aequalia. Hoc vero casu cum resistentiae lex sit celeritatum potestas exponentis $2m$, erit resistentiae exponens vt distantia a centro C eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.

Corollarium 3.

540. Ex hoc patet, quod ex praecedente propositione inuenimus (536), si resistentia sit celeritatibus proportionalis, et hanc ob rem $m=\frac{1}{2}$, et medium vniforme, omnia tempora tam ascensuum quam descensuum fore inter se aequalia.

Corollarium 4.

541. Si vis centripeta fuerit constans seu $n=0$, erunt tempora vel ascensuum vel descensuum in subduplicata spatiorum percursorum ratione. Exponens vero resistentiae fit distantiis a centro C proportionalis. Eundem hunc casum iam exposuimus supra (495).

Scholion.

542. Hisce concludimus hoc Caput de motu puncti rectilineo in medio resistente; atque iuxta diuisionem factam progredimur ad motus curuilineos in vacuo corporum a quibuscunque potentiis absolutis sollicitatorum.

CA-

CAP. QU
MOTU
QUI
V is
in quo co
544. elementu
rit, nisi
det, pro
rectionem
545. uetur; vi
mutat, e
exerit.
546
natura vi
TU RECT. &c.
lentiae lex sit ce-
, erit resistentiae
eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.
3.
ex praecedente
si resistentia sit
anc ob rem $m=\frac{1}{2}$,
npora tam ascen-
se aequalia.
4.
erit constans seu
m vel descensuum
ursorum ratione.
antiis a centro C
sum iam exposui-
c Caput de motu
nte; atque iuxta
ad motus curuili-
scunque potentiis
CA-

CAPUT QUINTUM
DE
MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO A QUIBUSCUNQUE POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

DEFINITIO 21.

543.

Vis tangentialis est potentia corpus, quod lineam curuam AMB *describit, sollicitans, cuius directio incidit in tangentem* TM*t puncti* M, *in quo corpus, cum sollicitatur, est versatur.* Tabula IV. Fig. 11.

Corollarium 1.

544. Vis igitur tangentialis in corpus, dum elementum Mm percurrit, alium effectum non exerit, nisi quod motum eius vel acceleret vel retardet, prout scilicet corpus trahit vel secundum directionem MT vel Mt.

Corollarium 2.

545. Cum igitur corpus in linea curua mouetur; vis tangentialis directionem suam perpetuo mutat, et secundum aliam plagam effectum suum exerit.

Scholion.

546. Vis quidem tangentialis per se in rerum natura vix vnquam oriri potest; nihilo vero minus

eius

eius vsus latissime patet. Quamcunque enim potentia sollicitans habeat directionem, ea semper in duas alias potest resolui, quarum alterius directio in tangente sit sita.

DEFINITIO 22.

547. *Vis normalis est potentia corpus lineam curuam* AMB *describens sollicitans, cuius directio* MR *est normalis in curuae elementum* Mm *seu tangentem* MT.

Corollarium 1.

548. Vis igitur normalis corporis celeritatem neque auget neque minuit, quia eius directio MR neque in sequentia neque in antecedentia vergit (164).

Corollarium 2.

549. In hoc vero eius effectus consistit, vt in sequentibus ostendetur, vt corporis tantum directionem immutet, et efficiat, vt corpus, quod per se in recta esset progressurum, in linea curua promoueatur (165).

Scholion 1.

550. Si corpus in eodem plano moueatur, in eoque etiam positae sint potentiarum sollicitantium directiones; singulae potentiae resolui possunt in binas, quarum altera sit normalis, altera tangentialis, quemadmodum ex principiis staticis apparet. Quare cum virium tangentialis et normalis effectus in corpus determinauerimus, simul quoque cu-

PUNCTI ... OTU
cuiusuis potentiae ... enim poten-
camus autem pot ... semper in duas
potentias corpus ... irectio in tan-
les sint neque tan ...
... corpus line-
551. Hinc ... , cuius di-
sio. Primo enim ... ementum Mm
rum semitae sun ...
omnes potentiae ...
constitutae. Dei ... oris celerita-
cabimus, quorum ... eius directio
dem plano; ad qu ... cedentia ver-
tias in binas resol ...
resolui oportet, ...
pus mouetur, din ... consistit, vt
PRO ... is tantum di-
... us, quod per
552. Si c ... a curua pro-
rit, sollicitatur a ...
tera tangentiali: ...
motu corporis alte ... moueatur, in
... sollicitanti-
Sit corporis ... solui possunt
ritas debita altitu ... , altera tan-
MR trahens =N ... is staticis ap-
trahens =T, po ... s et norma-
osculi in M=r. ... simul quoque
dum, quia eius d ... cu-

cuiusuis potentiae obliquae effectus innotescet. Vocamus autem potentiam seu vim obliquam omnes potentias corpus sollicitantes, quae neque normales sint neque tangentiales.

Scholion 2.

551. Hinc oritur primaria huius capitis diuisio. Primo enim eos motus considerabimus, quorum semitae sunt in eodem plano, atque simul omnes potentiae sollicitantes in eodem ipso plano constitutae. Deinceps autem de iis motibus explicabimus, quorum semitae non sunt positae in eodem plano; ad quos cognoscendos singulas potentias in binas resoluere non sufficit, sed eas in ternas resolui oportet, propter tres spatii, in quo corpus mouetur, dimensiones.

PROPOSITIO 70.

Problema.

552. *Si corpus, dum elementum* Mm *percurrit, sollicitatur a duabus potentiis altera normali altera tangentiali: determinare vtriusque effectum in motu corporis alterando.* Tabula IV. Fig. 11.

Solutio.

Sit corporis elementum Mm describentis celeritas debita altitudini v, et vis normalis secundum MR trahens $=N$, et vis tangentialis secundum MT trahens $=T$, ponaturque elem. $Mm = ds$ et radius osculi in $M = r$. Ad effectum vis N determinandum, quia eius directio est normalis in Mm, vte-

 mur

mur formula §. 165, quae erat $npr = Ac^2$. Haec vero transmutata est in hanc $pr = 2Av$ (209). Quod autem hic nobis est N, id in citatis locis erat $\frac{p}{A}$, intelligimus enim per N non impressionem solum potentiae N in corpus, sed ipsam vim acceleratricem; seu potentiam absolute consideratam diuisam per massam corporis (218). Quare loco $\frac{p}{A}$ hic substitui debet N, quo facto habebitur $Nr = 2v$. *Quod erat alterum.* Deinde ad effectum vis tangentialis T determinandum adhibeo canonem §. 166, hunc $Acdc = npds$, seu huius loco mutatum $Adv = pds$ (209). Atque ob allegatas rationes hic loco $\frac{p}{A}$ substituo T, eritque $dv = Tds$. Q. E. *Alterum.*

Corollarium 1.

553. Quia vis grauitatis ponitur 1, erit vis normalis ad vim grauitatis vt altitudo celeritati debita ad dimidium radii osculi curuae; quae analogia sequitur ex aequatione $Nr = 2v$.

Corollarium 2.

554. Ex data igitur vi normali et curua quam corpus describit statim innotescit corporis celeritas. Nam expressa celeritate per $\sqrt{v}$ erit $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Nr}{2}}$.

Corollarium 3.

555. Incrementum vero altitudinis celeritatem exponentis semper aequale est facto ex vi tan-

OTU
1 $=Ac^2$. Haec tangenti $=2Av$ (209). hoc elen itatis locis erat tum ds v pressionem somm vim accelensideratam di- Quare loco $\frac{p}{A}$ 55 ebitur $Nr=2v$. rit, solli ctum vis tanonis MC o canonem §. tiae in loco mutatum gatas rationes Sit $= Tds$. Q. E. tem, si i elementu tudini v. tur 1, erit vis esse pon o celeritati derea trian quae analogia et ex m data. $ds^2=dx^2$ erit. C mali et curua 163) n tescit corporis enim p per $\sqrt{v}$ erit rimus: P:1, qu $dv=Pdy$ idinis celeritahaec ae st facto ex vi $\frac{p}{A}$. Har tantatis in

tangentiali et spatiolo a corpore percurso. Seu hoc elementum ipsius v est ad spatiolum descriptum ds vt vis tangentialis ad vim grauitatis.

PROPOSITIO 71.

Problema.

556. *Si corpus, dum elementum* Mm *percurrit, sollicitetur a potentia quacunque obliqua directionis* MC; *oportet determinari effectum huius potentiae in corporis motu alterando.* Tabula IV. Fig. 11.

Solutio.

Sit potentia haec obliqua ad corporis grauitatem, si in superficie terrae esset positum vt P ad 1, elementum $Mm = ds$, et celeritas in M debita altitudini v. Quia vero obliquitas potentiae MC data esse ponitur, angulus CMT datus erit, et propterea triangula CMT, Mmr, quae oriuntur ex C in MT et ex m in MC perpendiculis demissis, erunt specie data. Ponamus igitur $Mr = dy$ et $mr = dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$; et ratio inter ds et dx et dy data erit. Conferantur iam cum his, quae supra (161, 163) nec non postea (203) tradita sunt. Ea enim prorsus similia sunt hisce, de quibus hic quaerimus: hoc tantum differunt, quod hic nobis sit P:1, quod ibi erat p:A. Hanc ob rem habebimus $dv = Pdy$, et, posito radio osculi MR in $M = r$, haec aequatio $Prdx = 2vds$ (208), scripto P loco $\frac{p}{A}$. Harum aequationum illa $dv = Pdy$ definit celeritatis incrementum, dum corpus elementum Mm per-

percurrit. Altera vero $Prdx = 2vds$ ſeu $\frac{2vds}{Pdx}$ exhibet lineae a corpore deſcriptae curuaturam in M. Innoteſcit ergo totus potentiae obliquae effectus in corpus motum. Q. E. I.

Corollarium 1.

Tabula IV. Fig. 12.

557. Si potentia obliqua conſtituit angulum obtuſum cum elemento Mm, omnia manent vt ante, niſi niſi quod lineola $mr = dy$ accipi debeat negatiua. Erit ergo $dv = -Pdy$, et altera aequatio $Prdx = 2vds$ vt ante.

Corollarium 2.

558. Si ergo potentiae directio MC intra normalem MR et elementum Mm cadit, vt in fig. 11. motus corporis acceleratur. At ſi CM extra vtramque cadit, vt in fig. 13. motus retardatur.

Corollarium 3.

559. Si directio potentiae MC incidit in tangentem MT, euaneſcit angulus mMr, et fit $Mr = Mm$ ſeu $dx = o$ et $dy = ds$. Habebitur itaque $dv = Pds$, et $r = \infty$, id quod indicat corporis directionem ab hac potentia tangentiali non affici.

Corollarium 4.

Fig. 12.

560. Si directio potentiae MC incidit in alteram partem M . . . uo caſu fit $Mr = dx = o$, et $dy = ds$, erit $dv = -Pds$ et $r = \infty$ vt ante. Vis igitur tangentialis celeritatem corporis tantum afficit, directionem vero . . orſus non immutat (544).

Co-

Corollarium 5.

561. Incidat potentiae directio MC in normalem MR, quo effectum vis normalis cognoſcamus. Hoc ergo caſu erit $dy = o$ et $dx = ds$. Et conſequenter prodit $dv = o$, et $Pr = 2v$. Vis ergo normalis celeritatem non afficit, ſed tantum motus directionem (548).

Scholion 1.

562. Hinc igitur tam vis normalis, quam vis tangentialis effectus in corpus motum cognoſcuntur. Quamobrem cum omnes potentiae, quotquot corpus ſollicitant, modo ſint in eodem plano poſitae cum motus directione, in binas alteram normalem alteram tangentialem poſſint reſolui, etiam quarumcunque potentiarum effectus in corpus motum cognoſcitur.

