\frac{wp}{\surd(w^2p^2+q^2)}$ eiusque cosinus $=\frac{q}{\surd(w^2p^2+q^2)}$. Ex quibus reperitur anguli $PM\Theta$ sinus $=\frac{wpz-qx}{y\surd(w^2p^2+q^2)}$, eiusque cosinus $=\frac{wpx+qz}{y\surd(w^2p^2+q^2)}$. Demisso ex P in tangentem $M\Theta$ perpendiculo PQ erit $PQ=\frac{wpz^2-qxz}{y\surd(w^2p^2+q^2)}$ et MQ $=\frac{wpxz+qz^2}{y\surd(w^2p^2+q^2)}$. Atque percurrente corpore elementum $M\mu$ erit lineae PM incrementum $dz=\frac{wpxdy+qzdy}{qy}$. Ex qua aequatione relatio inter w et x innotescit, et simul positio lineae absidum AB respectu rectae CP inueniri potest. Iam ponatur vis corpus sollicitans versus MC$=$P et vis secundum MP trahens $=$Q, ex quibus oritur vis tangentialis

 ma-motum corporis retardans $= \frac{Pq}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpx+Qqz}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ quae ergo ducta in $\frac{dy}{q}\sqrt{(w^2p^2+q^2)}$ aequalis poni debet $= -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$, ita vt prodeat $Pdy + \frac{Qwpxdy}{qy} + \frac{Qzdy}{y} = -\frac{dv(w^2p^2+q^2)}{y^2} - \frac{2(w^2-1)vpdp}{y^2} + \frac{2(w^2-1)vp^2dy}{y^3} - \frac{2vp^2wdw}{y^2}$. Vis autem normalis ex vtraque orta est $\frac{Pwp}{\sqrt{(w^2p^2+q^2)}} + \frac{Qwpz-Qqx}{y\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$, quae aequalis esse debet $\frac{2w(w^2-1)vp^3dy+2wvy^3dp+2vpq^2ydw}{y^3dy\sqrt{(w^2p^2+q^2)}}$ (561), quare habebitur $Pwpydy + Qwpzdy - Qqxdy = \frac{2w(w^2-1)vp^3dy}{y^2} + 2wvydp + \frac{2vpq^2dw}{y}$. Ex quibus aequationibus coniunctis obtinetur $Q = -\frac{wpqdv}{yxdy} - \frac{2wvqdp}{yxdy} - \frac{2vpqdw}{yxdy}$, atque $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy} + \frac{2vpqzdw}{y^2xdy}$. Angulus vero, quem linea absidum AB facit cum recta CP erit $= \int\frac{(w-1)pdy}{qy}$, vnde eius positio quouis tempore innotescit. Q.E.I.

Corollarium I.

772. Quia est $dz = \frac{wpxdy+qzdy}{qy}$ ponatur $z = ty$; eritque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wpdy}{qy}$. Ex qua aequatione, si detur w in y, in qua etiam ob curuam AMB datam p et q exprimuntur, inuenietur t, ideoque etiam z et x.

Corollarium 2.

773. Si fuerit celeritas corporis in orbita $\sqrt{v}$ reciproce vt perpendiculum CT ex C in tangentem demissum, seu $v = \frac{a^2c}{p^2}$ erit $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2cqzdw}{py^2xdy}$ et $Q = -\frac{2a^2cqdw}{pyxdy}$.

Co-

Corollarium 3.

774. Si hoc casu est w constans, euanescit vis Q et sola remanet $P = \frac{2a^2cdp}{p^3dy} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3}$ ad centrum tendens, quae efficiet, vt corpus in orbita AMB circa C mobili progrediatur prorsus vt supra inuentum est (734).

Corollarium 4.

775. Si v non est $= \frac{a^2c}{p^2}$, sed w constans, ita vt motus angularis orbitae proportionalis sit motui angulari corporis in orbita, nempe vt $w-1$ ad 1, erit $Q = -\frac{wpqdv-2wvqdp}{yxdy}$ et $P = \frac{qdv(wpz-qx)}{y^2xdy} + \frac{2(w^2-1)vp^2}{y^3} + \frac{2vdp(wqz+px)}{y^2xdy}$.

Exemplum.

776. Posito $v = \frac{a^2c}{p^2}$, sit curua AMB ellipsis alterutrum focum in C habens. Cuius igitur axis transuersus si vocetur A et latus rectum L erit $4pp = \frac{ALy}{A-y}$, seu $p = \frac{\sqrt{ALy}}{2\sqrt{(A-y)}}$ et $q = \frac{\sqrt{(4Ay^2-4y^3-ALy)}}{2\sqrt{(A-y)}}$, atque $\frac{dp}{p^3} = \frac{2dy}{Ly^2}$. Quare habebitur $Q = -\frac{2a^2cdw\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}{yxdy\sqrt{AL}}$ et $P = \frac{4a^2c}{Ly^2} + \frac{2a^2c(w^2-1)}{y^3} + \frac{2a^2czdw\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}{y^2xdy\sqrt{AL}}$. Atque $\frac{dt}{\sqrt{(1-tt)}} = \frac{wdy\sqrt{AL}}{y\sqrt{(4Ay-4y^2-AL)}}$.

Scholion I.

777. Hae formulae existente curua ellipsi variis modis simpliciores effici possunt, si curua in qua corpus mouetur ad circulum proxime accedat. Atque hic casus tum non parum habebit vtilitatis in motu lunae theoretice definiendo. Terra enim vt

 in

in C quiescens ponatur, et Sol in recta ad CP in C perpendiculari pariter tanquam quiescens consideretur, quo facto et his viribus cum viribus solis et terrae comparatis, elicietur motus Lunae synodicus pro quauis lineae absidum positione, et simul ipsius lineae absidum motus, qui a vero lunae motu quam minime differet.

Scholion 2.

778. Multo latius quidem patet ista propositio, quam superior (729), in qua vis omnis ad centrum rotationis orbitae erat directa, haec enim illam in se complectitur, euanescente vi Q. Neque tamen perfecte ad motum lunae explicandum quadrat propter vim reciproce cubo distantiae MC proportionalem in vi P (773). Hanc ob rem alios orbitae motus praeter gyratorium in medium proferemus, qui et latius pateant, et magis cum quaestionibus physicis congruant. Huiusmodi sunt motus orbitarum per quasque curuas manente orbita sibi semper parallela, quae contemplatio aliis ideo anteferri meretur, quod vires sollicitantes et facile inueniri, et simplicioribus formulis possint comprehendi. Ad hoc autem praestandum opus est sequens theorema praemitti.

PROPOSITIO 95.

Theorema.

Tabula IX. Fig. 1. 779. *Moueatur corpus* M *in curua* AM *a vi quacunque sollicitatum circa punctum* C, *atque insuper et*

MOTU
ecta ad CP in C
escens conside-
viribus solis et
is Lunae syno-
ione, et simul
ero lunae motu
atet ista propo-
a vis omnis ad
cta, haec enim
te vi Q. Ne-
e explicandum
distantiae MC
nc ob rem ali-
m in medium
et magis cum
Huiusmodi sunt
manente orbi-
templatio aliis
sollicitantes et
ormulis possint
estandum opus
5.
urua AM a vi
, atque insuper
et
et corp
directio
respectu
pectatu
P
ris dt
nito c
plaga
gulum
et cor
plagar
hac vi
dem i
ab hac
lem i
insitur
currit
lem M
circa
puscul
transl
ipsi A
est o
mCA
puncti
rectio
uum

et corpus M *et punctum* C *ab aequali vi et in eandem directione sollicitentur: erit motus relatiuus corporis* M *respectu puncti* C, *seu motus corporis* M *qualis ex* C *pectatur idem, ac si haec noua vis non accessisset.*

Demonstratio.

Puncto C quiescente perueniat puncto temporis dt corpus ex M in m. Hoc igitur tempusculo finito corpus M distabit a C interuallo mC, et cum plaga quadam fixa recta AC expressa constituet angulum mCA. Ponatur iam corpore existente in M et corpus M et punctum C ab aequali et in eandem plagam tendente vi vrgeri, ita vt punctum C ab hac vi tempusculo dt promoueatur per Cc. Eodem igitur tempusculo dt corpus M, si quiesceret, ab hac vi transferretur per Mm parallelam et aequalem ipsi Cc. At quia corpus C iam habet motum insitum, quo tempusculo dt elementum Mm percurrit, vtroque motu coniuncto describet diagonalem Mμ completo parallelogrammo M$m\mu n$. Quocirca accedente hac noua vi corpus M finito tempusculo dt distabit a puncto C, quod interea in c est translatum, interuallo μc, et ducta ac parallela ipsi AC cum plaga fixa constituet angulum $\mu c a$. At est ob mC$c\mu$ parallelogrammum $\mu c = m$C et ang. mCA $=$ ang. $\mu c a$. Consequenter vis vtrumque punctum M et C aequaliter et secundum eandem directionem sollicitans non immutat motum relatiuum corporis M respectu puncti C. Q. E. D.

 Co-

Corollarium 1.

780. Quaecunque igitur vis punctum C sollicitat, si eadem simul corpus M secundum eandem plagam vrgeat; motus relatiuus corporis M respectu puncti C non mutabitur.

Corollarium 2.

781. Huiusmodi ergo vi M et C aequaliter sollicitante effici potest, vt corpus M in orbita AM quomodocunque mobili moueatur. Orbita autem ipsa motu suo ita sequetur puncti C motum, vt eius positio sibi semper maneat parallela.

Corollarium 3.

782. Perspicitur etiam ex demonstratione propositionis, si et puncto C et corpori M aequalis celeritas imprimatur secundum eandem plagam, motum relatiuum non perturbatum iri.

Corollarium 4.

783. Atque cum talis motus puncto C impressus perpetuo duret aequabilis in directum sine vlla vis continuatione, sequitur corpus M circa punctum C aequabiliter indirectum progrediens aeque moueri posse, ac circa quiescens. Hoc enim obtinebitur, si modo corpori M aequalis celeritas in eandem plagam directa adiiciatur.

Corollarium 5.

784. Corpus ergo circa centrum virium vniformiter in directum progrediens, eandem curuam li-

PUNCTI ... OTU
libere describere ... ctum C sol-
scriberet, mod ... dum eandem
quantam accepit ... oris M respe-
C
785. Quen
relictum non po
inaequabiliter in ... C aequaliter
rium vel in cur ... n orbita AM
ctum non potes ... Orbita autem
scribere quam c ... tum, vt eius
vi insuper vrger
via retinendum
PR ... nonstratione
... ri M aequa-
786: Si c ... dem plagam,
escens reuolutu
quae efficit, vt c
AL sibi ipsi semp ... ncto C im-
... rectum sine
Quia corp ... M circa pun-
circa centrum v ... ediens aeque
stantia LM=y ... oc enim ob-
in M demisso ... celeritas in
M = a²c/p² (589
= 2a²cdp/p³dy (592).
AL moueri attr ... viriu.. vni-
CL=s et perp ... dem curuam
li-

libere describere poterit, quam circa quiescens describeret, modo ei superaddatur tanta celeritas quantam accepit centrum virium.