Scholion 2.

563. Hanc ergo priorem partem de motu in eodem plano facto ita ſubdiuidi maxime conuenit, vt primo directiones potentiae ſollicitantis ſint inter ſe parallelae, quemadmodum in noſtris regionibus vis grauitatis directiones ſibi parallelae obſeruantur. Deinde contemplabimur caſus, quibus potentiae directiones omnes in vno puncto conuergunt; quo etiam corpora perpetuo attrahuntur, et qui eſt caſus virium centripetarum, qua de re tam egregiae inuentiones a *Neutono* ſunt factae in *Princ. Phil. Nat. Parte I.* Tertio vero potentias

quaſ-

quascunque corpus sollicitantes inducemus et inuestigabimus, qui motus sit perpetuo secuturus. Ita autem in his singulis versabimur, vt primo quaestiones directas proponamus, tum vero etiam quaestiones quasque inuersas, vt hactenus fecimus, simus resoluturi. Perpetuo denique, quantum licet, a casibus simplicioribus ad magis compositos et difficiliores progrediemur.

PROPOSITIO 72.

Problema.

Tabula IV. Fig. 13.

564. *Si fuerit potentia constans, eiusque directio vbique normalis ad rectam* AB; *atque ex* A *data celeritate secundum directionem* AH *proiiciatur corpus: determinari oportet curuam* AMDB, *quam corpus describet, motumque corporis in hac curua.*

Solutio.

Vocetur potentia sollicitans g, et sit celeritas, qua corpus in A proiicitur debita altitudini c, atque cosinus anguli HAB$=\lambda$, posito sinu toto $=1$. Iam percurrente corpore elementum $Mm=ds$, sit celeritas in M debita altitudini v, et AP$=x$, atque PM$=y$, itemque radius osculi in M$=r$. Propterea erit $M\mu=dx$, et $m\mu=dy$, ex quo apparet hunc casum referri ad fig. 12, quo corporis motus retardabatur. Habebimus ergo $dv=-gdy$ et $grdx=2vds$ (557). Ex harum vero aequationum illa oritur $v=C-gy$, in qua constans C ex hoc debet determinari, quod posito $y=0$, fieri debeat $v=c$. Habetur

P MOTU
betur e… ucemus et inue-
co v su… secuturus. Ita
… primo quaesti-
te, quo … ro etiam quae-
… us fecimus, si-
ius aequ… quantum licet,
sito aut… mpositos et dif-
qui est … 2.
igitur …
integral… ms, eiusque di-
(1–λ²)-… 3; atque ex A
stante c … AH proiiciatur
tatis gr… AMDB, quam
gx=2λ… n bac curua.
Erit er…
(1+… et sit celeritas,
quenter … ltitudini c, at-
arcus A … sinu toto =1.
m Mm=ds, sit
t AP=x, atque
56… =r. Propterea
neam h… pparet hunc ca-
vero, … s motus retar-
ADB a… y et grdx=2vds
num illa oritur
debet determi-
5… v=c. Habe-
est dup… tur

betur ergo $v=c-gy$. In altera nunc aequatione loco v substituatur hic valor inuentus, et prodibit $\frac{gr\,dx}{2\,ds}=c-gy$. Est vero $r=\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$ posito dx constante, quo substituto erit $\frac{-g\,ds^2}{2\,ddy}=c-gy$, seu $2c\,ddy=2gy\,ddy-gdx^2-gdy^2$ posito dx^2+dy^2 loco ds^2. Huius aequationis integralis reperitur $\frac{dx}{ds}=\sqrt{\frac{C}{c-gy}}$. Posito autem $y=0$, designat $\frac{dx}{ds}$ cosinum anguli HAB, qui est λ, erit ergo $\lambda^2=\frac{C}{c}$ et $C=\lambda^2 c$. Habebimus igitur $\frac{dx}{ds}=\lambda\sqrt{\frac{c}{c-gy}}$ et hinc $\frac{\lambda\,dy\sqrt{c}}{\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}}=dx$. Cuius integralis est $C-2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}=\frac{x}{\sqrt{c}}=2\lambda\sqrt{c(1-\lambda^2)}-2\lambda\sqrt{(c(1-\lambda^2)-gy)}$, ita determinata constante c vt euanescat y posito $x=0$. Ponatur breuitatis gratia sinus anguli HAB seu $\sqrt{(1-\lambda^2)}=\mu$, erit $gx=2\lambda\mu c-2\lambda\sqrt{(\mu^2c^2-gcy)}$; atque hinc $y=\frac{\mu x}{\lambda}-\frac{gx^2}{4\lambda^2 c}$. Erit ergo etiam $v=c-\frac{\mu gx}{\lambda}+\frac{g^2x^2}{4\lambda^2 c}$, et $ds^2=dx^2\left(1+\frac{\mu^2}{\lambda^2}-\frac{\mu gx}{\lambda^3 c}+\frac{g^2x^2}{4\lambda^4 c^2}\right)=\frac{dx^2}{\lambda^2}\left(1-\frac{\mu gx}{\lambda c}+\frac{g^2x^2}{4\lambda^2 c^2}\right)$. Consequenter erit $\frac{ds^2}{v}=\frac{dx^2}{\lambda^2 c}$ et $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}=$ tempori, quo arcus AM percurritur. Q. E. I.

Corollarium 1.

565. Recidet ergo corpus in puncto B in lineam horizontalem AB sumta AB$=\frac{4\lambda\mu c}{g}$. Tempus vero, quo corpus supra AB versatur et curuam ADB absoluit, est $=\frac{4\mu\sqrt{c}}{g}$.

Corollarium 2.

566. Denotat autem $2\lambda\mu$ sinum anguli, qui est duplus anguli HAB. Quare, si huius dupli angu-

guli finus vocetur $\varkappa$, erit $AB = \frac{2\varkappa c}{g}$. Ex quo apparet distantiam AB fore maximam, si fuerit $\varkappa = 1$, ideoque angulus HAB semirectus, si quidem corpus eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur.

Corollarium 3.

567. Intelligitur etiam motum corporis horizontalem esse aequabilem. Tempora enim quibus quilibet arcus describitur, sunt respondentibus abscissis in recta AB proportionalia.

Corollarium 4.

568. Si corpus perpetuo eadem celeritate $\sqrt{c}$ proiiciatur, sed sub diuersis angulis cum AB, erunt tempora, quibus supra AB versabitur, inter se vt finus angulorum HAB (565).

Corollarium 5.

569. Maxima altitudo DE ad quam corpus pertinget erit applicata in puncto E, sumto $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g}$. Ex quo apparet esse AE subduplam ipsius AB. Ipsa vero maxima altitudo DE erit $= \frac{\mu^2 c}{g}$, quae proinde quadrato finus anguli HAB est proportionalis.

Corollarium 6.

570. Ex aequatione $y = \frac{\mu x}{\lambda} - \frac{g x^2}{4\lambda^2 c}$ perspicitur curuam ADB esse parabolam, cuius axis sit recta DE, et parameter $= \frac{AE^2}{DE} = \frac{4\lambda^2 c}{g}$. Parameter ergo proportionalis est quadrato cosinus anguli HAB.

Co-

Corollarium 7.

571. Huius ergo parabolae vertex erit punctum D, et distantia DF foci F a vertice D est $= \frac{\lambda^2 c}{g}$. Quare si ducatur recta MF erit haec $MF = DQ + DF$ ex natura parabolae.

Corollarium 8.

572. Porro autem erit $MF = DE - MP + DF = \frac{c}{g} - y = \frac{c - gy}{g}$. Quia vero est $v = c - gy$, erit altitudo debita celeritati in $M = g \cdot MF$. Patet ergo etiam fore $AF = \frac{c}{g}$.

Corollarium 9.

573. Perspicuum igitur est corpus hanc parabolam describens in loco quouis M tantam habere celeritatem, quantam corpus idem ab eadem potentia vniformi g sollicitatum recta descendens acquirere potest ex altitudine, quae aequalis sit distantiae puncti M a foco F parabolae.

Corollarium 10.

574. Cosinus anguli FAE est $= \frac{AE}{AF} = 2\lambda\mu = \varkappa$. Ex quo manifestum est angulum FAE esse complementum dupli anguli HAE ad rectum, seu potius excessum huius dupli anguli super angulum rectum.

Corollarium 11.

575. Quia angulus AFD est deinceps positus anguli AFE, hicque complementum anguli FAE, erit angulus AFD duplus anguli HAB.

 Scho-

Scholion I.

576. Facile ergo ex his deducitur constructio parabolae, quam corpus data celeritate et in data directione proiectum describet. Ducta enim AG normali ad AB capiatur angulus GAF = duplo angulo HAE, et in hac directione sumatur AF aequalis altitudini, ex qua idem corpus recta descendens acquirit celeritatem aequalem ei, qua ex A proiicitur, quo facto erit punctum F focus parabolae quaesitae (573, 575). Normalis porro DE per E in rectam AB ducta erit axis huius parabolae, atque vertex D reperitur, sumendo $DF = \frac{AF - FE}{2}$. Cum igitur parameter aequalis sit 4DF, in promtu erit parabolae descriptio.

Scholion 2.

577. Si est $g = 1$, habemus casum grauitatis terrestris. Quocirca, si nullus adesset aer, qui ob resistentiam corpora mota impediret, omnia corpora proiecta mouerentur in parabolis. Hanc veritatem primus elicuit *Galilaeus*, et post eum omnes scriptores mechanici demonstrauere. Plerique quidem multo breuiore modo et sine differentio-differentialibus ad eam peruenerunt, sed nos hic maluimus vti methodo vniuersali, quae latissime pateret, quam nimis particulari, quae ad hunc solum casum esset accommodata.

PRO-

PROPOSITIO 73.

Problema.

578. *Si corpus in A data celeritate et in data directione proiectum perpetuo attrahatur ad rectam AB in ratione quarumcunque functionum distantiarum ab hac recta, determinare curuam ADB, quam corpus ita sollicitatum describet et motum totum in hac curua.* Tabula V Fig. 1.

Solutio.

Sit celeritas in $A = \sqrt{c}$ et sinus anguli $HAB = \mu$, posito sinu toto $= 1$, et cosinus $= \lambda$. Ponatur celeritas corporis in M debita altitudini v, et elementum $Mm = ds$, itemque abscissa $AP = x$, applicata $PM = y$ et radius osculi $MR = r$. Dum autem corpus elementum Mm percurrit, trahitur interea a potentia data, quae sit $= P$ functioni cuidam ipsius y, in directione MP. His positis erit $dv = -Pdy$, et $Prdx = 2vds$ (557). Sit autem $\int Pdy = Y$, atque Y talis functio ipsius y, quae fiat $= 0$ posito $y = 0$. Hanc ob rem erit $v = c - Y$. Deinde ex priore aequatione valor ipsius P i. e. $\frac{-dv}{dy}$ substituatur in altera $Prdx = 2vds$, et habebitur $\frac{-dv}{v} = \frac{2dyds}{rdx}$. Est vero posito ds constante $r = \frac{dsdy}{ddx}$, vnde fit $\frac{-dv}{v} = \frac{2ddx}{dx}$, et integrando $lC - lv = l\frac{dx^2}{ds^2}$. Constans C determinabitur ex hoc, quod in puncto A, in quo fit $v = c$, fiat $\frac{dx}{ds} = \lambda$. Quocirca erit $lC = lc + 2l\lambda$, porroque sumendis numeris $\lambda^2 cds^2 = vdx^2$. Ex hac aequatione ne statim habetur elementum temporis $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\lambda\sqrt{c}}$, et hinc tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Pro ipsa autem curua AMDB habebitur aequatio ex duabus aequationibus inuentis $v = c - Y$ et $\lambda^2 c ds^2 = v dx^2$ eliminando v, orietur enim $\lambda^2 c ds^2 = c dx^2 - Y dx^2 = \lambda^2 c dx^2 + \lambda^2 c dy^2$. Sed quia $1 - \lambda^2 = \mu^2$, prodibit $dx = \frac{\lambda dy \sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2 c - Y)}}$, in qua aequatione, cum sint indeterminatae x et y a se inuicem separatae, construi poterit curua quaesita ADB. Q. E. I.

Corollarium 1.

579. Tempora igitur, quibus arcus quicunque AM describuntur, sunt, vt abscissae respondentes AP. Est enim tempus per AM $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$.

Scholion 1.

580. Motus corporis in curua AM in duos alios cogitatione potest resolui, quorum alter fiat secundum parallelas rectae AB, alter secundum perpendiculares in hanc AB. Illo motu corpus progreditur secundum rectam AB, isto vero vel ascendit vel descendit respectu huius rectae AB. Iam vero perspicuum est a potentia, cuius directio perpetuo est in perpendiculis ad AB, motum progressiuum horizontalem non immutari, et hanc ob rem hic motus perpetuo esse debebit aequabilis, et ea celeritate factus, quae oritur ex simili motus resolutione initialis. Cum vero motus initialis directio sit recta AH, erit eius celeritas $\sqrt{c}$ ad celeritatem progressiuam secundum AB vt sinus totus 1 ad cosinum angu-

guli HAB, qui est λ. Celeritas ergo progressiua secundum AB erit $\lambda\sqrt{c}$, ex qua tempus, quo motus horizontalis perficitur per spatium AP $= x$, prouenit $= \frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$ vt inuenimus.

Corollarium 2.

581. Si corpus celeritate $\sqrt{c}$ ex A perpendiculariter ascendat in AC, et sumatur AL $=$ PM $= y$, erit celeritas in L aequalis celeritati in M nempe $= \sqrt{v}$. Est enim $dv = -P dy$, atque $v = c - Y$, quemadmodum pro puncto M inuenimus.

Corollarium 3.

582. Si fuerit AC tota altitudo, ad quam corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ sursum proiectum pertingere potest; erit CL altitudo, ex quo corpus cadendo eandem acquirit celeritatem quam habet in M.

Corollarium 4.

583. Maxima altitudo DE reperitur, faciendo $dy = 0$, quo casu erit $Y = \mu^2 c$, ex qua aequatione valor ipsius y erutus dabit altitudinem DE, et celeritas in P tanta erit, quantam corpus ex altitudine CI delapsum acquirit.

Corollarium 5.

584. Inuenimus autem quoque $v = \frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$. Quare cum in puncto D sit $dx = ds$ erit celeritas in D $= \lambda\sqrt{c}$, quae est aequalis ipsi celeritati horizontali, qua corpus secundum AB progreditur.

Scho-

Scholion 2.

585. Amplitudo quidem AB ex aequatione quia non potest integrari, non apparet. Nihilo tamen minus perspicuum est, partes AE et EB oportere esse aequales, et ramum DB similem et aequalem ipsi arcui DA. Namque postquam corpus in D peruenit, simili modo rursus accelerabitur, quo ante per AD erat retardatum; quia potentia in iisdem ab AB distantiis est eadem, hocque modo motus iterum perfecte restituitur.

Scholion 3.

586. Facile hinc etiam problema reciprocum, quo ex data curua ADB et celeritate corporis in A, quaeritur potentiarum lex, quae faciat vt corpus in hac curua moueatur, resolui poterit. Ex aequatione enim $dx = \frac{\lambda dy\sqrt{c}}{\sqrt{(\mu^2c - Y)}}$, habetur $Y = \mu^2c - \frac{\lambda^2cdy^2}{dx^2}$, atque $dY = Pdy = \frac{-2\lambda^2cdyddy}{dx^2}$, posito dx constante. Quia est vero $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$ eodem dx posito constante, erit $-ddy = \frac{ds^3}{rdx}$. Hoc substituto habebitur $P = \frac{2\lambda^2cds^3}{rdx^3} =$ potentiae sollicitanti corpus in M secundum directionem MP.

PROPOSITIO 74.

Problema.

Tabula V. Fig. 2. 587. *Trahatur corpus in A proiectum vbique ad virium centrum C a vi centripeta quacunque; oporteatque determinari naturam curuae AM, in qua corpus mouebitur, et motum corporis in hac curua.*

So-

Po
citans
dini v.
tum M
curuae
dius osc
Mmr et
$=pdy$.
positis
aequati
$2vdsdy$
et $\frac{y}{p}$ lo
grata d
celerita
directic
sita dist
tem AI
Hinc e
Confec
arcus A
termin
$Prdx=$
Haec
et $\frac{y}{p}$,
aequat
indet
E. I

IOTU
ex aequatione
aret. Nihilo
AE et EB
B similem et
ostquam cor-
accelerabitur,
quia potentia
hocque modo
ma recipro-
ritate corpo-
quae faciat
solui poterit.
etur $Y = \mu^2c$
osito dx con-
m dx posito
ituto habebi-
corpus in M
roiectum vbi-
a quacunque;
AM, in qua
hac curua.
So-

Solutio.

Ponatur vis centripeta corpus in M ad C sollicitans $= P$ et celeritas corporis M debita sit altitudini v. Vocentur deinde distantia CM, y; elementum Mm, ds, et perpendiculum CT in tangentem curuae MT, p, necnon elementum Mr, dx, et radius osculi MR, r. Erit ergo ob triangula similia Mmr et CMT, $ds\sqrt{(y^2 - p^2)} = ydy$, et $dx\sqrt{(y^2 - p^2)} = pdy$. Atque radius osculi r reperitur $= \frac{ydy}{dp}$. His positis habebimus $dv = -Pdy$ et $Prdx = 2vds$ (557). His aequationibus coniunctis eliminato P erit $rdvdx = -2vdsdy$ seu $\frac{dv}{v} = \frac{-2dsdy}{rdx}$. Substituantur $\frac{ydy}{dp}$ loco r, et $\frac{y}{p}$ loco $\frac{ds}{dx}$; prodibitque $\frac{dv}{v} = \frac{-2dp}{p}$. Quae integrata dat $v = \frac{C}{p^2}$. Constans haec C definietur ex data celeritate initiali in A, quae sit debita altitudini c, et directione proiectionis, quam ita definiemus vt, posita distantia $CA = a$, perpendiculum CD in tangentem AD sit $= b$. Propterea erit $C = cb^2$ et $v = \frac{cb^2}{p^2}$. Hinc erit $\frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{pds}{b\sqrt{c}} =$ elemento temporis per Mm. Consequenter ob $pds = 2MCm$, erit tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{2.ACM}{b\sqrt{c}}$. Ipsa curua vero determinabitur substituendo $\frac{cb^2}{p^2}$ loco v in aequatione $Prdx = 2vds$, quo facto prodibit $Pp^2rdx = 2cb^2ds$. Haec aequatio loco r et $\frac{ds}{dx}$ substitutis valoribus $\frac{ydy}{dp}$ et $\frac{y}{p}$, transmutabitur in hanc $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$. Quae aequatio, quaecunque P sit functio ipsius y, ob indeterminatas separatas poterit construi. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

588. Quia tempus, quo arcus AM percurritur, est $\frac{2.ACm}{b\sqrt{c}}$, erunt tempora, quibus arcus quicunque describuntur, vt areae comprehensae arcu descripto et rectis ad centrum C ductis.

Corollarium 2.

589. Deinde cum sit $v = \frac{cb^2}{p^2}$, erit $\sqrt{v} = \frac{b\sqrt{c}}{p}$. Celeritas igitur corporis in quocunque loco curuae percursae est reciproce vt perpendiculum ex centro C in tangentem in illo puncto demissum.

Scholion 1.

590. Haec arearum aequabilis descriptio constituit apud *Neutonum* primam propositionem, ex qua sequentia fere omnia deducit. Sunt autem hae duae propritates maxime generales, et id tantum requirunt, vt vis centripetae directio sit perpetuo versus centrum. Quacunque enim vis centripeta quantitate siue ipsarum CM functione siue secus exprimatur, aeque tamen vtraque valet. Nam cum in eas incidissemus, ex calculo vis centripeta P exterminabatur, eiusque tantum directio in consideratione relinquebatur.

Corollarium 3.

591. Ad curuam, quam corpus describit, cognoscendam ipsam vim centripetam dari oportet, ex hacque data aequatio pro curua habebitur. Est enim $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$, quae exprimit curuae naturam si P fuerit quantitas data.

Corollarium 4.

592. Quia est $\frac{ydy}{dp} = r$, erit etiam $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$. Atque hoc est Theorema Moyvreanum, illud vero $P = \frac{2cb^2dp}{p^3dy}$ *Keilius* primus se inuenisse contendit.

Scholion 2.

593. Hae aequationes duplicem habent vtilitatem: Primo enim ex data vi centripeta poterit natura curuae, quam corpus proiectum describit, determinari. Deinde etiam vicissim ope harum aequationum, si fuerit data curua, quam corpus circa virium centrum C describit, definiri potest in quouis loco vis centripeta efficiens, vt corpus in hac curua libere moueatur.

Corollarium 5.

594. Quia est etiam $dv = -Pdy$, perspicuum est, si P fuerit functio ipsius y, celeritatem vbique a distantia corporis a centro pendere, et in iisdem distantiis corpus eandem habere debere celeritatem.

Corollarium 6.

595. Quoties igitur P est functio ipsius y toties etiam curua descripta, ita erit comparata vt in aequalibus a centro distantiis perpendicula ex centro in tangentes demissa sint inter se aequalia, quia celeritates sunt reciproce vt haec perpendicula (589).

Scholion 3.

596. Atque ſemper ſi P fuerit functio ipſius y, poterit aſſignari recta EC, in qua corpus a vi centripeta ſollicitatum descendens in ſingulis punctis N eandem habebit celeritatem, quam habet in curua AM motum in punctis M aequaliter a centro diſtantibus. Sumto enim $CN = CM = y$, et $Nn = mr = dy$. Si fuerit celeritas in N aequalis celeritati in M ſcilicet debita altitudini v, erit etiam dum corpus per elementum Nn moueatur $dv = -Pdy$. Ex quo intelligitur celeritatem in n aequalem fore celeritati in m. Atque ita in ſingulis punctis rectae EC corpus tantam habebit celeritatem, quantam habet in curua AM in iisdem a centro C diſtantiis. Si ergo fuerit E motus initium in quo celeritas eſt $=0$, ex data linea EC corporis in curua AM moti in ſingulis punctis innoteſcet celeritas. Hac igitur recta EC in poſterum vtemur ad celeritates corporis in curua moti definiendas, eamque vocabimus diſtantiam celeritates determinantem.

Corollarium 7.

597. Cum igitur data ſit celeritas in A nempe debita altitudini c, ex hoc tota diſtantia EC reperietur. Tantum enim punctum E diſtans a C accipi debet, vt corpus ex E hac vi centripeta ſollicitatum descendens in A acquirat celeritatem $= \sqrt{c}$.

Co-

Corollarium 8.