Corollarium 6.

785. Quemadmodum autem corpus sibi ipsum relictum non potest in linea curua progredi, neque inaequabiliter in recta; ita corpus circa centrum virium vel in curua motum vel difformiter in directum non potest libere circa id eandem curuam describere quam circa quiescens, sed perpetuo tanta vi insuper vrgeri debet, quanta ad centrum in sua via retinendum requiritur.

PROPOSITIO 96.

Problema.

786: *Si corpus M circa centrum virium L quiescens reuoluatur in curua BM; determinare vim, quae efficit, vt corpus in eadem orbita secundum curuam AL sibi ipsi semper parallele mota ingrediatur.* Tabula IX. Fig. 2.

Solutio.

Quia corpus M in orbita BM libere mouetur circa centrum virium quiescens L, erit, posita distantia $LM = y$ et perpendiculo ex L in tangentem in M demisso $= p$, altitudo debita celeritati in $M = \frac{a^2c}{p^2}$ (589) et vis centripeta ad L tendens $= \frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ (592). Iam ponatur centrum L in curua AL moueri attractum ad centrum virium C, sitque $CL = s$ et perpendiculum ex C in tangentem in L de-

demissum $=w$. Quo posito erit altitudo debita celeritati in $L=\frac{b^2e}{w^2}$ (589) et vis punctum L ad C trahens $=\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ (592). Ponatur autem primo puncto L celeritas secundum tangentem imprimi $=\frac{b\sqrt{e}}{w}$; eademque etiam corpori M secundum directionem huic tangenti parallelam; atque perspicuum erit si nulla insuper vis punctum L sollicitet, sed tantum hunc motum impressum conseruet, corpus M libere in eadem curua BM motum puncti L ita sequente, vt axis BL sibi semper maneat parallelus, motum iri (783). At quo corpus M eodem modo circa punctum L in curua AL incedens moueatur, oportet, vt ipsi perpetuo tanta vis imprimatur, quanta requiritur ad punctum L in hac curua AL retinendum (781). Ducta igitur MN parallela ipsi LC, corpus M praeter vim, quae ad L vrgetur, sollicitari debebit vi $=\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ secundum directionem MN. Quare haec duplex vis efficiet vt problemati satisfiat. Quo autem appareat, quanam vi corpus M respectu puncti C et rectae fixae AC ipsi BL parallelae sollicitari oporteat, resoluantur vires corpus M secundum MN et ML trahentes in duas alias, quarum altera habeat directionem MC altera MP, quae linea MP ad AC perpendiculariter est ducta. Ad hoc praestandum ipsi MP ducatur parallela KLN rectam MC in O secans, et vocetur $LI=x$, $MI=z$; $CK=r$, $KL=t$; atque $CP=X$, $PM=C$ et $CM=Y$. Quocirca erit $y=\sqrt{(x^2+z^2)}$; $s=\sqrt{(r^2+t^2)}$ et $Y=\sqrt{(X^2+Z^2)}$. Atque poro $p=\frac{xdz-zdx}{\sqrt{(dx^2+dz^2)}}$ et $-w=$

$w=\frac{rdt-tdr}{\sqrt{(dr^2+dt^2)}}$. Praeterea vero erit $X=r+x$ et $Z=t+z$. Quare cum ob curuas AL et BM datas, z, y et p in x, itemque t, s et w in r dentur, poterunt hae omnes quantitates in X, Z et Y exhiberi. Aequatio vero inter X et Z ex eo deducetur, quod temporis incrementum per BM aequale esse debeat temporis incremento per AL. Hinc ergo erit $\frac{p\sqrt{(dx^2+dz^2)}}{a\sqrt{c}}=\frac{w\sqrt{(dr^2+dt^2)}}{b\sqrt{e}}$ et integralibus sumtis erit area ACL + constante quadem area ad aream BLM vt $b\sqrt{e}$ ad $a\sqrt{c}$. Vis igitur secundum ML trahens resoluatur in binas secundum MO et LO seu MI trahentes, et simili modo vis secundum MN in binas secundum MO et NO trahentes, quarum posterior corpus M secundum directionem ipsi MI contrariam sollicitabit; ad quas resolutiones instituendas angulos nosse oportet. Est vero MLO=LMI, eiusque igitur sinus $=\frac{x}{y}$ et cosinus $=\frac{z}{y}$, sumto 1 pro sinu toto. Similiter est MON=CMP, huius igitur sinus $=\frac{X}{Y}$ et cosinus $=\frac{Z}{Y}$. Anguli ergo LMO, qui horum est differentia sinus erit $=\frac{Xz-Zx}{Yy}$. Denique est MNQ=CLK, quare eius sinus est $\frac{r}{s}$ et cosinus $=\frac{t}{s}$. Consequenter ob NMO=MNQ−MON, erit eius sinus $=\frac{Zr-Xt}{Ys}$. Est vero $Xz-Zx=Cr-Xt$ ob $V=r+x$ et $Z=t+z$. Ex his fiet MN : MO seu $\frac{X}{Y}:\frac{r}{s}$ ita vis secundum MN tendens $\frac{2b^2edw}{w^3ds}$ ad vim secundum MC, quae ergo erit $=\frac{2b^2eYrdw}{Xs\,w^3ds}$. Atque MN : NO seu $\frac{X}{Y}:\frac{Zr-Xt}{Ys}$ ita vis secundum MN [illegible] ad [illegible] fecundum ON quae ergo eft $=\frac{2b^2edw(Zr-Xt)}{Xsw^3ds}$. Simili modo erit ML : MO $=\frac{X}{Y}:\frac{x}{y}$ ita vis fecundum ML, $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim fecundum MC quae ergo erit $=\frac{2a^2cYxdp}{Xyp^3dy}$. Atque ML:LO feu $\frac{X}{Y}:\frac{Zr-Xt}{Yy}$ ita vis fecundum ML $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}$ ad vim fecundum OL feu MP quae ergo eft $=\frac{2a^2cdp(Zr-Xt)}{Xyp^3dy}$. Ex quibus colligitur corpus M trahi debere a vi tendente fecundum MC $=\frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds}+\frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right)$ atque a vi fecundum MP $=\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy}-\frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$. Quae expreffiones omnes in X, Z et Y exhiberi poterunt, et praeterea inter has quantitates, quae veram curuam a corpore M defcriptam pertinent, aequatio affignari. Q.E.I.

Corollarium 1.

787. Si curua AL fit peripheria circuli, cuius centrum in C et radius AC$=b$, erit $s=w=b$, et $r^2+t^2=b^2$. Hoc ergo cafu vis fecundum MC trahens erit $=\frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2}+\frac{2a^2cxdp}{yp^3dy}\right)=\frac{2eY}{b^2}-\frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2}-\frac{a^2cdp}{yp^3dy}\right)$ et vis fecundum MP$=\frac{(Zr-X\surd(b^2-r^2))}{X}\left(\frac{2a^2cdp}{yp^3dy}-\frac{2e}{b^2}\right)$. Atque e erit altitudo debita celeritati quam habet punctum L.

Corollarium 2.

788. Sit curua BM ellipfis centrum habens in L, et BL eius femiaxis transuerfus $=a$, ita vt altitudo debita celeritati in B fit $=c$, alter vero femi axis fit $=b$. Eritque $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$ et $\frac{2a^2cdp}{p^3dy}=\frac{2cy}{b^2}$. Quare vis fecundum MC fit $=\frac{Y}{X}\left(\frac{2b^2erdw}{sw^3ds}+\frac{2cx}{b^2}\right)=\frac{2b^2eYdw}{sw^3ds}-\frac{2Yx}{X}\left(\frac{b^2edw}{sw^3ds}-\frac{c}{b^2}\right)$. Atque vis fecundum MP$=\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2}-\frac{2b^2edw}{sw^3ds}\right)$.

Corollarium 3.

789. Si et curua AL fuerit circulus vt coroll. 1. et curua BM ellipfis vt coll. 2. erit vis fecundum MC$=\frac{Y}{X}\left(\frac{2er}{b^2}+\frac{2cx}{b^2}\right)=\frac{2eY}{b^2}-\frac{2Yx}{X}\left(\frac{e}{b^2}-\frac{c}{b^2}\right)$ et vis fecundum MP$=\frac{(Zr-Xt)}{X}\left(\frac{2c}{b^2}-\frac{2e}{b^2}\right)$, vbi r et t et x in X, Z et Y poterunt determinari ex his aequationibus $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$, $r^2+t^2=b^2$, $r+x=X$ et $t+z=Z$. Aequatio autem emergens ad quatuor dimenfiones afcendit.

Corollarium 4.

790. Si ellipfis BM ponatur infinite parua feu faltem perquam exigua refpectu circuli AL ita tamen vt tempus periodicum ellipfis fit finite magnum, erit $x=\frac{a^2X(Y^2-b^2)\pm abZ\surd(4a^2X^2+4b^2Z^2-(Y^2-b^2)^2)}{2a^2X^2+2b^2Z^2}$ et $z=\frac{b^2Z(Y^2-b^2)\mp abX\surd(4a^2X^2+4b^2Z^2-(Y^2-b^2)^2)}{2a^2X^2+2b^2Z^2}$.

Corollarium 5.

791. Si curua BM fuerit quoque circulus in L centrum habens; fiet $b=a$, ideoque $x^2+z^2=a^2$, $r^2+t^2=b^2$, $r=X-x$ et $t=Z-z$, ex quibus pofito $b^2-a^2=f^2$ reperietur $2x=\frac{(Y^2-f^2)X\pm Z\surd(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}{Y^2}$ et $2z=\frac{(Y^2-f^2)Z\mp X\surd(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)}{Y^2}$. Atque $2Zr-2Xt=-\surd(4a^2Y^2-(Y^2-f^2)^2)$.

 Scho-

Scholion 1.

792. Extremum hoc corollarium adiecimus, vt appareat, quales vires requirantur ad corpus in epicyclo circa centrum virium circumagendum, quemadmodum Ptolemaici planetas moueri existimauerunt.

Corollarium 6.

793. Ex hypothesi coroll. 3. intelligitur si fuerit $\frac{c}{b^2}=\frac{c}{b^2}$ seu celeritas corporis L ad celeritatem corporis M in B vt diameter circuli AL ad axem coniugatum ellipsis BM; tum veram curuam a corpore M descriptam fore ellipsin centrum habentem in C, cum vis sollicitans ad C tendens fit $=\frac{2eY}{b^2}$, euanescente vi secundum MP. Huius ellipsis semiaxis maior erit $b+a$, minor vero $b+b$.

Scholion 2.

794. Propositionem hanc ideo praecipue attuli, quod in appendice nouae Principiorum *Newtoni* editionis anglicae Cl. *Machin* asseuerat, lunae motum considerari posse tanquam in ellipsi cuius axis transuersus sit ad coniugatum vt 2 : 1 circa centrum factum, dum interea ipsa ellipsis motu sibi semper parallelo secundum peripheriam circuli libere progrediatur, quemadmodum in coroll. 3. explicui. Equidem non nego hac ratione motum perquam conformem motui lunae posse exhiberi, sed an exacte congruat vehementer dubito. Sequente autem propositione determinare statui, quid ad

Pl ... MOTU
ad lunae ... arium adiecimus,
vero ista ... tur ad corpus in
men eam ... circumagendum,
nendi m ... as moueri exi-
sum est.
3. intelligitur si
79 ... L ad celeritatem
eum in c ... uli AL ad axem
L tum a ... n curuam a cor-
proca di ... ntrum habentem
minari ... dens fit $=\frac{2eY}{b^2}$,
spectatur ... ius ellipsis semi-
$b+b$.
Poi ... o praecipue at-
qua terr ... icipiorum Neu-
terra LT ... sseuerat, lunae
Vis qua ... in ellipsi cuius
qua luna ... 2 : 1 circa cen-
Ab his ... llipsis motu sibi
motus p ... iam circuli libe-
nae mo ... n coroll. 3. ex-
obseruat ... ratione motum
cens est ... posse exhiberi,
mati mo ... r dubito. Se-
trarius ... are statui, quid
terra a ... ad

ad lunae motum indicandum requiratur. Etiamsi vero ista propositio ad astronomiam pertineat, tamen eam, vt genuina huiusmodi quaestiones resoluendi methodus perspiciatur, hic afferre e re visum est.

PROPOSITIO 97.

Problema.

795. *Quiescente sole in* S, *et terra* T *circa eam in circulo* TD *vniformiter mota, attrahatur luna* L *tum ad terram* T *tum ad solem* S *in ratione reciproca distantiarum duplicata; quibus positis determinari oporteat motum lunae, qualis ex terra* T *spectatur.* Tabula IX. Fig. 3.

Solutio.

Ponatur distantia terrae a sole ST$=a$, et vis qua terra ad solem trahitur $=\frac{f}{a^2}$. Distantia lunae a terra LT sit $=y$, et distantia lunae a sole LS sit $=z$. Vis qua luna ad terram trahitur sit $=\frac{b}{y^2}$; vis vero qua luna ad solem trahitur secundum LS erit $=\frac{f}{z^2}$. Ab his igitur viribus lunam sollicitantibus, qualis motus producatur, est inuestigandum. At quia lunae motus, qualis a spectatore in terra constituto obseruatur, definiri debet, terra tanquam quiescens est consideranda; id quod fit, dum toti systemati motus ei, quem terra habet, aequalis et contrarius imprimitur, simulque sollicitationes, quas terra a sole recipit, contrario modo in lunam et solem cogitatione transferuntur. Celeritas autem terrae in circulo TB debita est altitudini $\frac{f}{2a}$, vti ex vi $\frac{f}{a^2}$, qua terra ad solem vrgetur colligi potest. Tanta igitur celeritas et soli et lunae secundum directionem ad TS normalem imprimi debet. Praeterea, quia terra ad solem trahitur vi $\frac{f}{a^2}$, oportet ad huius vis effectum destruendum res ita concipi, ac si sol perpetuo tanta vi ad terram traheretur, luna vero eadem vi secundum LN ipsi ST parallelam. Hoc facto sol describet circa terram in T quiescentem circulum SE eadem celeritate, qua ante terra circa solem ferebatur. Luna vero praeter vires secundum LT et LS tendentes insuper vrgebitur versus LN vi $=\frac{f}{a^2}$. Ducta LM parallela quoque ipsi TS, resoluatur vis secundum LS agens $\frac{f}{z^2}$ in has duas, quarum alterius directio sit LT, alterius LM. Ex consideratione ergo trianguli LTS orietur vis secundum LT agens $=\frac{fy}{z^3}$ et vis secundum LM trahens $=\frac{af}{z^3}$. Quare omnibus coniunctis luna trahetur versus LT vi $=\frac{b}{y^2}+\frac{fy}{z^3}$, atque versus LM vi $=\frac{f}{a^2}-\frac{af}{z^3}=\frac{f(z^3-a^3)}{a^2z^3}$, ex quibus viribus motus lunae debet determinari. Notandum autem directionem LM non esse constantem sed variabilem, quippe perpetuo parallelam radio TS, qui ob motum solis secundum peripheriam SE circumfertur. Producta igitur ST in A, vt AB sit linea syzygiarum, et ex L in eam demisso perpendiculo LP erit TP aequalis et parallela ipsi LM. Perueniat tempusculo dt luna ex

PUN E MOTU
ex L in l, interea line tabitur part dum paralle ex l in Ta resoluendis quarum vtr tem aequa praebebunt na moueri
Celeritas autem titudini $\frac{f}{2a}$, vti ex tur colligi potest. unae secundum di- umi debet. Praeitur vi $\frac{f}{a^2}$, oportet in res ita concipi, terram traheretur, N ipsi ST parallea terram in T quileritate, qua ante una vero praeter ites insuper vrge- LM parallela quolum LS agens $\frac{f}{z^2}$ in io sit LT, alterius rianguli LTS orie- t vis secundum LM oniunctis luna tra- que versus LM vi ribus motus lunae autem directionem ibilem, quippe per- b motum solis se- nfertur. Producta syzygiarum, et ex LP erit TP aequalis tempusculo dt luna ex
796. nae deduc neque celer lineae absid minari. V negligendis dammodo elici, quer Phil. Princ. do calculus non summ Posuimus e ro parump motam con rae plano p bent. Int tionis solu

ex L in l, sol autem ex S in s; transferetur ergo interea linea syzygiarum in ab, et luna in l sollicitabitur partim a vi secundum lT, partim a vi secundum parallelam ipsi Tp trahente, demisso scilicet ex l in Ta perpendiculo lp. Ex his autem viribus resoluendis reperiuntur vis normalis et tangentialis, quarum vtraque celeritatem lunae dabit. Hae autem aequationes coniunctae eliminata celeritate praebebunt aequationem pro curua ABL in qua luna moueri cernitur. Q. E. I.

Scholion I.

796. Aequationes, quae hinc ad motum lunae deducuntur, tam fiunt complexae, vt ex iis neque celeritas lunae, neque orbita, neque positio lineae absidum eiusque motus exacte possint determinari. Vero autem proxime ex eodem calculo negligendis quantitatibus vehementer exiguis quodammodo conclusiones in vsum astronomiae possunt elici, quemadmodum fecit Summus *Neutonus* in Phil. Princ. Libr. III. Etiamsi autem hoc incommodo calculus non laboraret, tamen ista propositio non summo rigore motum lunae esset exhibitura. Posuimus enim solem prorsus quiescere, quod a vero parumper discrepat; deinde terram in circulo motam consideramus, et orbitam lunae in ipso termotam consideramus, et orbitam lunae in ipso termotam consideramus, quae itidem re ipsa secus se harae plano positam, quae itidem re ipsa secus se habent. Interim tamen certum est, si huius propositionis solutio posset euolui ex eaque tabula confici, hoc

hoc in Astronomia maximam habiturum esse vtilitatem.

Corollarium 1.

797. Quia lunae a terra distantia est admodum parua respectu distantiae terrae a sole, sine sensibili errore fere poterit poni $z=a$, quo casu vis secundum LM agens euanescit, et luna tantum ad terram trahetur vi $=\frac{b}{y^2}+\frac{fy}{a^3}$.

Corollarium 2.

798. Cum orbita lunae non multum differat a circulo, poterit ea instar ellipsis mobilis considerari, vt fecimus prop. 90 (747). Quare ad motum absidum cognoscendum, erit ex illius prop. coroll. 3 (750) $P=\frac{a^3by+fy^4}{a^3}$, atque luna a perigaeo ad apogaeum perueniet absoluto motu angulari circa terram angulo $=180\sqrt{\frac{a^3b+fy^3}{a^3b+4fy^3}}$ grad. vbi y, quia non multum variatur tanquam constans est considerandum.

Scholion 2.

799. Regrederetur ergo perpetuo linea absidum motus lunaris, quia $\frac{a^3b+fy^3}{a^3b+4fy^3}$ minor et vnitate, id quod est contra obseruationes. Ratio vero huius erroris est quod z vt constantem quantitatem considerauimus. Nam etsi z non multum neque augeatur neque minuatur ratione sui ipsius, tamen eius incrementa et decrementa respectu incrementorum ipsius y minime negligi possunt. Quare cum ipsius P dif-

PUNCTI (...) TU
P differentiale sit (...) um esse vti- tanquam constan (...) loco a posuimus (...) per y, motus abs (...) ia est admo- minari. Interim (...) a sole, sine ydz, lineam absi (...) quo casu vis ydz in consequen (...) tantum ad tionem abstrahar
800. Posi (...) tum differat $z=a+x$, vbi x (...) ilis conside- Neglecto ergo x (...) re ad mo- trahitur $=\frac{b}{y^2}+$ (...) llius prop. $=\frac{3fx}{a^3}$. Haec i (...) una a peri- quadraturis, ma (...) motu angu- syzygiis. (...) grad. vbi (...) constans est
801. Cu (...) linea absi- motum lunae sp (...) et vnitate, ad Astronomiam (...) vero huius instituto nostro (...) tatem con- ficere enim pos (...) neque auge- do canones mo (...) tamen eius tusque respectiu (...) mentorum Quae autem in (...) cum ipsius rum liberum, (...) P dif-

P differentiale sit accipiendum, in eo perperam z tanquam constantem sumus contemplati, eiusque loco a posuimus. Quia autem z non potest dari per y, motus absidum non potest hoc modo determinari. Interim tamen hoc colligitur, si fuerit $ady >$ ydz, lineam absidum in antecedentia, at si $ady <$ ydz in consequentia promoueri, si quidem cogitationem abstrahamus a vi secundum LM agente.

Corollarium 3.

800. Posito $LM=TP=x$, erit proxime $z=a+x$, vbi x est admodum paruum respectu a. Neglecto ergo x prae a erit vis qua luna ad terram trahitur $=\frac{b}{y^2}+\frac{fy}{a^3}$ et vis qua secundum LM trahitur $=\frac{3fx}{a^3}$. Haec igitur euanescit quando luna est in quadraturis, maxima vero est, quando luna est in syzygiis.

Scholion 3.