598. Si vocetur angulus $MCm = dw$, erit $dw = \frac{dx}{y} = \frac{pdy}{y\sqrt{(y^2-p^2)}}$. Vnde prodit $p = \frac{y^2 dw}{\sqrt{(y^2 dw^2 + dy^2)}}$. Tempusculum vero, quo angulus MCm abſoluitur eſt $= \frac{pds}{b\sqrt{c}} = \frac{pydy}{b\sqrt{c}(y^2-p^2)}$. Hoc igitur tempusculum erit $= \frac{y^2 dw}{b\sqrt{c}}$.

Corollarium 9.

599. Si celeritatem angularem ſeu eam qua angulus MCm percurritur metiri velimus ipſo hoc angulo per tempus diuiſo prodibit celeritas angularis in $M = \frac{b\sqrt{c}}{y^2}$. Celeritas igitur angularis eſt reciproce vt quadratum diſtantiae corporis a centro C.

Scholion 4.

600. Quia autem curua, quam corpus a data vi centripeta ſollicitatum deſcribit, aliter non cognoſcitur, niſi per aequationem inter corporis diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem ex centro demiſſum; difficile plerumque eſt iudicare qualis ſit curua inuenta, cum curuarum naturas conſueuerimus aequationibus inter coordinatas orthogonales exponere. Interim tamen huiusmodi aequationes inter diſtantiam a centro et perpendiculum in tangentem, ſi modo ſint vel algebraicae vel differentiales in quibus indeterminatae ſint a ſe inuicem ſeparatae, ſufficiunt ad curuas quaeſitas conſtruendas. Sed quo natura et ordo curuarum harum penitus poſſit inueſtigari, dabimus

hic

hic methodum aequationes inter diſtantiam et perpendiculum ad conſuetas aequationes inter coordinatas reducendi.

PROPOSITIO 75.
Problema.

Tabula V. Fig. 3. 601. *Naturam curuae* AM, *quam corpus a quacunque vi centripeta ſollicitatum deſcribit, definire aequatione inter coordinatas orthogonales* CP *et* PM *ad axem fixum* AC *relatas.*

Solutio.

Poſitis vt ante celeritate initiali in $A = \sqrt{c}$, $AC = a$ et perpendiculo ex C in tangentem in A demiſſo $= b$. Atque praeterea $CM = y$, $CT = p$, et vi centripeta in $M = P$, quae ſit functio quaedam ipſius y. Vocetur deinde $CP = x$, et $PM = z$, erit $CM = \sqrt{(x^2+z^2)} = y$, ſeu $z = \sqrt{(y^2-x^2)}$, retinebimus enim loco z in calculo y, quia hoc modo calculus fit facilior et breuior, atque poſt peractam totam operationem in promtu eſt z loco y introducere. His poſitis erit $Mm = \sqrt{(dx^2+dz^2)} = \frac{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}{\sqrt{(y^2-x^2)}}$ et $Mr = \frac{-ydx+xdy}{\sqrt{(y^2-x^2)}}$. Fiet igitur $\frac{Mr}{Mm} = \frac{p}{y} = \frac{xdy-ydx}{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}$, et conſequenter $p = \frac{yxdy-y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}$. Sed pro curua AM hanc ante elicuimus aequationem $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$. Ponamus autem Y integrale ipſius Pdy ita aſſumtum vt euaneſcat poſito $y = a$. Quo facto erit $Y = C - \frac{cb^2}{p^2}$, vbi conſtans C ob $p = b$, ſi eſt $y = a$, debet eſſe $= c$. Erit ergo $Y = \frac{cp^2-cb^2}{p^2}$, ex qua prodit $p = \frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$. Quae quantitas cum ſit Y functio ipſius y, eſt quoque functio quaedam ipſius y. Hanc ob rem habebimus hanc aequationem $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = \frac{yxdy-y^2dx}{\sqrt{(y^2dy^2-2yxdydx+y^2dx^2)}}$. Ponamus $x = uy$ et $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}} = Q$ breuitatis gratia, erit $Q = \frac{-y^2du}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$, ex qua oritur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{Qdy}{y\sqrt{(y^2-Q^2)}} = \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-y^2Y)}}$ reſtituto $\frac{b\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}$ loco Q. Quae igitur aequatio, cum in ea indeterminatae u et y ſint ſeparatae, ſemper poterit conſtrui. Q. E. I.

Corollarium 1.

602. Quia eſt $u = \frac{x}{y}$, exprimet u coſinum anguli MCA. Et hanc ob rem vltima aequatio ſeparata erit inter diſtantiam corporis a centro et anguli ACM coſinum. Ex hac vero aequatione ſponte oritur aequatio inter x et z.

Corollarium 2.

603. Aequatio vero nunquam eſſe poterit algebraica, niſi denotet $\int \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-y^2Y)}}$ arcum circuli commenſurabilem cum arcu $\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$.

Corollarium 3.

604. Quoties ergo $\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-y^2Y)}}$ reduci poterit ad formam huiusmodi $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(1-Z^2)}}$ et λ ſit numerus rationalis, aequatio algebraica pro curua quaeſita poterit exhiberi.

Scho-

Scholion 1.

605. Si autem $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ aequabitur huiusmodi quantitati $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$, habebitur integratione per logarithmos imaginarios peracta haec aequatio $\frac{\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1}} = \left(\frac{\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}}\right)^\lambda \left(\frac{\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1}}{\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1}}\right)^\lambda$. Est vero hic C constans quantitas ex eo determinanda, quod, si fit $CM(y) = CA(a)$, simul quoque fieri debeat $x=a$, seu $u=1$. Ex illa autem aequatione conficitur ista

$$u = \frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\lambda}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$
$$-\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\lambda}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

Quae quoties λ est numerus rationalis, ab imaginariis $\sqrt{-1}$ affectis libera redditur, et in algebraicam certi ordinis transmutatur.

Corollarium 4.

606. Quia est $x=uy$, habebitur ista aequatio

$$x = \frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\lambda y-(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\lambda(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\lambda y}{2A^{2\lambda}\sqrt{-1}}$$

quae, cum sit Z functio ipsius y, et $y=\sqrt{(x^2+z^2)}$ facile in aequationm inter x et z mutatur.

Scholion 2.

607. Superior aequatio etiam in hanc potest transmutari $Z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\lambda}}$ $(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\lambda}}(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1}))$, quae commodior est, si $\frac{1}{\lambda}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

Scholion 3.

608. At si fuerit λ numerus negatiuus $=-\mu$, habebitur

$$\frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1})^\mu(\sqrt{(A^2-Z^2)}-Z\sqrt{-1})^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}} - \frac{(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})^\mu(\sqrt{(A^2-Z^2)}+Z\sqrt{-1})^\mu}{2A^{2\mu}\sqrt{-1}} = u.$$

Ex quo apparet si λ fuerit negatiuum, ipsius u valorem tantum fieri negatiuum, id quod quidem ex aequatione differentiali intelligitur. Simili vero modo erit etiam $Z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}((\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{-1})-(\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{1}{\mu}}(\sqrt{(A^2-C^2)}+C\sqrt{-1}))$.

Corollarium 5.

609. Si fuerit $\lambda=1$, erit $u=\frac{Z\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$ et $x=\frac{Zy\sqrt{(A^2-C^2)}-Cy\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^2}$. Si fuerit $\lambda=-1$, etiam u vel x sumi debet negatiuum.

Corollarium 6.

610. Si fuerit $\lambda=2$, erit $u=\frac{2Z(A^2-2C^2)\sqrt{(A^2-Z^2)}}{A^4}$ $-\frac{2C(A^2-2Z^2)\sqrt{(A^2-C^2)}}{A^4}$. At si fuerit $\lambda=\frac{1}{2}$ erit $Z=C-2Cu^2+2u\sqrt{(1-u^2)}(A^2-C^2)$.

PRO-

PROPOSITIO 26.
Theorema.

Tabula V. Fig. 4.

611. *Si fuerit vis centripeta vt functio quaecunque distantiarum a centro C, et corpus in A proiiciatur secundum directionem normalem in AC celeritate, cuius altitudo debita se habeat ad dimidiam AC, vt vis centripeta in A ad vim grauitatis 1: hoc corpus in peripheria circuli AMBA cuius centrum est C mouebitur aequabiliter.*

Demonstratio.

Moueatur enim corpus in hoc circulo; quia eius distantia a centro non variatur, perpetuo ab eadem vi centripeta versus C sollicitabitur, cuicunque functioni distantiarum etiam sit proportionalis vis centripeta. Atque quia ad centrum C sollicitatur, erit directio potentiae sollicitantis normalis semper in curuae portiunculam, in qua corpus mouetur. Quocirca corpus sollicitabitur perpetuo a vi normali nunquam a tangentiali, et hanc ob rem eius celeritas semper manebit eadem (591), ac ideo corpus motu aequabili peripheriam describet. Deinde quia vis centripeta seu normalis vbique est eadem, ponatur ea $=g$, et celeritas itidem constans debita altitudini c, atque radius $AC=a$, quae quantitas a vbique exhibet curuae radium osculi. His igitur positis erit $ag=2c$ (561). Ex quo haec oritur analogia: Vt altitudo celeritati corporis, qua initio in A proiicitur debita c ad dimidiam distantiam AC, $\frac{1}{2}a$ ita vis centripeta g ad vim grauitatis 1. Q. E. D.

Corollarium 1.

612. Quando ergo corpus semel arcum circuli describit, cuius centrum est in ipso centro virium C; tum perpetuo in ea circuli peripheria reuoluetur. Si quidem vis centripeta a solis distantiis a centro pendeat, ita vt in aequalibus distantiis vis centripeta sit aequalis.

Corollarium 2.

612. Posita ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit peripheria circuli, in quo corpus mouetur $=2\pi a$. Quia deinde celeritas, qua corpus mouetur, est $=\sqrt{c}=\sqrt{\frac{ag}{2}}$; erit tempus vnius periodi per totam peripheriam $=\frac{2\pi\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

614. Si ergo plura corpora in diuersis circulis moueantur, erunt tempora reuolutionum in subduplicata ratione composita ex directa radiorum circulorum et inuersa virium centripetarum.

Corollarium 4.

615. Si corpus ex A perpendiculariter ad AC proiiciatur, sed celeritate vel maiore vel minore quam $\sqrt{\frac{ag}{2}}$. Corpus arculum circuli describet, cuius radius erit vel maior vel minor quam AC.

Corollarium 5.

615. Hoc ergo casu, quo corpus incipit in arcu circulari moueri, cuius centrum non est in C statim ad centrum vel magis accedet vel magis ab eo recedet. Et hanc ob rem statim ab alia sollicitabitur vi centripeta, nisi forte vis centripeta vbique est eadem.

Scholion.

Tabula V. Fig. 5. 617. Quacunque autem corpus in A celeritate proiiciatur, modo sit eius directio in rectam AC per centrum virium C transeuntem perpendicularis, curua BMAND hanc habebit proprietatem, vt eius portiones AMB, AND cis et vltra rectam AC positae sint inter se similes et aequales, atque AC axis et diameter huius curuae. Nam, quia, vt iam innuimus, vis centripeta functioni cuidam distantiarum a centro est proportionalis, corpus siue supra siue infra AC in aequalibus a C distantiis aequaliter sollicitatur, et hanc ob rem eodem modo per DNA ad A accedere debet, quo ab A per AMB recedit, atque in punctis homologis M et N eandem quoque habebit celeritatem.

Corollarium 6.

618. Omnis igitur recta ex centro C ducta, quae in curuam est normalis, erit simul curuae diameter; ita vt curuae partes cis et vltra hanc rectam positae sint inter se similes et aequales.

PRO-

PROPOSITIO 77.

Theorema.