801. Cum autem non sit huius loci haec ad motum lunae spectantia fusius persequi, quippe quae ad Astronomiam Theoreticam pertinent; ad reliqua instituto nostro accommodata progrediemur. Sufficere enim possunt ista ad intelligendum, quomodo canones motuum traditi, ad quosuis casus motusque respectiuos inueniendos in vsum verti queant. Quae autem in hoc capite restant, motum corporum liberum, qui non sit in eodem plano, comple-

plectuntur. Ex praecedentibus quidem manifestum est, vnica existente vi centripeta, motum corporis semper fieri in eodem plano, quomodocunque etiam corpus initio fuerit proiectum; et si plura sint centra virium in eodem plano sita, in eodemque plano corporis fiat proiectio, curua a corpore descripta similiter tota in eodem plano erit posita. Ad sequentia igitur referri debet, quando corpus a pluribus viribus, quarum directiones in diuersis planis existunt, sollicitatur, vel etiam quando directio, secundum quam corpus initio proiicitur, non in eo, in quo sunt virium directiones, sita est plano. His igitur in casibus motus corporis ita debet considerari, quasi fieret in superficie quadam conuexa seu concaua, in eaque lineam quandam describeret. Natura autem superficiei exprimitur aequatione tres indeterminatas inuoluente, et lineae in ea superficie ductae natura continetur eadem illa aequatione coniuncta cum alia aequatione vel tres quoque illas indeterminatas complectente vel duas tantum. Ex his enim deduci poterit curuae lineae proiectio in dato plano, et ex proiectione et superficie simul innotescit ipsa curua a corpore descripta et in superficie posita. Quemadmodum porro in plano quaeuis vires ad duas normalem et tangentialem possint reduci, ita in hoc negotio virium reductio ad tres vires fieri debet (545), quae, quales in corpus exerant effectus, primum sumus inuestigaturi.

PRO-

PU MOTU

em manifestum motum corporomodocunque m; et si plura a, in eodemque a corpore de- io erit posita. iando corpus a in diuersis pla- uando directio, ur, non in eo, st plano. His ebet considera- n conuexa seu m describeret. aequatione tres : in ea superfi- illa aequatione es quoque illas i tantum. Ex e proiectio in perficie simul ripta et in su- rro in plano tangentialem virium redu- , quae, qua- rimum sumus

PRO-

802. corpus in et in quas se normalis normales data plano planum. nes immut

Assu sit Mm el ctis M et cula MQ in axem, taretur, ritate qu lo, quo element to Mm. APQ per ter se qu ob rem sum absc qua corp dini v, directior leritate

PROPOSITIO 98.

Theorema.

802. *Tres principales vires, quae faciunt, vt corpus in curua non in eodem plano existente moueatur, et in quas aliae vires resolui debent, singulae sunt inter se normales: Earum vna est tangentialis, reliquae duae normales ad eam, quarum altera directionem habet in dato plano, alterius vero directio est normalis ad hoc planum. Harumque virium nulla reliquarum actiones immutare valet.*

Demonstratio.

Assumto plano fixo APQ, in eoque axe AP, sit Mm elementum a corpore descriptum. Ex punctis M et m in planum fixum demittantur perpendicula MQ et mq, et ex punctis Q et q perpendicula in axem, QP, qp. Iam si corpus a nulla vi sollicitaretur, in recta Mm producta progrederetur celeritate quam habuit in Mm; aequali ergo tempusculo, quo Mm percurrit, perueniet in n, descripto elemento mn aequali et in directum posito elemento Mm. Quare demisso quoque ex n in planum APQ perpendiculo nr, erunt elementa Qq et qr inter se quoque aequalia et in directum posita: hanc ob rem perpendiculum $r\pi$ ex r in axem AP demissum abscindet elementum $p\pi = Pp$. Sit celeritas qua corpus elementum Mm describit, debita altitudini v, et consideretur primo vis tangentialis, quae directionem habet iuxta mn et tota in alteranda celeritate absumitur. Ponatur haec vis tangentialis T Tabula IX. Fig. 4.

exi-

existente vi grauitatis $=1$, erit $dv = T.Mm$, et elementum mn absoluitur celeritate debita altitudini $v+dv$. Deinde in plano Mr concipiatur vis directionem habens ms normalem ad corporis directionem Mm. Haec ergo efficiet vt corpus ab mn declinet, et in mv elemento in eodem plano Mr posito progrediatur. Sit haec vis $=N$, et cum radius osculi elementorum Mm et mv, demisso ex v in mn perpendiculo ve fit $=\frac{mv^2}{ve}$, erit $\frac{2v.ve}{mv^2}=N$ (561). Est vero $\frac{ve}{mv}$ sinus anguli nmv. Quamobrem erit $2v.\sin.nmv = N.mv = N.Mm$, ideoque $\sin.nmv = \frac{N.Mm}{2v}$. Tertia vis sit normalis ad vtramque expositarum mn et ms, ita vt eius directio mt sit normalis in planum Mr. Haec igitur vis neque praecedentium actiones impediet, neque ab ipsis impedimentum seu immutationem patietur. Tota ergo impendetur ad corpus a plano Mr detrahendum; deducat ea corpus ex v in μ, ita vt planum $vm\mu$ sit normale in planum Mr; eritque eius effectus angulus $vm\mu$. Hoc igitur effectu eodem, quo circa praecedentem vim normalem fecimus, modo aestimato, si fuerit haec vis M, erit $\sin.vm\mu = \frac{M.Mm}{2v}$. Tres ergo hae vires simul efficient, vt corpus, postquam elementum Mm descripsit, progrediatur in elemento $m\mu$, aucta celeritate debita scilicet altitudini $v+T.Mm$. Quaecunque autem aliae vires corpus sollicitent, eae omnes resolui possunt in huiusmodi tres, quarum directiones sunt mn, ms, mt. Quarum effectus in corpus cum determinauerimus, simul

P TU
simul qu =T. Mm, et
tur. Q. bita altitudi-
piatur vis di-
803. poris directi-
ex μ in ous ab mn de-
rallela ip lano Mr po-
M, m e et cum radi-
Aπ, πϱ misso ex ν in
=N (561).
80 iobrem erit
demittat ue sin. nmv
que mo mque expo-
idem pl t sit norma-
in recta que praece-
et θη=ϱ ipsis impedi-
ita ergo im-
80 ndum; dedu-
fixo AP t sit norma-
Cum igi ngulus vmμ.
erit mt aecedentem
altitudo o, si fuerit
ergo hae vi-
8c m elemen-
PQ=y emento mμ,
+dy; lini v+T.
ϱμ=z+ corpus sol-
qϱ=V(huiusmodi
mt. Qua-
inauerimus,
simul

simul quarumcunque virium effectus cognoscetur. Q. E. D.

Corollarium 1.

803. Sumta $\nu\mu$ in plano $nr\pi$, et demisso ex μ in planum APQ perpendiculo $\mu\varrho$, erit $\mu\varrho$ parallela ipsi rn. Tres igitur coordinatae pro punctis M, m et μ erunt AP, PQ, QM; Ap, pq, qm; et $A\pi$, $\pi\varrho$, $\varrho\mu$.

Corollarium 2.

804. Quare si ex μ in mv perpendiculum $\mu\eta$ demittatur, erit id in planum Mr normale; similique modo $\varrho\theta$, quae est ad qr perpendicularis, in idem planum normalis erit. Quamobrem ob ϱ et μ in recta $\varrho\mu$ huic plano parallela posita, erit $\varrho\theta = \mu\eta$, et $\theta\eta = \varrho\mu$.

Corollarium 3.

805. Si ad Qq ducatur normalis qT in plano fixo APQ, erit haec qT normalis in planum Mr. Cum igitur mt in idem planum sit quoque normalis, erit mt parallela ipsi qT; inter hasque distantia erit altitudo mq.

Corollarium 4.

806. Trium coordinatarum dicantur $AP = x$, $PQ = y$ et $QM = z$. Eritque $Pp = p\pi = dx$; $pq = y + dy$; $qm = z + dz$; atque $\pi\varrho = y + 2dy + ddy$; et $\varrho\mu = z + 2dz + ddz = \theta\eta$. At $Qq = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = qr$; $q\varrho = \sqrt{(dx^2+(dy+ddy)^2)} = q\theta = \sqrt{(dx^2+dy^2)} + \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$; ideoque $r\theta = \frac{dy\,ddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Porro erit $\pi r =$

$\pi r = y + 2dy$ et $rn = z + 2dz$. Denique erit $Mn = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = mn$ et $n\mu = \sqrt{(dx^2 + (dy + ddy)^2 + (dz + ddz)^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + \frac{dyddy + dzddz}{\sqrt{(dz^2 + dz^2 + dz^2)}}$.

Corollarium 5.

807. Quia mq, $\theta\eta$ et $r\nu$ sunt inter se parallelae, in eodem plano et rectis qr ac $m\nu$ terminatae, erit $\theta\eta - qm : q\theta = r\nu - mq : qr$. Est vero $\theta\eta - qm = dz + ddz$; $q\theta = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + \frac{dyddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$ et $qr = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Quare est $r\nu - mq = \frac{(dz + ddz)(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 + dyddy}$ hincque $n\nu = rn - r\nu = -ddz + \frac{dydzddy}{dx^2 + dy^2}$. Vnde reperitur sin. $nm\nu = \frac{dydzddy - dx^2ddz - dy^2ddz}{(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$.

Corollarium 6.

808. Cum deinde sit $r\varrho = -ddy$, et $Qq : Pp = r\varrho : \varrho\theta$ erit $\theta\varrho = -\frac{dxddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = \mu\eta$. Hanc ob rem habebitur sin. $\nu m\mu = -\frac{dxddy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

Corollarium 7.

809. Ex datis igitur tribus viribus T, N et M corpus sollicitantibus orientur tres sequentes aequationes: $dv = T\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $2vdydzddy - 2vddz(dz^2 + dy^2) = N(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ atque $-2vdxddy = M(dx^2 + dy^2 + dz^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, ex quibus tum celeritas corporis in singulis locis tum ipsa curua cognoscuntur.

Co-

Corollarium 8.

810. Duae posteriores aequationes coniunctae et eliminata v dant istam aequationem $\frac{ddz(dx^2 + dy^2)}{dxddy} - \frac{dydz}{dx} = \frac{N\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}}{M}$. Quae assumi potest pro aequatione naturam superficiei exprimente, in qua curua descripta extat.

Scholion.

811. Hac igitur propositione primarias dedimus regulas, ex quibus motus corporis ita sollicitati, vt in eodem plano moueri nequeat, deduci poterit. Ostendimus enim omnes potentias in ternas, quarum effectus determinauimus, posse resolui; et idcirco, quaecunque proponantur potentiae sollicitantes ope talis resolutionis, quem motum eae in corpore producant, cognoscitur. Apparet etiam si potentia M desit, corpus motum suum in plano esse absoluturum, qui igitur casus huc non pertinet. At si potentia tangentialis T euanescat manentibus reliquis M et N, corpus quidem orbitam non planam describet, sed tamen motu vniformi feretur. Quo igitur situs orbitae in vniuersum cognoscatur, inclinationem plani, in quo sunt elementa Mm et $m\mu$, ad planum APQ eiusque cum hoc intersectionem inuestigari oportebit.

PROPOSITIO 99.

Problema.

812. *Determinare plani, in quo duo elementa* Mm *et* mμ *a corpore descripta sunt posita, inclina-* Tabula X. Fig. 1.

nationem ad planum fixum APQ, *eiusque cum hoc intersectionem.*

Solutio.

In plano, cuius inclinationem quaerimus, dantur tria puncta M, m et μ; in hoc igitur plano posita erit quaeuis recta per horum punctorum duo transiens. Quare si recta mM producatur, donec ipsi qQ productae occurrat in S, erit punctum S tum in plano M$m\mu$ tum in plano fixo APQ; transibit ergo per S recta, qua haec plana se mutuo intersecant. Manentibus igitur vt ante $AP=x$, $PQ=y$ et $QM=z$, et elementis abscissae Pp et $p\pi$ inter se aequalibus, erit $qm-QM:Qq=QM:QS$, hincque $QS=\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dz}$. Lineae vero QS positio cognoscitur ex angulo PQS, cuius sinus est $=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Deinde in plano M$m\mu$ quoque situm est punctum n; hanc ob rem recta per n et μ transiens seu huic parallela per M ducta in eodem extabit plano. Haec autem recta occurret plano APQ in puncto R rectae QP productae, et QR cognoscetur ex hac analogia $rn-\varrho\mu:r\varrho=\mu QM:QR$; hinc erit $QR=\frac{zddy}{ddz}$, ideoque $PR=\frac{zddy}{ddz}-y$. Est vero vt $Qq:Pp=QS:PT$ ducta ST perpendiculari in AP. Ex quo oritur $PT=\frac{zdx}{dz}$. Porro est quoque $Pp:pq-PQ=PT:PQ+ST$, ideoque $PQ+ST=\frac{zdy}{dz}$, et $ST=\frac{zdy}{dz}-y$. Occurrat recta RS producta axi AP in O; eritque $PR-ST:PT=PR:PO$, ex quo inuenitur $PO=\frac{zdxddy-ydxddz}{dzddy-dyddz}$; atque AO $=$

$=\frac{xdzddy-xdyddz+ydxddz-zdxddy}{dzddy-dyddz}$. Porro ex his est tangens anguli $POR=\frac{PR}{PO}=\frac{dzddy-dyddz}{dxddz}$; vnde positio intersectionis RO plani M$m\mu$ cum plano fixo APQ innotescit. Inclinatio autem horum planorum mutua inuenitur demittendo ex Q in RS perpendiculo QV; tum enim erit anguli inclinationis tangens $=\frac{MQ}{QV}$. Est vero $QV=\frac{PO.QR}{RO}=\frac{zdxddy}{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}$ ideoque $\frac{MQ}{QV}=\frac{\sqrt{(dx^2ddz^2+(dzddy-dyddz)^2)}}{dxddy}$, ex quo angulus inclinationis mutuae planorum M$m\mu$ et APQ determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

813. Si angulus POR semper maneat idem, erit $\alpha dxddz+dyddz=dzddy$, estque huius anguli tangens $=\alpha$. Aequatio haec integrata dat $\alpha dx+dy+\beta dz=o$, atque $\alpha x+y+\beta z=f$. Ex qua aequatione cognoscitur orbitam a corpore descriptam totam fore in eodem plano positam.

Corollarium 2.

814. Si enim fuerit $\alpha x+y+\beta z=f$, erit $\alpha dx+dy+\beta dz=o$, et $ddy+\beta ddz=o$. Hinc fiet $AO=x+\frac{ydx+\beta zdx}{-dy-\beta dz}$, et cum sit $-dy-\beta dz=\alpha dx$, erit $AO=x+\frac{y}{\alpha}+\frac{\beta z}{\alpha}=\frac{f}{\alpha}$, ideoque et AO constans.

Corollarium 3.

815. Deinde manente angulo POR constante seu $\alpha x+y+\beta z=f$; erit tangens anguli inclinationis

onis planorum $Mm\mu$ et $APQ = \frac{\sqrt{(dx^2+(-dy-\beta dz)^2)}}{-\beta ax} = \frac{\sqrt{(1+x^2)}}{-\beta}$. Quare et iste angulus erit constans.

Corollarium 4.

816. Neque etiam punctum interfectionis O inuariabile poni potest, nisi simul orbita a corpore descripta fiat plana. Nam fit $AO=f$, et ponatur $x-f=t$, et $dx=dt$; erit $tdzddy-tdyddz=zdtddy-ydtddz$; hincque $\frac{ddy}{tdy-ydt}=\frac{ddz}{tdz-zdt}$. Multiplicetur per t, quo habeatur $\frac{tddy}{tdy-ydt}=\frac{tddz}{tdz-zdt}$. Quae aequatio ob dt constans est integrabilis; namque erit $tdy-ydt=\alpha tdz-\alpha zdt$. Haec diuisa per tt et integrata dabit $\frac{y}{t}=\frac{\alpha z}{t}+\beta$, seu $y=\alpha z+\beta x-\beta f$. Quam perspicuum est esse ad superficiem planam.

Corollarium 5.

817. At si ponatur tangens anguli inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ constans, huius modi aequatio $\alpha x+y+\beta z=f$ non prodit; Atque aliunde manifestum est orbitam a corpore descriptam tum non necessario esse planum.

Corollarium 6.

818. Quare ne curua a corpore descripta sit plana, neque punctum O, neque angulus POR inuariabiles accipi possunt. Haec autem si sint variabilia, nihilo tamen minus angulus inclinationis planorum $Mm\mu$ et APQ constans esse potest.

Co-

PUNCT. [MOTU]

819. Li nomia linea no stantem positio Nam recta mM Mm et praeced cedens se in S

820. Pu vbi est AT= positio puncti S

821. Si $xdz-zdx=adz$ $x-a=\alpha z$ et $y-$ pore descripta nea recta; qu propter $y-b=$

822. E tum corporu nent, ipsa tract partes potest ex datis viribu tam, in alter ua, quam cor quirantur. H

Corollarium 7.

819. Linea interfectionis RO, quae in Astronomia linea nodorum appellatur, si non habeat constantem positionem, conuertitur circa punctum S. Nam recta mMS posita est in plano elementorum Mm et praecedentis. Quare interfectio RO et praecedens se in S decussabunt.

Corollarium 8.

820. Punctum igitur hoc S est in eo loco, vbi est $AT=\frac{xdz-zdx}{dz}$ et $ST=\frac{zdy-ydz}{dz}$. Ex quibus positio puncti S cognoscitur.

Corollarium 9.

821. Si ponatur punctum S inuariabile, erit $xdz-zdx=adz$ et $zdz-ydz=bdz$, vnde reperitur $x-a=\alpha z$ et $y-b=\beta z$. Hoc igitur casu orbita a corpore descripta non solum est plana, sed etiam linea recta; quia proiectio eius Qq sit recta, et propter $y-b=\beta z$ etiam $Mm\mu$.

Scholion.

822. Expositis nunc principiis, quae ad motum corporum in superficiebus non planis pertinent, ipsa tractatio vt prior de motu in plano in duas partes potest diuidi. In quarum prima docebimus ex datis viribus inuenire curuam a corpore descriptam, in altera vero ostendetur, si data fuerit curua, quam corpus describit, quales vires ad hoc requirantur. Hic vel curua ipsa tantum potest esse da-

data, vel simul quoque celeritas corporis in singulis locis.

PROPOSITIO 100.

Problema.

Tabula X. Fig. 2. 824. *Si corpus sollicitetur a tribus potentiis quarum directiones Mf, Mg et MQ sint parallelae tribus coordinatis AP, PQ et QM; determinare motum corporis et orbitam, in qua mouebitur.*

Solutio.

Quia Mf et Mg sunt parallelae ipsis AP et PQ, erit planum fMg parallelum plano APQ. In hoc plano ducatur Mi parallela elemento Qq, erit haec Mi quoque posita in plano Mq. In elementum mM productum demittatur ex Q perpendiculum Qd; atque ex f et g in Mi perpendicula fi et gk. Deinde ex i et k in Md cadant perpendicula ib et kc. Erunt autem fi et gk perpendiculares in planum Mq, quia planum fMg est normale ad planum Mq. Manentibus nunc vt ante $AP=x$; $PQ=y$; et $QM=z$: sit vis corpus secundum Mf trahens $=P$; vis, quae corpus secundum Mg trahit $=Q$ et vis secundum MQ trahens $=R$. Hae igitur vires, vt earum effectus cognoscantur, resolui debent in vires tangentialem iuxta Mm agentem; normalem ad Mm in plano MQ sitam, et normalem ad planum Mq. Ob ang. $Mfi=Qqp$ erit $\surd(dx^2+dy^2):dy=P:\frac{Pdy}{\surd(dx^2+dy^2)}$ exprimitque $\frac{Pdy}{\surd(dx^2+dy^2)}$ vim ex P ortam secundum if agentem, et si P sola ageret foret per (802) $M=-\frac{Pdy}{\surd(dx^2+dy^2)}$.

Deinde vis secundum Mi trahens erit $=\frac{Pdx}{\surd(dx^2+dy^2)}$. Haec porro resoluitur in vim secundum bi trahentem $=\frac{Pdxdz}{\surd(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et vim secundum Mb trahentem $=\frac{Pdx}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex P igitur erit $N=-\frac{Pdxdz}{\surd(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $T=-\frac{Pdx}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Simili modo vis Q, cuius directio est Mq, resoluitur in vim secundum kg agentem $=\frac{Qdx}{\surd(dx^2+dy^2)}$ et vim secundum $Mk=\frac{Qdy}{\surd(dx^2+dy^2)}$. Haec vlterius resoluitur in vim secundum $ck=\frac{Qdydx}{\surd(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et vim secundum $Mc=\frac{Qdy}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Quare si haec vis sola ageret; haberetur $T=-\frac{Qdy}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$; $N=-\frac{Qdydz}{\surd(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $M=\frac{Qdx}{\surd(dx^2+dy^2)}$. Denique vis R directionem MQ habens resoluitur in vim secundum $Md=\frac{Rdz}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et vim secundum $dQ=\frac{R\surd(dx^2+dy^2)}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex vi R igitur foret $T=-\frac{Rdz}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $N=\frac{R\surd(dx^2+dy^2)}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Omnibus igitur hisce tribus viribus P, Q et R simul agentibus erit vis tangentialis ex omnibus orta $T=-\frac{Pdx-Qdy-Rdz}{\surd(dx^2+dy^2+dz^2)}$, vis normalis in plano Mq, quae posita est $N=-\frac{Pdxdz-Qdydz+Rdx^2+Rdy^2}{\surd(dx^2+dy^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Atque altera vis normalis $M=-\frac{Pdy+Qdx}{\surd(dx^2+dy^2)}$. His valoribus substitutis loco T, N et M in aequationibus §. 809 prodibunt tres sequentes aequationes $dv=-Pdx-Qdy-Rdz$; $\frac{2vdydzddy-2vddz(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2+dz^2}=-Pdxdz-Qdydz+R(dx^2+dy^2)$, atque $\frac{2vdxddy}{dx^2+dy^2+dz^2}=Pdy-Qdx$.