619. *Si plura corpora circa centrum virium C moueantur, atque describant curuas AM, am circa C similes: erunt celeritates in punctis similibus M et m, in subduplicata ratione composita ex rationibus laterum homologorum et virium centripetarum in locis homologis M et m.* Tabula V. Fig. 6.

Demonstratio.

Quia est $AC:aC = MC:mC$, erit etiam radius osculi in M ad radium osculi in m in eadem ratione, nec non etiam perpendiculum CT ad Ct. Ex propositione 74 vero apparet esse $Prdx = 2vds$ seu loco $\frac{ds}{dx}$ posito $\frac{z}{p}$, $Ppr = 2vy$. Hinc ergo erit celeritas $\sqrt{v} = \sqrt{\frac{Ppr}{2y}}$. Ex quo prodit haec analogia; celeritas in M est ad celeritatem in m in ratione subduplicata composita ex directis virium centripetarum in M et m, radiorum osculi in M et m, atque perpendiculorum CT ad cT; atque ratione inuersa distantiarum MC ad mC. Quia vero est CT ad cT vt MC ad mC, et radius osculi in M ad radium osculi in m vt MC ad mC, erit celeritas in M ad celeritatem in m in ratione subduplicata composita ex rationibus virium centripetarum in M et m, et laterum homologorum MC ad mC. Q. E. D.

Corollarium 1.

620. Si ergo dicatur $AC = A$; $aC = a$. $CD = H$ et $Cd = b$, itemque celeritas in $A = \sqrt{C}$, et in $a = \sqrt{c}$; erit celeri-

ritas angularis in $M = \frac{H\sqrt{C}}{MC^2}$ et celeritas angularis in $m = \frac{b\sqrt{c}}{mC^2}$ (599). Quia autem est $H:b = MC:mC = A:a$; erunt celeritates angulares in M et m vt $\frac{\sqrt{C}}{A}$ ad $\frac{\sqrt{c}}{a}$, i. e. in ratione constante.

Corollarium 2.

621. Tempora igitur, quibus aequales anguli ACM, aCm, seu spatia homologa AM et am absoluuntur sunt reciproce vt celeritates angulares in M et m, i. e. directe vt latera homologa et reciproce vt celeritates in punctis homologis.

Scholion I.

622. Quin etiam celeritates in punctis homologis vbique eandem tenent rationem. Est enim celeritas in $M = \frac{H\sqrt{C}}{CT}$ et celeritas in $m = \frac{b\sqrt{c}}{Ct}$ (589). Quamobrem cum sit $H:b = CT:Ct$, erit celeritas in M ad celeritatem in m vt $\sqrt{C}$ ad $\sqrt{c}$ i. e. vt celeritas in A ad celeritatem in a.

Corollarium 3.

623. Ex ipsa autem propositione perspicitur esse celeritatem in A, $\sqrt{C}$ ad celeritatem in a, $\sqrt{c}$ in ratione subduplicata composita ex rationibus virium centripetarum in A et a, et laterum homologorum A ad a. Quare si dicatur vis centripeta in $A = G$ et vis centripeta in $a = g$; erit $\sqrt{C} : \sqrt{c} = \sqrt{AG} : \sqrt{ag}$.

Co-

Corollarium 4.

624. Consequenter tempus per AM erit ad tempus per am, vt $\sqrt{\frac{A}{G}}$ ad $\sqrt{\frac{a}{g}}$ i. e. in ratione subduplicata composita ex directa laterum homologorum et inversa virium centripetarum in punctis A et a. Quae ergo ratio est constans, eandemque tenere debent inter se integra reuolutionum tempora.

Scholion 2.

625. Hoc etiam casu, quo plures figurae similes circa centrum C describuntur, vires centripetae in punctis homologis eandem vbique tenere debent rationem. Quia enim est $P = \frac{2cb^2y}{p^3r}$ (592) erit vis centripeta in M ad vim centripetam in m directe vt quadratum celeritatis in A ad quadratum celeritatis in a et reciproce vt AC ad aC quae est ratio constans. Quamobrem quo possint plures figurae similes circa centrum C describi, oportet vt vis centripeta huiusmodi distantiarum functione exprimatur, quae in locis homologis vires centripetas eandem rationem tenentes praebeat. Scilicet posita P vi centripeta in distantia y et Q in distantia my, debebit P ad Q habere rationem constantem, in qua non insit y. Hoc enim nisi fuerit, fieri non potest, vt circa centrum C plures figurae similes describantur.

Corollarium 5.

626. Hoc autem obtineri non potest, nisi sit P potestas quaedam ipsius y, vt $\frac{y^n}{f^n}$. Hoc enim

ca-

casu fit $Q=\frac{n^3 y^n}{f^n}$ et ratio $P:Q$ erit $1:n^3$, quae est constans.

Corollarium 6.

627. Nisi ergo vis centripeta cuidam dignitati distantiarum a centro C sit proportionalis, ne fieri quidem potest, vt plures figurae similes circa centrum C describantur. Atque in his solis casibus locum habebunt proprietates, quas ex hac propositione eruimus.

Corollarium 7.

628. Si autem fuerit $P=\frac{y^n}{f^n}$, erit $G=\frac{A^n}{f^n}$ et $g=\frac{a^n}{f^n}$. Celeritates ergo in locis homologis tenebunt rationem $A^{\frac{n+1}{2}}$ ad $a^{\frac{n+1}{2}}$.

Corollarium 8.

629. Atque tempora quibus arcus similes AM et *am* absoluuntur erunt in ratione $A^{\frac{1-n}{2}}$ ad $a^{\frac{1-n}{2}}$ seu in ratione multiplicata laterum homologorum cuius exponens est $\frac{1-n}{2}$.

Scholion 3.

630. In praecedente et hac propositione continentur omnia Theoremata, quae *Hugenius* de viribus centrifugis in tractatu suo de Horologio oscil-

PUNCTI C MOTU
cillatorio annexit. $1:n^3$, quae est
sui, partim euide
deduci possunt.
PRO
ta cuidam digni-
portionalis, ne
631. Si cent ae similes circa
rum directa, et corp his solis casibus
dium AC normalem ex hac propo-
terminare curuam A
corporisque celeritat
Ponatur dista erit $G=\frac{A^n}{f^n}$ et
quod ex centro C
$=a$. Celeritas v omologis tene-
Peruenerit corpus
diculum ex C in t
natur $=p$, atque
ni v. Sit porro
aequalis est graui s arcus similes
$M=\frac{y}{f}$ posita vi ne $A^{\frac{1-n}{2}}$ ad $a^{\frac{1-n}{2}}$
75 (601) comp homologorum
Quamobrem hab
$v=\frac{a^2 c}{p^2}$ (587), ex
mentum curuae a propositione
temporis ae *Hugenius* de
CA perpendicul Horologio oscil-

cillatorio annexit. Eaque partim re ipsa hic apposui, partim euidentissime ex ipsis propositionibus deduci possunt.

PROPOSITIO 78.

Problema.

631. *Si centrum C attrahat in ratione distantiarum directa, et corpus ex A secundum directionem ad radium AC normalem data cum celeritate proiiciatur: determinare curuam AMDBH, quam corpus describet, corporisque celeritatem in singulis locis.* Tabula VI. Fig. 2.

Solutio.

Ponatur distantia $CA=a$, erit perpendiculum, quod ex centro C in motus directionem demittitur $=a$. Celeritas vero in A debita sit altitudini c. Peruenerit corpus in M, sitque $CM=y$, et perpendiculum ex C in tangentem in M demissum CT ponatur $=p$, atque celeritas in M debita sit altitudini v. Sit porro distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati, f; erit vis centripeta in $M=\frac{y}{f}$ posita vi grauitatis $=1$. His cum prop. 75 (601) comparatis, erit $P=\frac{y}{f}$ et $Y=\frac{y^2-a^2}{2f}$. Quamobrem habebitur $p=\frac{a\sqrt{2cf}}{\sqrt{(a^2+2cf-y^2)}}$. Est vero $v=\frac{a^2 c}{p^2}$ (587), ex quo erit $v=\frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Ob elementum curuae autem $=\frac{y\,dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}$, erit elementum temporis $\frac{y\,dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2y^2+2cfy^2-y^4-2a^2cf)}}$. Demisso ex M in CA perpendiculo MP, vocetur $CP=x$, ponaturque $x=uy$. His pofitis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{ady\sqrt{2cf}}{y\sqrt{(2cfy^2-2a^2cf-y^4+a^2y^2)}}$ (601). Fiat $y=\frac{1}{\sqrt{(q+\frac{2cf+a^2}{4a^2cf})}}$ et prodibit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{-\frac{1}{2}dq}{\sqrt{((\frac{a^2-2cf}{4a^2cf})^2-q^2)}}$. Quo collato cum formula $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda=\frac{1}{2}$, $Z=-q$ et $A=\frac{a^2-2cf}{4a^2cf}$. Ex his autem inuenitur $Z=-q=C-2Cu^2+2u\sqrt{(A^2-C^2)(1-u^2)}=\frac{a^2+2cf}{4a^2cf}-\frac{1}{y^2}$. Conftans quantitas C ex hoc determinabitur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$. Hinc ergo erit $C=\frac{2cf-a^2}{4a^2cf}$ vnde fit $\sqrt{(A^2-C^2)}=0$. His fubftitutis habebitur $\frac{1}{2cf}-\frac{1}{y^2}=\frac{(a^2-2cf)u^2}{2a^2cf}=\frac{(a^2-2cf)x^2}{2a^2cfy^2}$ ob $u=\frac{x}{y}$. Aequatio igitur refultabit ifta $a^2y^2-2a^2cf=(a^2-2cf)x^2$. Ponatur applicata $MP=z$, erit $y^2=x^2+z^2$. Hinc fequens prodibit pro curua quaefita aequatio inter coordinatas orthogonales, $a^2z^2+2cfx^2=2a^2cf$. Haec aequatio eft ad ellipfin, cuius centrum in C eft fitum, et $AB=2a$ eft alter eius axis; alter vero $DH=2\sqrt{2cf}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

632. Altitudo celeritati in M debita v eft $=\frac{a^2+2cf-y^2}{2f}$. Quia autem eft $a^2+2cf=AC^2+CD^2=AD^2$, erit $v=\frac{AD^2-CM^2}{2f}$.

Corollarium 2.

633. Simili modo perpendiculum CT in tangentem MT demiffum erit $p=\frac{AC.CD}{\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$ et ipfa tangens

gens $MT=\frac{\sqrt{(AD^2.CM^2-CM^4-AC^2.CD^2)}}{\sqrt{(AD^2-CM^2)}}=\frac{(AC^2-CD^2)CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$. Si quidem eft $AC>CD$.

Corollarium 3.

634. Hoc autem cafu quo $AC>CD$, erit AB ellipfis axis transuerfus, in eoque foci F et G fiti. Erit autem $CF=CG=\sqrt{(AC^2-CD^2)}$. Adeoque $MT=\frac{CF^2.CP.PM}{AC.CD\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$.

Corollarium 4.

635. Anguli ergo TMC, quem corporis in M directio cum radio MC conftituit, finus eft $=\frac{AC.CD}{CM.\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$, et cofinus $=\frac{CF^2.CP.PM}{CM.AC.CD.\sqrt{(AD^2-CM^2)}}$.

Scholion 1.

636. Diftantia celeritates determinans CE (596, 597) aequalis eft femper fubtenfae AD. Nam pofita $CE=k$, descendat corpus ex E verfus C a vi centripeta tractum; habere debebit corpus cum in A peruenerit celeritatem altitudini c debitam. Quamobrem erit $k=\sqrt{(a^2+2cf)}$, (275). Quia autem eft $AC=a$, et $CD=\sqrt{2cf}$, erit $CE=\sqrt{(AC^2+CD^2)}=AD$.