$-Qdx$. Quae aequationes motum corporis determinant. Q. E. I.

Corollarium 1.

824. Duae hae posteriores aequationes dant istam analogiam: $dydzddy - ddz(dx^2+dy^2) : dxddy = -Pdxdz - Qdydz + R(dx^2+dy^2) : Pdy - Qdx$. Ex qua reperitur $ddy : ddz = Pdy - Qdx : Pdz - Rdx$.

Corollarium 2.

Tabula X. Fig. 1.

825. Planum ergo $Mm\mu$, in quo sunt elementa Mm et $m\mu$ hoc modo definitur. Erit $AO = x - \frac{Pydz + Pzdy - Qzdx + Rydx}{Qdz - Rdy} = -\frac{Pydz + Pzdy + Qxdz - Qzdx + Rydx - Rxdy}{Qdz - Rdy}$; et tang. angulus $POR = -\frac{Qdz + Rdy}{Pdz - Rdx}$. Atque tangens anguli, quem planum $Mm\mu$ facit cum plano $APQ = \frac{\sqrt{((Pdz-Rdx)^2 + (Qdz-Rdy)^2)}}{Pdy - Qdx}$.

Corollarium 3.

826. Si potentia P euanescat, reperitur $Q = -\frac{2vddy}{dx^2+dy^2+dz^2}$ et $R = -\frac{dv}{dz} + \frac{2vdyddy}{dz(dx^2+dy^2+dz^2)}$, ex duabus aequationibus inuentarum. Et ex tertia prodibit $\frac{dv}{2v} = -\frac{dyddy + dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2}$, cuius integralis est $vdx^2 = a(dx^2+dy^2+dz^2)$ seu $dx\sqrt{v} = \sqrt{a}(dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Corollarium 4.

827. Hac igitur hypothesi erit tempus seu $\int \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a}} = \frac{x}{\sqrt{a}}$. Ex quo intelligitur

PUN MOTU
tur motun corporis deter-
AP paralle
828. equationes dant
et R = − +dy²):dxddy=
Ex quibus Qdx. Ex qua
scripta de dx.
829. in quo sunt
spicitur ad modo definitur.
consideraui = −
cogitari pc tang. angulus
potentiis n anguli, quem
inueniatur A P Q =
ista propo
at, reperitur
830. , ex
AP secunda Et ex tertia
missa; dete egralis est vdx²
v = V a (d x²
Ducti
QM, z: c rit tempus seu
MP agens quo intelligi-
MQ et M tur

tur motum corporis progressiuum secundum axi AP parallelas esse vniformem.

Corollarium 5.

828. Eadem porro hypothesi erit $Q = -\frac{2addy}{dx^2}$ et $R = -\frac{2addz}{dx^2}$, propter $ddy : ddz = Q : R$ (824). Ex quibus aequationibus ipsa curua a corpore descripta determinabitur.

Scholion.

829. Ex resolutione potentiarum facile perspicitur ad tres potentias, quas in hac propositione considerauimus, omnes omnino potentias, quae excogitari possunt, reduci posse. Quare cum datis his potentiis non difficulter curua a corpore descripta inueniatur, etiam pro quibusque casibus propositis ista propositio maximam habebit vtilitatem.

PROPOSITIO 101.
Problema.

830. *Si corpus perpetuo vrgeatur versus axem AP secundum perpendicula MP a corpore ad axem demissa; determinari oportet motum corporis.* Tabula X. Fig. 3.

Solutio.

Ductis coordinatis vt ante AP, x; PQ, y; et QM, z: erit $MP = \sqrt{(y^2+z^2)}$. Sit vis secundum MP agens $= V$, eaque resoluatur in duas secundum MQ et Mg trahentes, vbi Mg est parallela ipsi PQ eique

eique aequalis. Erit igitur vis fecundum MQ agens $= \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et vis fecundum $Mg = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. His cum propofitione praecedente comparatis erit $P=0$, $Q = \frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$ et $R = \frac{Vz}{\sqrt{(y^2+z^2)}}$. Quare habebitur $ddy:ddz = Q:R = y:z$ (828) atque $yddz = zddy$ feu $yddz - zddy = 0$; cuius aequationis integralis eft $ydz - zdy = bdx$. Porro erit $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = -\frac{2addy}{dx^2}$. Quae aequationes coniunctae determinant curuam a corpore defcriptam. Corporis autem celeritas dabitur per aequationem $vdx^2 = a(dx^2+dy^2+dz^2)$, feu ipfa celeritas erit $= \frac{\sqrt{a(dx^2+dy^2+dz^2)}}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

831. Ponatur $dx = pdy$, erit ob dx conftans, $0 = pddy + dpdy$ feu $ddy = -\frac{dpdy}{p}$. His fubftitutis ad cognofcendam curuam defcriptam habebuntur iftae aequationes $ydz - zdy = bpdy$ et $\frac{Vy}{\sqrt{(y^2+z^2)}} = \frac{2adp}{p^3dy}$.

Corollarium 2.

832. Si porro ponatur $z = qy$, iftae aequationes tranfibunt in $y^2dq = bpdy$ et $\frac{V}{\sqrt{(1+qq)}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quae etiam tres continent variabiles.

Scholion 1.

833. Ad haec clarius exponenda maxime conuenit exempla adhibere. Quamobrem aliquot afferemus in quibus vis V a diftantia MP pendere ponitur, eamque poteftatibus aliquibus ipfius MP proportionalem ponemus; quo ifte motus cum motu in plano a vi centripeta diftantiarum poteftati cuidam proportionali comparari poffit. Inter hos enim cafus magna eft fimilitudo, cum quod eft in plano centrum virium hoc loco eft quafi axis virium, ad quem corpus perpetuo attrahitur. Atque fi initio corpus ita proiiciatur, vt non habeat motum progreffiuum fecundum axem AP, motus eius fiet in plano PQM, et corpus attrahetur perpetuo ad punctum P centrum virium.

Exemplum 1.

834. Sit vis V diftantiae MP directe proportionalis, ponaturque $V = \frac{\sqrt{(y^2+z^2)}}{f}$. Erit ergo $\frac{y}{f} = \frac{2adp}{p^3dy}$ (831) et integrando $\frac{y^2}{2f} = C - \frac{a}{p^2}$. feu $\frac{1}{pp} = \frac{2cf-yy}{2af}$ et $p = \frac{\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$. Cum autem fit $dq = \frac{bpdy}{y^2}$ (832) erit $\frac{bdy\sqrt{2af}}{y^2\sqrt{(2cf-y^2)}} = dq$. Cuius integralis eft $q = a - \frac{\mathfrak{G}\sqrt{(2cf-y^2)}}{y}$, denotante $\mathfrak{G} = \frac{b\sqrt{2af}}{2cf}$. Quare habebitur $z = ay - \mathfrak{G}\sqrt{(2cf-y^2)}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae defcriptae in plano ad axem AP normali, quam igitur perfpicitur effe ellipfin, cuius centrum in axe AP eft pofitum. Deinde cum fit $dx = pdy$, erit $dx = \frac{dy\sqrt{2af}}{\sqrt{(2cf-y^2)}}$, quae aequatio exprimit proiectionem curuae quaefitae in plano APQ. Haec itaque eft linea finuum *Leibnitiana*, cum abfciffa x fit vt arcus, cuius finus eft applicata y.

Exemplum 2.

835. Si fuerit vis V reciproce vt quadratum diftantiae MP; feu $V = \frac{ff}{y^2+z^2} = \frac{ff}{yy(1+q^2)}$, ob $z = qy$. Quam-

Z z

Quamobrem habebitur $\frac{ff}{y^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2adp}{p^3dy}$. Quia autem est $dy = \frac{y^2dq}{bp}$ (832), erit $\frac{f^2dq}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2abdy}{p^2}$; cuius integralis est $\frac{ffq}{\surd(1+qq)} = C - \frac{2ab}{p} = C - \frac{2ab^2dy}{y^2dy}$, loco p ipsius valore $\frac{y^2dq}{bdy}$ substituto. Hinc fit $\frac{f^2qdq}{\surd(1+q^2)} = Cdq - \frac{2ab^2dy}{y^2}$, et integrando $f^2\surd(1+q^2) = Cq + \frac{2ab^2}{y} + D$. Quare dum fit $q = \frac{z}{y}$; prodibit $f^2\surd(y^2+z^2) = Cz + Dy + 2ab^2$. Quae est aequatio pro proiectione curuae descriptae in plano ad axem AP normali; quam igitur colligi potest esse ad sectionem conicam, cuius alteruter focus sit in axe AP positus.

Scholion 2.

836. Ex his intelligitur proiectiones curuarum descriptarum in plano ad axem AP normali, congruere cum curuis, quas corpora in hoc plano mota describerent ab eadem vi sollicitata. Neque autem hoc mirum est; nam motus, quem hoc loco consideramus, reduci potest ad motum in plano ad axem AP normali factum a corpore ad axem perpetuo attracto; dummodo huic plano motus vniformis secundum axem AP impressus concipiatur. Namque iste motus progressiuus, quia fit vniformiter in directum, motum corporis in plano turbare nequit. Haec igitur conuenientia iam deduci potuisset ex 827, vbi si vis P euanescit, motus corporis secundum axem progressiuus aequabilis est ostensus. Quamobrem quoties vis P in nihilum abit; tum semper motus quaesitus ad motum in plano factum potest reduci. Hoc scilicet fiet si plano ad axem AP normali tantus motus retro secundum PA imprimatur, quantum habere inuentum est secundum AP progressiuum (827).

Scholion 3.

837. Interim tamen hoc maxime attendi meretur, quod tam facile in exemplis propositis aequationes inter coordinatas orthogonales pro curuarum proiectionibus in plano ad axem AP normali atque adeo pro ipsis curuis a corpore descriptis si motus progressiuus euanescat, inuenerimus. In huius capitis enim priore parte qua motus in plano a vi centripeta generales considerauimus, multo maiore opus fuit labore et comparatione arcuum circularium vt ad aequationes consuetas pro curuis descriptis peruenerimus. Maior igitur generalitas, quae saepissime inuentionem quaesiti difficiliorem reddit, hoc loco non solum non est impedimento, sed etiam facillime id determinat, quod in particulari sensu difficile erat inuentu.

Corollarium 3.

838. In casu huius propositionis planum elementorum Mm et $m\mu$ facile determinatur. Nam ob $ddy:ddz = y:z$ erit $PO = o$ et $AO = x$, incidetque O in Tabula X. Fig. 1.

in P. Porro tang. ang. POR $= \frac{ydz - zdy}{zdx} = \frac{b}{z}$ ob $ydz - zdy = bdx$. Cotangens igitur anguli FOR eſt vt QM. Denique tangens anguli inclinationis plani $Mm\mu$ ad planum APQ eſt $= \frac{\sqrt{(z^2+b^2)}}{y}$.