Corollarium 5.

637. Altitudo debita celeritati, quam corpus in recta EC motum acquiret, cum in C peruenerit, erit $\frac{k^2}{2f}=\frac{a^2+2cf}{2f}=\frac{AD^2}{2f}$.

Corollarium 6.

638. Tempus quo arcus AM abfoluitur $=\frac{2.ACM}{a\sqrt{c}}$ (588) ob $b=a$ hoc cafu. Quamobrem tem-

tempus totius reuolutionis per ellipsis perimetrum ADBHA erit $= \frac{2 . \text{Areae Ellipticae}}{a\sqrt{c}}$. Est vero posita ratione diametri ad peripheriam $1 : \pi$, spatium ellipticum $= \pi . t\sqrt{2cf}$. Consequenter tempus vnius reuolutionis erit $2\pi\sqrt{2f}$.

Corollarium 7.

639. Si ergo plura corpora circa idem centrum virium attrahens in ratione distantiarum reuoluantur in ellipsibus, erunt singulorum tempora integrarum reuolutionum inter se aequalia.

Scholion 2.

640. Quando corporis directio initialis in puncto A non ponitur normalis ad radium AC, calculus non praebet ellipsin pro curua a corpore descripta; sed aliam curuam ordinis quarti, quae tamen nullo modo satisfacere potest. Causa huius discrepantiae calculi a veritate in hoc consistit, quod expressio sinus anguli, quem curua cum radio constituit, in y et u sumta semper euadat $=1$, posito $y=a$ et $u=1$, etiamsi secundum hypothesin alia prodire debeat quantitas. Sinus enim anguli, quem curua cum radio comprehendit est $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ quae expressio facto $u=1$ euidenter abit in vnitatem, cum tamen prodire debeat $\frac{b}{a}$. Quamobrem perspicuum est, nisi ponatur $b=a$, calculum hoc modo institutum nunquam cum veritate conspirare posse, si quidem aequatio inter u et y quaeri debeat. Haec ergo regula perpetuo est tenenda, quoties

ties curua descripta secundum praecepta propos. 75 (601) inuestigabitur. Methodus autem hac propositione tradita ad curuas algebraicas tantum inueniendas est accommodata; alia enim methodo, si curuae sint transcendentes, vti oportet. At omnes curuae algebraicae hac gaudent proprietate, vt in eas ex puncto quocunque duci possit perpendicularis. Quocirca, quoties corpus in curua algebraica circa centrum virium reuoluitur, semper in ea vel vnum vel plura poterunt assignari puncta, in quibus radius ad curuam sit perpendicularis. In huiusmodi igitur punctis corpus motum inchoare ponendum est, atque calculus semper veritati erit consentaneus. Ex tali autem solutione facile inuenietur corporis in quouis alio loco celeritas, atque hinc methodo inuersa data corporis celeritate in loco, in quo radius non est ad curuam normalis, reperietur celeritas in loco, vbi radius in curuae normalem incidit. Quomodo autem hoc effici debeat ex propositione sequente perspicietur. Supra memorata curuarum algebraicarum proprietas vero, qua ex quocunque puncto dato in eas perpendicularis potest demitti, non in omnes curuas transcendentes competit. In spirali enim logarithmica nullum radium ex centro ad curuam ductum esse normalem, sed perpetuo cum ea constantem constituere angulum, cuique est notum. Quo tandem ratio intelligatur, quare $\frac{ydu}{\sqrt{(dy^2-u^2dy^2+y^2du^2)}}$ semper facto $u=1$ mutetur in vnitatem, cum tamen quiuis alius quoque

que angulus praeter rectum ex ea produci deberet; animaduertendum est abeunte u in 1, elementum du euanescere prae dy, nisi sit tangens in A ad radium AC normalis. Hancque ob causam posito $u=1$, elementum $dy^2(1-u^2)$ non est negligendum ratione y^2du^2, cum vtrumque euanescat, vt et numerator ydu. Quo fit, vt cuiusuis arbitrarii anguli sinus illa formula facto $u=1$ possit exprimi. Sed quoniam haec cautela in calculo non potest obseruari, praeter casus $b=a$ calculus nunquam veram curuam exhibet.

PROPOSITIO 79.

Problema.

641. *Attrahente centro virium in ratione distantiarum, et proiiciatur corpus in M celeritate quacunque, et secundum quamcunque directionem MT: determinari oportet ellipsin in qua corpus mouebitur.*

Solutio.

Solutionem huius problematis esse possibilem ex hoc intelligi potest, quod numerus datorum non sit nimis magnus ad ellipsin determinandam, prout apparebit. Ponantur radius CM$=y$, sinus anguli CMT$=s$, posito sinu toto $=1$, et altitudo celeritati in M debita $=v$, distantia praeterea a centro C, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis maneat $=f$. Hae igitur quantitates tanquam datae et cognitae erunt considerandae; incognitae vero et inueniendae sunt ellipsis axes, eorumque positio: horum ponatur AC$=a$ et CD$=b$, eritque $b=\sqrt{2cf}$ (631). His positis habebitur statim $2fv=a^2+b^2-y^2$ (632), vnde fit $a^2+b^2=\mathrm{AD}^2=2fv+y^2$, cognoscitur ergo iam subtensa AD, huicque aequalis distantia CE celeritates determinans. Deinde quoque habetur $s=\frac{ab}{y\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}=\frac{ab}{y\sqrt{2fv}}$, ex quo oritur $ab=sy\sqrt{2fv}$. His coniunctis oritur $(a^2-b^2)^2=4f^2v^2+4fvy^2+y^4-8fs^2vy^2=4f^2v^2+y^4+4fvy^2(1-2s^2)$. Est vero $1-2s^2$ cosinus dupli anguli CMT, quem vocemus i. Erit ergo $a^2-b^2=\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}$. Ex his aequationibus prouenit $a^2=fv+\frac{1}{2}y^2+\sqrt{(f^2v^2+\frac{1}{4}y^4+fivy^2)}$ et $b^2=fv+\frac{1}{2}y^2-\sqrt{(f^2v^2+\frac{1}{4}y^4+fivy^2)}$. Inuentis vero axibus positio eorum facile habebitur. Est enim cosinus anguli ACM$=\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{a^2y^2-a^2b^2}{a^2-b^2})}=\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{fiv+\frac{1}{2}y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}})}$ seu cosinus dupli anguli ACM$=\frac{2fiv+y^2}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$, atque sinus huius anguli 2ACM$=\frac{2fv\sqrt{(1-i^2)}}{\sqrt{(4f^2v^2+y^4+4fivy^2)}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

642. Vbicunque igitur corpus proiiciatur, et quacunque celeritate, atque secundum quamvis directionem, corpus circa centrum virium in perimetro ellipsis mouebitur, cuius centrum est in ipso centro virium.

Scholion.

643. Hactenus vis centralis distantiis proportionalis attrahens est posita; simili autem modo reperientur curuae descriptae, si vis corpora a centro

tro in eadem ratione repellat. Praecedentia enim omnia ad hunc casum accommodantur, si modo $-f$ loco f scribatur. Hoc vero facto, curua, quae ante erat ellipsis transmutatur in hyperbolam, axe minore imaginario facto, centrumque virium manet in centro hyperbolae.

PROPOSITIO 80.

Problema.

Tabula VI. Fig. 2. 644. *Si vis centripeta fuerit quadratis distantiarum reciproce proportionalis, corpusque in A data celeritate proiiciatur in directione ad radium AC normali: oportet determinare curuam AMDBHA, quam corpus describet, et motum ipsum per illum.*

Solutio.

Positis vt ante $AC=a$, et celeritate in A debita altitudini c, sit f distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati. Ponatur tum $CM=y$, perpendiculum, quod in tangentem demittitur, $CT=p$, et altitudo celeritati in M debita $=v$. His cum prop. 75 (601) comparatis erit $b=a$, $P=\frac{f^2}{y^2}$, et $Y=\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}$. Demittatur ex M in AC perpendiculum MP, et vocetur $CP=x$, ponaturque $x=uy$. Quo facto erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{ady\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-a^2c-\frac{f^2y^2}{a}+f^2y)}}$. Ponatur $y=\frac{1}{\frac{f^2}{2a^2c}-q}$, eritque $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}=\frac{dq}{\sqrt{((\frac{2ac-f^2}{2a^2c})^2-q^2)}}$. Conferatur haec formula cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), eritque $\lambda=1$, $A=\frac{2ac-f^2}{2a^2c}$ et $Z=q$. Quamobrem habe-

bitur sequens aequatio $u=\frac{q\sqrt{(A^2-C^2)}-C\sqrt{(A^2-q^2)}}{A^2}$ (609). Est vero $q=\frac{f^2}{2a^2c}-\frac{1}{y}$, et constans quantitas C ex eo debet definiri, quod facto $u=1$ fiat $y=a$. Aequatio vero illa parum mutata in hanc transit $C+u\sqrt{(A^2-q^2)}=q\sqrt{(1-u^2)}$. In qua facto $u=1$ et $q=\frac{f^2-2ac}{2a^2c}$, prodit $C=0$. Consequenter habebitur $(\frac{f^2-2ac}{2a^2c})^2u^2=q^2$, seu $(f^2-2ac)u=2a^2cq=f^2-\frac{2a^2c}{y}$. Quia vero est $u=\frac{x}{y}$, erit $(f^2-2ac)x=f^2y-2a^2c$, atque $f^4y^2=4a^4c^2-4a^2cx(f^2-2ac)+(f^2-2ac)^2x^2$. Vocetur applicata $PM=z$, erit $f^4z^2=4a^4c^2-4a^2cx(f^2-2ac)-4acf^2x^2+4a^2c^2x^2$. Ponatur $x=t+\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quo facto habebitur $f^4z^2=\frac{a^3cf^4}{f^2-ac}-4act^2(f^2-ac)$. Quae est aequatio ad ellipsin abscissis in axe transuerso a centro G sumtis, cuius axis transuersus est $=\frac{af^2}{f^2-ac}$ et coniugatus $=\frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Centrique virium C a centro ellipsis G distantia $CG=\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, quae aequalis est semidistantiae focorum. Hanc ob rem centrum virium C in alterutro foco ellipsis est positum. Apparet igitur corpus in A celeritate $\sqrt{c}$ proiectum circa centrum C descripturum esse ellipsin AMDBHA, cuius focus alter in C est situs. Eritque $AC=a$, $AG=\frac{af^2}{2f^2-2ac}$, $AB=\frac{af^2}{f^2-ac}$, $BC=\frac{a^2c}{f^2-ac}$, axisque coniugatus $DH=\frac{2a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}}$. Latus vero rectum ellipsis est $=\frac{4a^2c}{f^2}$. Ad celeritatem in M determinandam vsu erit aequatio $v=\frac{a^2c}{p^2}$. Est autem $p=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{(c-Y)}}=\frac{a\sqrt{acy}}{\sqrt{(acy+(a-y)f^2)}}$, ergo $v=\frac{acy+(a-y)f^2}{ay}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

645. Distantia celeritates determinans CE inuenitur $=\frac{af^2}{f^2-ac}$ (274). Ex quo apparet distantiam hanc CE aequalem esse axi transuerso ellipsis AB.

Corollarium 2.

646. Toties autem curua a corpore descripta est re vera ellipsis, quoties est $f^2>ac$ seu $c<\frac{f^2}{a}$. At si est $c>\frac{f^2}{a}$, tum axis transuersus fit negatiuus, et coniugatus imaginarius, id quod indicio est curuam his casibus abire in hyperbolam.