Scholion 4.

839. Cum caſus, quo vis P euaneſcit, ad motum in plano poſſit reduci; reduci quoque poterit ad motum in plano ſi vel Q vel R deſit. Nam ſi axis capiatur in recta ad AP normali in plano APQ, vis Q directionem habebit axi parallelam, et reliquae P et R tractabuntur, vt ante Q et R. At ſi axis ſumatur normalis ad AP et ad planum APQ, vis R locum vis P axi parallelae occupabit. Scilicet quemadmodum coordinatae x, y et z reſpectu ſitus inter ſe poſſunt commutari, ſimiliter etiam de viribus P, Q et R eſt iudicandum.

PROPOSITIO 102.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1. 840. *Si corpus in ſingulis punctis M duplici vi ſollicitetur vna cuius directio eſt* MA; *et altera cuius directio eſt* MQ *normalis ex* M *in planum* APQ *demiſſa: oportet determinari motum corporis* M, *et orbitam eius.*

Solutio.

Ducta MP, quae ſit normalis in AP, vis MA reſoluatur in vires ſecundum $M\int$ ipſi AP parallelam, et ſecundum MP agentes. Haec vero vis iuxta MP re-

ſoluitur in vires ſecundum MQ et Mg agentes. Poſitis igitur vt ante AP $= x$, PQ $= y$ et QM $= z$; et vi ſecundum MA trahente $= V$, et vi ſecundum MQ $= W$, atque reſolutione virium inſtituta et comparatione facta cum prop. 100. reperietur $P = \frac{Vx}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $Q = \frac{Vy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ et $R = W + \frac{Vz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$. Atque ex aequationibus eiusdem prop. prodibit $V = \frac{2vdxddy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$ et $W = \frac{2vddy(xdz-zdx)-2vddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)(dx^2+dy^2+dz^2)}$. Ex his inuenitur $\frac{dv}{2v} = \frac{dyddy+dzddz}{dx^2+dy^2+dz^2} - \frac{xddy}{xdy-ydx}$; hincque integrando $l\sqrt{v} = l\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{xdy-ydx} + la\sqrt{a}$, ſeu $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$; ſiue $v = \frac{a^3(dx^2+dy^2+dz^2)}{(xdy-ydx)^2}$. Hic valor loco v ſubſtitutus dat has aequationes $V = \frac{2a^3dxddy\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{(xdy-ydx)^3}$ et $W = \frac{2a^3ddy(xdz-zdx)-2a^3ddz(xdy-ydx)}{(xdy-ydx)^3}$. Ex quibus curua deſcripta determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

841. Tempus quo corpus in M vsque peruenit, eſt $\int\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}}{\sqrt{v}}$. Cum autem ſit $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}(dx^2+dy^2+dz^2)}{xdy-ydx}$, erit illud tempus $= \frac{\int(xdy-ydx)}{a\sqrt{a}}$, quod per quadraturam proiectionis curuae deſcriptae in plano APQ cognoſcitur.

Corollarium 2.

842. Si ponatur $y = px$ et $z = qx$; prodibunt ſequentes aequationes $V = \frac{2a^3dx(xddp + [illegible])\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{x^3dp^2}$

 et

et $W = \frac{2a^3 dq ddp - 2a^3 dp ddq}{x^3 dp^3}$, Quae ad curuam cognoscendam inferuiunt.

Exemplum.

843. Si vis V fuerit distantiae MP proportionalis et vis W perpendiculo MQ; ponatur $V = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$ et $W = \frac{z}{g}$, vt itaque sit $V = \frac{x\sqrt{(1+p^2+q^2)}}{f}$ et $W = \frac{qx}{g}$. Quare per aequationes praeced. Coroll. erit $x^6 dp^3 = 2a^3 f dx (x ddp + 2dx dp)$ et $x^4 q dp^3 = 2a^3 g dq ddp - 2a^3 g dp ddq$. Illius aequationis integralis est $x^2 = C - \frac{2a^3 f dx^2}{x^4 dp^2}$; ex qua oritur $dp = \frac{a dx \sqrt{2af}}{x^2 \sqrt{(c^2-x^2)}}$; huiusque integralis $p = \frac{y}{x} = C - \frac{a\sqrt{2af(c^2-x^2)}}{c^2 x}$, seu $y = nx - \frac{a\sqrt{2af(c^2-x^2)}}{c^2}$, pro aequatione proiectionis curuae descriptae in plano APQ, quae igitur est ellipsis, cuius centrum in A est positum. Ex inuento ipsius dp valore erit porro $ddp = -\frac{a dx^2 (2c^2-3x^2)\sqrt{2af}}{x^3 (c^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ quibus loco dp et ddp valoribus in altera aequatione substitutis orietur $afqx dx^2 = -2acc g dx dq + 3ag x^2 dx dq - ac^2 g x ddq + ag x^3 ddq$. Ponatur $q = c^{\int r dx}$ prodibit $f x dx = -c^2 g x dr + g x^3 dr - 2cc g r dx + 3g x^2 r dx - c^2 g x r^2 dx + g x^3 r^2 dx$. Fiat $r = \frac{u}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}}$, proueniet que $f x dx = -\frac{g du \sqrt{(cc-x^2)}}{x} - \frac{g u^2 dx}{x^3}$ seu $du + \frac{u^2 dx}{x^2\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{f x^2 dx}{g\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$. Quae posito $t = \frac{\sqrt{(c^2-x^2)}}{x}$ seu $x = \frac{c}{\sqrt{(1+tt)}}$ transibit in hanc; Tabula X. Fig. 1. $du - \frac{u^2 dt}{cc} = \frac{ccf dt}{g(1+tt)^2}$; cuius integrale postea exhibebimus. Ad planum cognoscendum, in quo elementa Mm et $m\mu$ sunt sita, ob $ddy : ddz = gx dy - gy dx : gx dz - bz dx$ posito b loco $f+g$ reperietur $AO = \frac{fz(xdy-ydx)}{bz dy - g y dz}$; tang. ang. $POR = \frac{bz dy - g y dz}{g x dz - bz dx}$. Atque tang. ang. plani $Mm\mu$ cum plano $APQ = \frac{\sqrt{((bz dy - g y dz)^2 + (g x dz - bz dx)^2)}}{g(x dy - y dx)}$. Denique tempus quo corpus in M peruenit cum sit $= \frac{\int xx dp}{a\sqrt{a}}$, erit $= \int \frac{dx\sqrt{2f}}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Erit itaque hoc tempus proportionale angulo cuius sinus est abscissa x, existente sinu toto $= c$, seu cuius sinus est $\frac{x}{c}$, si sinus totus capiatur $= 1$. Ex quo perspicitur motum corporis in proiectione in plano APQ facta angularem circa A esse vniformem, et tempus vnius reuolutionis esse vt $\sqrt{f}$.

Corollarium 3.

844. Proiectio curuae descriptae in plano APQ fit circulus, si est $n = 0$ et $-a\sqrt{2af} = cc$; cuius centrum est in A et radius $= c$. Erit igitur $y = \sqrt{(c^2-x^2)}$. Atque z dabitur ex hac aequatione $\frac{g ddz}{a x} = \frac{g x dz - bz dx}{cc - xx}$, quae aeque late patet ac casus exempli praecedentis, etiamsi hic casus particularis sit consideratus.

Corollarium 4.

845. Ad inuentum ipsius z valorem ex aequatione $\frac{g ddz}{ax} = \frac{g x dz - bz dx}{cc - xx}$, pono $z = c^{\int r dx}$. Quo facto prodibit aequatio differentialis primi gradus haec: $g dr + g r^2 dx = \frac{g r x dx - b dx}{cc - xx}$. Fiat $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ prodibitque $g du + \frac{g u^2 dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} + \frac{b dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$. Posito $\frac{b}{g}$ seu $\frac{f+g}{g} = m^2$,

$= m^2$, orietur aequatio ista $\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = 0$, in qua indeterminatae iam sunt a se inuicem separatae.

Corollarium 5.

846. Est vero $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = +\sqrt{-1}\, l(\sqrt{(cc-xx)} - x\sqrt{-1})$ et $\int \frac{du}{u^2+m^2} = \frac{1}{2m\sqrt{-1}}\, l\, \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$. Addita igitur constante et sumtis numeris habebitur $\left(\frac{\sqrt{(cc-xx)} - x\sqrt{-1}}{b}\right)^{2m} = \frac{u-m\sqrt{-1}}{u+m\sqrt{-1}}$ hincque $u = \frac{(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\, m\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}}$.

Corollarium 6.

847. Cum vero sit $lz = \int r\,dx$, atque $r = \frac{u}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ erit $lz = \int \frac{m\,dx\,(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Ponatur $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} = s$; erit $s = \sqrt{-1}\, l\, \frac{\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1}}{b}$ et $e^{\frac{s}{\sqrt{-1}}} b = \sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1}$, atque $lz = \int \frac{m\,ds\,(1 + e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})\sqrt{-1}}{1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}}}$, seu posito $e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}} = t$ vt sit $ds = \frac{dt\sqrt{-1}}{2mt}$, erit $lz = \int \frac{-dt\,(1+t)}{2t\,(1-t)} = l\, \frac{(1-t)k}{\sqrt{t}}$, vnde fit $z = \frac{(1 - e^{\frac{2ms}{\sqrt{-1}}})k}{e^{\frac{ms}{\sqrt{-1}}}} = \frac{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})k}{b^m(\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^m}$

Co-

Corollarium 7.

848. Inuento nunc valore ipsius z erit $dz = \frac{mz\,dx\,(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Atque $\frac{gx\,dz - bz\,dx}{z} = \frac{mg\,dx\,(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\, x\sqrt{-1} - m^2 g\,dx\,(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}{(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)}}$

Porroque posito $y = \sqrt{(c^2-x^2)}$ erit $\frac{bz\,dy - gy\,dz}{z} = \frac{m^2 gz\,dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}} - \frac{mg\,dx\,(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}}$.

Corollarium 8.

849. Ex his denique inuenietur $AO = \frac{fcc(b^{2m} - \sqrt{c^2}}{m^2 gx(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m} + mg(b^{2m} - x^2) - x\sqrt{-1})^{2m}) + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}$, et tang.

$$POR = \frac{mx(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}) + (b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m}\sqrt{-1}(c^2-x^2)}{m(b^{2m} - (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{(c^2-x^2)} - x(b^{2m} + (\sqrt{(c^2-x^2)} - x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}.$$

Simili modo ex his inuenitur angulus inclinationis plani, in quo corpus mouetur, ad planum APQ.

Scho-

Scholion.

850. Inuentorum valorum ipfius z et orbitae inclinationis applicatio fit ad modum difficilis ob quantitates imaginarias inuicem permixtas. Hinc ob rem iis longius immorari noluimus ad intersectiones curuae a corpore defcriptae cum plano APQ determinandas. Quia autem magni eft momenti haec quaeftio in Aftronomia ad motum nodorum inueniendum, fequens huic negotio deftinata eft propofitio, in quo loco, vbi corpus motu fuo in planum APQ perueniat, inueftigabimus. Corpus enim partim fupra hoc planum motum fuum abfoluit partim infra; et fiue fupra fit fiue infra, corpus perpetuo trahitur altera vi W ad hoc planum in ratione directa diftantiae ab hoc plano. Punctum vero in plano APQ, per quod corpus ex fuperiore parte in inferiorem tranfit vocatur nodus defcendens, punctum vero per quod in fuperiora reuertitur nodus ascendens.

PROPOSITIO 103.

Problema.

Tabula XI. Fig. 1.

851. *Si corpus attrahatur perpetuo partim ad punctum fixum A in ratione diftantiarum ab eodem, partim normaliter ad planum APQ in ratione quoque diftantiarum ab hoc plano: determinare nodos feu puncta, in quibus corpus in hoc planum peruenit; et praeterea etiam puncta, in quibus corpus ab hoc plano maxime diftat.*

Solutio.

Manentibus vt ante tribus coordinatis x, y et z, atque vi, qua corpus ad A trahitur $= \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}{f}$, ac vi, qua corpus ad planum APQ trahitur $= \frac{z}{g}$, pofitoque $\frac{f+g}{g} = m^2$: manifeftum eft corpus in ipfum planum APQ incidere, vbi erit $z=0$. Fit autem $z=0$, quoties eft $b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=0$ (847). Hocque euenit quoties eft $u=\infty$ (846). Cum igitur fit $\frac{du}{u^2+m^2}+\frac{dx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}=0$ (845), centro A defcribatur circulus BQC, radio AB$=c$; corpusque iuxta plagam BQC moueatur; et loco illius aequationis fumatur haec aequiualens $\frac{\frac{c^3}{m^2}du}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2}+\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}=0$, feu $\frac{\frac{1}{m}\cdot cc\cdot\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = -\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$. Cuius integralis eft $\frac{1}{m}\int\frac{cc\cdot\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = C-\int\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$; in qua $\int\frac{cc\cdot\frac{cdu}{m}}{\frac{ccuu}{m^2}+c^2}$ exprimit arcum cuius tangens eft $\frac{cu}{m}$, et $\int\frac{cdx}{\sqrt{(c^2-x^2)}}$ arcum BQ cuius finus eft AP$=x$. Sit C arcus BQC, feu quadrans circuli, et tangens CS$=\frac{cu}{m}$, cui refpondeat arcus CR. Tranfibit ergo illa aequatio in hanc $\frac{1}{m}$CQR$=$CQ, atque CR$=m$. CQ. Ex hoc perfpicuum eft fore $u=\infty$, quo-

quoties angulus CAR fuerit rectus, vel aequalis tribus aut quinque aut 7 etc. rectis. Sequendo itaque corporis motum, erit u infinitum, si arcus CR successiue fiat aequalis sequentibus graduum numeris; 90; -90; -270; -450; -630; etc. Tunc autem arcus CQ tenebit gradus; $\frac{90}{m}$; $-\frac{90}{m}$; $-\frac{270}{m}$; $\frac{450}{m}$; $-\frac{630}{m}$; etc. atque arcus BQ: $90-\frac{90}{m}$; $90+\frac{90}{m}$; $90+\frac{270}{m}$; $90+\frac{450}{m}$; $90+\frac{630}{m}$; etc. Quare si corpus alicubi fuerit in nodo, ad alios nodos perueniet successiue absolutis motu angulari circa A angulis graduum: $\frac{180}{m}$; $\frac{360}{m}$; $\frac{540}{m}$; $\frac{720}{m}$; etc. Duo igitur nodi proximi a se inuicem distabunt angulo $\frac{180}{m}$ grad. Atque nodus ascendens vel descendens distabit a sequente nodo eiusdem nominis angulo $\frac{360}{m}$ grad. i. e. angulo $\frac{360.\sqrt{g}}{\sqrt{(g+f)}}$ grad. Q. E. Prius.

Maxime deinde corpus a plano APQ distabit, vbi erit $dz=0$; id quod euenit quoties $b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m}=0$ (848). His autem in casibus fit $u=0$. Manente ergo priore constructione euadet $u=0$, quoties fit $CR=0$, vel -180, vel -360; etc. grad. Tum autem arcus CQ continebit gradus; 0, $-\frac{180}{m}$, $-\frac{360}{m}$, $-\frac{540}{m}$, etc. ideoque arcus BQ habebit gradus: 90; $90+\frac{180}{m}$; $90+\frac{360}{m}$; $90+\frac{540}{m}$, etc. Maxima igitur corporis a plano APQ distantia aequaliter distat a nodis vtrinque proximis. Q. E. Posterius.

Corollarium 1.

852. Nodi igitur in idem tandem recident punctum si fuerit m numerus rationalis seu $\frac{(f+g)}{g}$ numerus quadratus. At si $\frac{f+g}{g}$ non fuerit numerus quadratus, corpus nunquam in eodem puncto in planum APQ incidet, in quo ante aliquando inciderit.

Corollarium 2.

853. Si f est numerus affirmatiuus, seu si corpus perpetuo ad planum attrahatur vi positiua; erit m numerus vnitate maior. Interuallum ergo inter duos nodos proximos minus erit quam ang. 180 grad. Quare nodi retrograediuntur: et nodus sequens ab oppositione praecedentis nodi distabit angulo $\frac{180(m-1)}{m}$ grad.

Corollarium 3.

854. Si corpus perpetuo a plano APQ repellatur sit g numerus negatiuus, atque $m=\sqrt{\frac{g-f}{g}}$. Quare si $g>f$, est m numerus realis sed vnitate minor; tum igitur nodi in consequentia progrediuntur eo celerius, quo minus f ab g distabit. Atque si $f=g$, tum corpus e nodo egressum nunquam in superficiem APQ reuertetur. At si $f>g$, corpus perpetuo ab hoc plano discedet.

Corollarium 4.

855. Quia corpus a plano APQ maxime distat, quando fit $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m} = -b^{2m}$: ipsa maxima distantia habebitur, si in valore ipsius z inuento (847), haec fiat substitutio. Inuenietur autem haec maxima distantia $= \frac{2k}{\sqrt{-1}}$, quae igitur vbique est eadem.

Corollarium 5.

856. Si hic circulus BQC fuerit proiectio orbitae a corpore descriptae in plano APQ, erit anguli inclinationis plani orbitae ad planum APQ tangens $= \frac{2k}{c\sqrt{-1}}$ in locis vbi corpus maxime ab hoc plano distat; seu $= \frac{2k}{c}$ posito k loco $\frac{k}{\sqrt{-1}}$, cum constans k talem debeat habere valorem ad imaginaria euitanda.

Corollarium 6.

857. Eadem manente hypothesi, in locis vbi corpus in planum APQ incidit tangens anguli inclinationis erit $= \frac{dz\sqrt{(c^2-x^2)}}{cdx}$, existente $(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m} = b^{2m}$. Fiet itaque ista tangens $= \frac{mz(b^{2m}+(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})\sqrt{-1}}{(b^{2m}-(\sqrt{(c^2-x^2)}-x\sqrt{-1})^{2m})c}$ (et loco z suo posito valore) $= \frac{2mk\sqrt{-1}}{c}$ seu idoneo loco k valore substituto erit illa tangens $= \frac{2mk}{c}$.

Corollarium 7.

858. Tangens igitur inclinationis orbitae a corpore descriptae ad planum APQ, si corpus a plano APQ maxime distat est ad eandem tangentem si corpus in hoc planum incidit vt 1 ad m. Fiet ergo vt distantia duorum nodorum ad 180 gradus, ita inclinatio orbitae, si corpus a nodis maxime distat, ad inclinationem orbitae a corpore descriptae, si corpus in ipsis versatur nodis.

Scholion.

859. Haec quidem propositio parum vtilitatis habere videtur in astronomia, eo quod vim, qua corpus ad punctum fixum A trahitur, distantiae proportionalem faciamus; in corporibus vero coelestibus vis reciproce quadratis distantiarum proportionalis locum habeat. Vsus tamen eius eximius est, si orbitae corporum non multum a circulis differant; nam orbita in circulum abeunte, nihil interest, quomodocunque vis centripeta a distantiis pendeat. Quamobrem cum orbitae planetarum non multum a circulis discrepent, haec propositio bono cum successu ad

ad eos motus poteſt accommodari. Hocque tum maxime eſt faciendum, vt linea f inueniatur, quae ſe habeat ad corporis a centro diſtantiam, vt vis grauitatis ad vim centripetam. Altera vis, quae corpus ad planum datum trahit, quodammodo diſtantiae proportionalis effici poteſt; id tamen ſi non accidat, litera g vt variabilis debet conſiderari, ex quo vero proxime motus nodorum poterit colligi; inter omnes ipſius g valores quaſi medium eligendo. In motu lunae nodorum motus maxime attendi meretur, quippe qui iuxta noſtram determinationem fit in antecedentia. Obſeruatur autem nodi ab oppoſitione praecedentis nodi diſtantia fere $43'$; ita vt fit $\frac{180(m-1)}{m} = \frac{43}{60}$ atque $m = 1 + \frac{43}{10757} = 1\frac{1}{250}$. Ex quo vis lunam ad planum eclipticae perpetuo trahens a poſteriore poteſt cognosci.

CA-

CAP. SE... ...CTI &c.
MOTU
P
Hocque tum ... inueniatur, ... diſtantiam, Altera vis, ...it, quodam- ... poteſt; id variabilis de- ...e motus no- ipſius g va- ...u lunae no- ...ur, quippe ...t in antece- oppoſitione ...', ita vt fit ...$\frac{1}{57} = 1\frac{1}{250}$. ...ticae perpe- ...osci.
Si cor... que... tiae... turbat, ... tam min...
Ex potentia... gentialen... eodem ... uetur p... ſignari p... licitantiu... normale... pus exe... cum dir... reſiſtenti...
CA-

CAPUT SEXTUM
DE
MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO IN MEDIO RESISTENTE.

PROPOSITIO 104.
Theorema.

860.

Si corpus moueatur in medio reſiſtente a quotcunque potentiis abſolutis ſollicitatum: vis reſiſtentiae actionem potentiarum abſolutarum aliter non turbat, niſi quod vim tangentialem ex illis ortam minuat.

Demonſtratio.

Ex capite praecedente ſatis intelligitur omnes potentias abſolutas reſolui poſſe in duas vires tangentialem et normalem, ſi quidem motus fit in eodem plano. At ſi corpus non in eodem mouetur plano, tum tres vires aequiualentes aſſignari poſſunt loco quotcunque potentiarum ſollicitantium, quarum vna eſt tangentialis et duae normales. Vis autem, quam reſiſtentia in corpus exerit, directio ſemper congruere ponitur cum directione corporis (117). Quamobrem vis reſiſtentiae ad vim tangentialem eſt referenda, quam

Bbb im-