Corollarium 3.

647. Quando vero est $c=\frac{f^2}{a}$, curua medium tenebit inter hyperbolam et ellipsin axemque transuersum habebit infinitum. Erit itaque tum curua a corpore descripta parabola.

Corollarium 4.

648. Si $c=\frac{f^2}{2a}$, ellipsis abit in circulum, aequales enim euadunt axes, transuersus et coniugatus. Centrum vero virium in ipsum centrum circuli incidet.

Corollarium 5.

649. Ducatur in ellipsi ex altero foco F recta FM ad M, erit $FM=AB-y=\frac{f^2(a-y)+acy}{f^2-ac}$. Ex quo cognoscitur fore $v=\frac{(f^2-ac).FM}{a.CM}$. Est ergo celeritas in puncto quouis M vt $\sqrt{\frac{FM}{CX}}$.

Co-

Corollarium 6.

650. Sinus anguli, quem radius CM cum tangente MT constituit est $=\frac{p}{y}=\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(acy^2+(a-y)f^2)y}}$ posito sinu toto $=1$. Sed quia est $FM=\frac{f^2(a-y)+acy}{f^2-ac}$, erit sinus anguli $CMT=\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)FM.CM}}$.

Corollarium 7.

651. Quia est $GC=\frac{2a^2c-af^2}{2f^2-2ac}$, centrum virium erit in remotiore foco a vertice A, quoties est $c>\frac{f^2}{2a}$. In propiorem vero incidet si $c<\frac{f^2}{2a}$.

Corollarium 8.

652. Posito axe maiore $AB=E$, parametro $=L$, erit $E=\frac{af^2}{f^2-ac}$, et $L=\frac{4a^2c}{f^2}$. Hinc reperitur $a=\frac{E\pm\sqrt{(E^2-EL)}}{2}$ atque $\sqrt{c}=\frac{f\sqrt{L}}{E\pm\sqrt{(E^2-EL)}}$.

Corollarium 9.

653. Tempus, quo corpus integram ellipsis circumferentiam percurrit, est $=\frac{2.\text{Areae Ellipt.}}{a\sqrt{c}}$ $=\frac{4.\text{Areae Ellipt.}}{f\sqrt{L}}$ (588). Posita vero ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, est area elliptica $=\frac{\pi E\sqrt{EL}}{4}$. Tempus ergo vnius reuolutionis est $=\frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$.

Corollarium 10.

654. Si ergo plura corpora circa centrum virium C reuoluantur attracta in reciproca duplicata ratione distantiarum; erunt tempora periodica inter se in sesquiplicata ratione axium transuersorum ellipsium.

Co-

Corollarium II.

655. Si celeritas initialis in A euanescit, abit ellipsis in lineam rectam AC. In hac igitur recta corpus perpetuo mouebitur ab A ad C, hincque subito rursus ad A reuertetur, ita vt nunquam vltra centrum C pertingat (272).

PROPOSITIO 81.
Problema.

656. *Posita vi centripeta distantiarum quadratis reciproce proportionali, proiiciatur corpus ex M celeritate quacunque et iuxta directionem quamuis MT: ex quo oporteat determinari ellipsin* MDBHAM, *in qua corpus mouebitur.*

Solutio.

Sit $MC = y$, sinus anguli $CMT = s$, et celeritas in M debita altitudini v, distantia a centro, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis, maneat $= f$. Haeque sunt quantitates cognitae, ex quibus quaesitae axis transuersus AB, eius positio, et latus rectum debent definiri. Sit axis transuersus $= E$, et latus rectum $= L$, reliquaeque litterae a, c, seruent suas significationes, vt in praecedente propositione. Erit iam ex natura ellipsis $FM = E - y$, ex quo fiet $v = \frac{(f^2-ac)(E-y)}{ay}$ (649) $= \frac{f^2(E-y)(2E-L\pm 2\sqrt{(E^2-EL)})}{y(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})^2}$ (652) $= \frac{f^2(E-y)}{Ey}$. Hinc reperitur $E = \frac{f^2 y}{f^2 - vy}$. Deinde est sinus anguli $CMT = s = \frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)y(E-y)}}$ (650). At est $f^2 - ac = \frac{f^2(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})}{2E}$ et

et $a^3c = \frac{1}{8}f^3L(E\pm\sqrt{(E^2-EL)})$ (652), ex quo fit $\frac{a\sqrt{ac}}{\sqrt{(f^2-ac)}} = \frac{1}{2}\sqrt{EL}$, hincque $s = \frac{\sqrt{EL}}{2\sqrt{(Ey-y^2)}}$. Erit igitur axis coniugatus $DH = \sqrt{EL} = 2s\sqrt{(Ey-y^2)} = \frac{2sy\sqrt{vy}}{\sqrt{(f^2-vy)}}$, et latus rectum $L = \frac{4s^2vy^2}{f^2}$. Ad positionem axis transuersi inueniendum quaeratur cosinus anguli MCP seu $\frac{x}{y} = \frac{f^2y - 2a^2c}{y(f^2-2ac)} = \frac{2Ey - LE}{2y\sqrt{(E^2-EL)}} = \frac{ff-2ssvy}{\sqrt{(f^4-4ffssvy+4s^2v^2y^2)}}$. Ex quo erit tangens ang. $MCP = \frac{2svy\sqrt{(1-ss)}}{ff-2ssvy}$. Q. E. I.

Corollarium I.

657. Si est $f^2 > vy$ vel $v < \frac{f^2}{y}$ curua descripta semper erit ellipsis. At si $v > \frac{f^2}{y}$ curua erit hyperbola, fit enim axis transuersus negatiuus. Sin autem $v = \frac{f^2}{y}$, curua erit parabola.

Corollarium 2.

658. Quia neque axis transuersus neque latus rectum vllo casu fieri potest imaginarium quomodocunque corpus proiiciatur; ideo semper in sectione conica mouebitur, in cuius alterutro foco positum est centrum virium.

Scholion I.

659. Postquam *Keplerus* ostendisset planetas in ellipsibus moueri, in quorum alterutro foco sol esset positus; atque tempora esse proportionalia areis, quas rectae ad solem ductae cum arcu descripto compehenderent; *Neutonus* demonstrauit vim planetas in orbitis continentem ad solem ten-

 de-

dere, atque esse quadratis distantiarum planetarum a sole reciproce proportionalem. Haec eadem veritas ex hisce duabus propositionibus consequitur; nam centro virium in ratione inuersa duplicata distantiarum attrahente, corpora in ellipsibus vel hyperbolis moueri debebunt, quarum alteruter focus in centrum virium incidit.

Corollarium 3.

666 Secundum *Neutonum* vis attrahens solis est ad vim attrahentem terrae in aequalibus ab vtriusque centris distantiis vt 227512 ad 1. Quare cum vis attrahens terrae in distantia semidiametri suae a centro seu in superficie aequalis sit vi grauitatis 1; corpus a centro solis semidiametrum terrestrem distans, ad id trahetur vi 227512 vicibus maiore quam grauitate. Ex quo concluditur, si corpus a centro solis distet 477 semidiametros terrae, vim, qua ad solem trahetur, fore aequalem vi grauitatis.

Corollarium 4.

667. Si igitur sol locum centri virium in reciproca duplicata ratione distantiarum attrahentis sustineat, pro f accipi debebit distantia 447 semidiametris telluris aequalis.

Scholion 2.

668. Quo hae propositiones ad motum planetarum possint accommodari sit sol in C et planeta moueatur in ellipsi ADBHA cuius axis transuersus AB sit $=E$, distantia focorum $CF=D$, et celeritas,

Pl MOTU
m planetarum
tas, qua rec eadem ve-
sit altitu consequitur;
mercuric duplicata dis-
suram hi ipsibus vel hy-
hibebimu lteruter focus
Pro Ven
ritur c=
D=743. attrahens solis
E=629 alibus ab vtri-
Ioue est d 1. Quare
9633. I semidiametri
vnde c= vi grauitatis
netae m m terrestrem
cibus maiore
66 , si corpus a
lipsi, qu terrae, vim,
virium i vi grauitatis,
petam e
tionalen virium in re-
aliisque attrahentis
scilicet a 447 semi-
trum vi
tiarum
Neutono
conicas motum pla-
quamuis C et planeta
satis cla s transuersus
onis his , et celeri-
lutione tas,

tas, quam planeta habet in summa abside A debita sit altitudini c. Eritque $c=\frac{227512(E-D)}{(E+D)E}$. Iam pro mercurio est $E=15991$ semid. telluris, quam mensuram hic constanter ad distantias exprimendas adhibebimus, $D=3367$. Quare erit $c=7,368$. Pro Venere est $E=29682$ et $D=206$, vnde reperitur $c=7,598$. Pro Tellure est $E=41382$ et $D=743$. Vnde erit $c=5,323$. Pro Marte est $E=62959$ et $D=5887$, vnde fit $c=3,049$. Pro Ioue est $E=214870$ et $D=10350$, vnde $c=0,9633$. Pro Saturno est $E=394042$, et $D=22491$, vnde $c=0,5173$. Quae sufficiunt ad cuiusque planetae motum absolutum determinandum.

Scholion 3.

669. *Neutonus*, prout iam innuimus, ex ellipsi, quam corpus describit, cognita, et centro virium in alterutro foco posito, deduxit vim centripetam esse quadratis distantiarum reciproce proportionalem. Post modum autem a Cel. *Ioh. Bernoulli* aliisque huius propositionis inuersa fuit agitata, vt scilicet quaeratur curua, quam corpus circa centrum virium in ratione reciproca duplicata distantiarum attrahens, describet. Negabant enim a *Neutono* satis esse demonstratum, praeter sectiones conicas nullam aliam curuam quaesito satisfacere, quamuis prop. XVII. Lib. I. Princ. Naturalis hoc satis clare euincere videatur. Huius igitur quaestionis his duabus quaestionibus plenam exhibuimus solutionem, qua *Neutoni* assertio extra dubium ponitur.

tur. Alias huius problematis solutiones videre licet in Comm. Acad. Parif. et Horis subsecivis Francof.

Scholion 4.

670. Tempus vnius reuolutionis planetae circa solem est $\frac{\pi E \sqrt{E}}{250 f}$ minutorum secundorum (653) si quidem E et f in partibus millesimis pedis Rhenani exprimantur. Quia autem E et f commodius in semidiametris telluris exhibentur, quarum vnus continet 20302353 pedes; loco fractionis $\frac{1}{250}$ per quam $\frac{\pi E \sqrt{E}}{f}$ multiplicandum est, adhiberi oportet 569, 945. Hanc ob rem tempus vnius reuolutionis planetae erit $\frac{569945 \pi E \sqrt{E}}{1000 f}$ minutorum secundorum, seu ob $\pi = 3,1415926538$ et $f = 477$ semidiam. terrae, (667), erit tempus periodicum planetae $= 3,758$. E$\sqrt{E}$, minutorum secundorum, expresso axe transuerso in semidiametris terrae.

PROPOSITIO 82.

Problema.

Tabula VI. Fig. 3.

671. *Si vis centripeta fuerit reciproce vt cubus distantiae a centro; requiritur curua, quam corpus vtcunque proiectum describet, corporisque motus in ea.*

Solutio.

Sit centrum in C et, proiiciatur corpus ex A celeritate $\sqrt{c}$ et secundum directionem cum Ac facientem angulum cuius sinus sit $\frac{b}{a}$, posita A C $= a$. Per-

P MOTU
Peruener ... iones videre li- gentem ... Horis subsecivis Celeritas distantia: est grauit... itionis planetae in M ... undorum (653) Habebitur ... nis pedis Rhena- ... f commodius in etiam v= ..., quarum vnus tes casus ... actionis 1/250 per
I. ... dhiberi oportet Perspicitu ... vnius reuolutio- nus est ... torum secundo- curua his ... et f=477 se- ca, cuius ... ipus periodicum autem co ... um secundorum, fit v= ... metris terrae. proportio
... 82.
Si n... reciproce vt cu- perpendi... urua, quam cor- Habebitur ... corporisque mo- (601). existente circuli G... tur corpus ex A G N = t. ... nem cum A c fa- ... posita AC = a. Per-

Peruenerit corpus in M, vbi sit CM $= y$, et in tangentem MT ex C demissum perpendiculum CT $= p$. Celeritas vero in M debita sit altitudini v. Atque distantia a centro C, in qua vis centripeta aequalis est grauitati, sit $= f$. Hinc ergo erit vis centripeta in M $= \frac{f^3}{y^3} =$ P (601); ex quo prodit $Y = \frac{f^3}{2a^2} - \frac{f^3}{2y^2}$. Habebitur igitur pro curua quaesita ista aequatio $\frac{f^3}{2a^2} - \frac{f^3}{2y^2} = c - \frac{cb^2}{p^2}$. Atque cum sit $v = \frac{cb^2}{p^2}$ (587), erit etiam $v = c - \frac{f^3}{2a^2} + \frac{f^3}{2y^2}$. Has aequationes per sequentes casus examinabimus.

I. Si fuerit $c = \frac{f^3}{2a^2}$, erit $\frac{1}{y^2} = \frac{b^2}{a^2 p^2}$ seu $p = \frac{by}{a}$. Perspicitur autem ex hoc angulum CMT, cuius sinus est $\frac{p}{y}$, aequalem fore angulo ad A. Quamobrem curua his casibus descripta erit spiralis logarithmica, cuius centrum est in ipso centro virium C. Ita autem corpus mouebitur in hac spirali, vt semper sit $v = \frac{f^3}{2y^2}$ seu celeritas distantiae a centro reciproce proportionalis. Tabula VI. Fig. 6.

Si non fuerit $c = \frac{f^3}{2a^2}$, demittatur ex M in AC perpendicularis MP, et vocetur CP $= x$ atque $x = uy$. Habebitur igitur $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - \frac{f^3 y^2}{2a^2} + \frac{f^3}{2})}}$ (601). Est vero u cosinus anguli ACM sinu toto existente $= 1$. Radio igitur 1 si describatur arcus circuli GN, erit GN $= -\int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$. Vocetur autem GN $= t$, atque habebitur ista aequatio $dt = -\frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2 - cb^2 - \frac{f^3 y^2}{2a^2} + \frac{f^3}{2})}}$.

II. Sit

II. Sit $c=\frac{f^3}{2b^2}$, erit $dt=-\frac{ab\,dy}{y^2\sqrt{(a^2-b^2)}}$, adeoque $t=C+\frac{ab}{y\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Conſtans vero C erit $=-\frac{b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, quia euaneſcente t fit $y=a$. Sit autem tangens anguli ad A$=\theta$, eritque $t=\theta(\frac{a}{y}-1)$ ſeu $y=\frac{\theta a}{t+\theta}$. Vnde ex dato angulo ACM reperitur recta CM, ideoque punctum M in curua quaeſita. Haec curua autem eſt ſpiralis hyperbolica, quam Cel. *Ioh. Bernoulli* pro eodem caſu ſatisfacientem inuenit in Act. Lipſ. 1713.

Si c neque $=\frac{f^3}{2a^2}$, neque $=\frac{f^3}{2b^2}$; ponatur $c=\frac{\delta f^3}{2a^2}$, erit $dt=\frac{-b\,dy\sqrt\delta}{y\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}}$. Ponatur $y=\frac{1}{q}$, erit $dt=\frac{b\,dq\sqrt\delta}{\sqrt{(\delta-1+(a^2-\delta b^2)q^2)}}$. Hinc duo oriuntur caſus primarii.

III. Si $a^2-\delta b^2$ ſit numerus affirmatiuus, pendebit integratio a logarithmis. Erit enim $t=\frac{b\sqrt\delta}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}\,l\,\frac{C}{\sqrt{(\delta-1+(a^2-\delta b^2)q^2)}-q\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}=\frac{b\sqrt\delta}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}\,l\,\frac{Cy}{\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}-\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$. Atque determinata debito modo conſtante C erit $t=\frac{b\sqrt\delta}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}\,l\,\frac{y\sqrt\delta(a^2-b^2)-y\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{a\sqrt{((\delta-1)y^2+a^2-\delta b^2)}-a\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$; atque $y=$

$$\frac{2ae^{\frac{t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt\delta}}\left(\sqrt{\delta(a^2-b^2)(a^2-\delta b^2)}-a^2+\delta b^2\right)}{e^{\frac{2t\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}{b\sqrt\delta}}a^2(\delta-1)-\left(\sqrt{\delta(a^2-b^2)}-\sqrt{(a^2-\delta b^2)}\right)^2}$$

IV. Si $\delta>\frac{a^2}{b^2}$, erit $dt=\frac{b\,dq\sqrt\delta}{\sqrt{(\delta-1-(\delta b^2-a^2)q^2)}}$. Integrale vero huius membri eſt $\frac{b\sqrt\delta}{\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}$ ductum in arcum circuli, cuius ſinus eſt $q\sqrt{\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1}}$ poſito radio $=1$.

At-

Atque addita idonea conſtante erit $\frac{t\sqrt{(\delta b^2-a^2)}}{b\sqrt\delta}=$ Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{y}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}$ — Arcui cuius ſinus eſt $\frac{1}{a}\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}=$ Arcui cuius ſinus eſt $\frac{D}{ay}(\sqrt{(a^2-D^2)}-\sqrt{(y^2-D^2)})$ poſito $\sqrt{(\frac{\delta b^2-a^2}{\delta-1})}=D$. Hinc conſtructio curuae facilis fluit: ſumatur enim arcus GL, qui ad GN habeat rationem vt $\sqrt{(\delta b^2-a^2)}$ ad $b\sqrt\delta$. Huius arcus ſinus LR ponatur $=$R. Erit ergo $Ray=D\sqrt{(a^2-D^2)}-D\sqrt{(y^2-D^2)}$, atque $y=\frac{aDR\sqrt{(a^2-D^2)}-aD^2\sqrt{(1-R^2)}}{a^2R^2-D^2}$. Vnde et conſtructio et aequatio curuae quaeſitae deducitur. In his autem quatuor caſibus, omnia ad problema pertinentia continentur. Q. E. I.

Corollarium 1.

672. Diſtantia celeritates determinans reperitur $=\frac{af\sqrt f}{\sqrt{(f^3-2a^2c)}}$. Quare ſi $c=\frac{f^3}{2a^2}$, quo caſu corpus in ſpirali logarithmica mouetur, diſtantia celeritates determinans eſt infinita.

Corollarium 2.

673. Quia, ſi corpus in ſpirali logarithmica mouetur, eſt $p=\frac{by}{a}$ et $v=\frac{f^3}{2y^2}$, erit tempus, quo arcus AM abſoluitur $=\frac{a^2-ay^2}{y\sqrt{2f(a^2-b^2)}}$. Tabula V. Fig. 5.

Corollarium 3.

674. Si hoc tempus ponatur T, et coſinus anguli CMT$=i$, erit $y=\sqrt{(a^2-fiT\sqrt{2f})}$. Ex qua aequatione poſt quoduis tempus datum reperitur corporis a centro C diſtantia.

 Co-

Corollarium 4.

675. Corpus igitur in ipſum centrum C perueniet tempore $T = \frac{a^2}{f\sqrt{2f}}$, dum interim reuolutiones infinitas circa C perfecerit.

Corollarium 5.

676. Si T capiatur maius quam $\frac{a^2}{f\sqrt{2f}}$, fit y imaginaria. Ex quo ſequitur, poſtquam corpus in C peruenerit, nusquam amplius reperiri, ſed quaſi annihilari.

Corollarium 6.

Tabula VI. Fig. 4.

677. Si ſit $\delta = \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c = \frac{f^2}{2b^2}$, corpus mouebitur in ſpirali hyperbolica, atque etiam poſt infinitas circa C peractas reuolutiones in ipſum centrum C perueniet tempore quoque finito. Eſt enim tempus, quo arcus AM percurritur $= \frac{2\theta a(a-y)}{f\sqrt{2f}}$, ideoque tempus, quo corpus in C peruenit $= \frac{2\theta a^2}{f\sqrt{2f}}$.

Corollarium 7.

678. Si $\delta < \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c < \frac{f^2}{2b^2}$, qui erat caſus tertius, corpus in lineis ſpiralibus quoque mouebitur. atque tandem poſt infinitos percurſos gyros in centrum C perueniet. Apparet hoc ex aequatione; nam facto $t = \infty$ demum fit $y = 0$.

Scholion 1.

679. Quando eſt $c = \frac{f^2}{2b^2}$, ſpiralis hyperbolica quam corpus deſcribit, hanc habet proprietatem,

tem, vt poſito $t = -\theta$ fiat $y = \infty$. Iſte igitur radius ex centro C ductus videtur eſſe curuae ex infinito accedentis aſymtotos. At potius curua ab eo perpetuo recedit, neque tamen vltra datum interuallum θa. Recta ergo ipſi huic radio parallela ab eoque interuallo θa diſtans erit vera aſymtotos. Huius praeterea curuae inſignis eſt proprietas, quod ex infinitis circulis concentricis arcus abſcindat aequales, ex qua natura et forma curuae magis elucet. Similem quoque proprietatem habent curuae, quae deſcribuntur, ſi $\delta < \frac{a^2}{b^2}$, ſimul vero $\delta > 1$. Fit enim $y = \infty$, ſi capiatur $t = -\frac{b\sqrt{\delta}}{\sqrt{(a^2-\delta b^2)}} l \frac{a\sqrt{(\delta-1)}}{\sqrt{\delta(a^2-b^2)}-\sqrt{(a^2-\delta b^2)}}$. Ex quo perſpicitur, ſi ſit $\delta < 1$, locum, quo fit $y = \infty$ fore imaginarium. At ſi $\delta = 1$, erit $t = -\infty$: curua enim hoc caſu orta eſt ſpiralis logarithmica. Ceterum omnes hae curuae ita ſunt comparatae, vt ſint vbique verſus C concauae, neque enim ex motus natura usquam habere poſſunt punctum flexus vel reverſionis.

Corollarium 8.

680. Si eſt $\delta > \frac{a^2}{b^2}$ ſeu $c > \frac{f^2}{2b^2}$, curua a corpore deſcripta non erit amplius ſpiralis, ſed algebraica, ſi quidem inter algebraicas etiam eae referantur in quarum aequationibus continentur exponentes irrationales.

Scholion 2.

681. Ad has igitur inueniendas oportet poni $b = a$ (640). Quo facto haec habebitur aequatio

 $dt =$

$dt = \frac{adq\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-a^2q^2)}}$. Seu posito $aq = r$, et loco dt valore $\frac{-du}{\sqrt{(1-u^2)}}$, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-dr\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}{\sqrt{(1-r^2)}}$. Hac forma comparata cum $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(\lambda^2-Z^2)}}$ (605), erit $Z = -r$, $A = 1$, $\lambda = \frac{\delta}{\delta-1}$. Habebitur propterea ista aequatio $u =$

$$\frac{(\sqrt{(1-C^2)}-C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}-r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}\,(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}(\sqrt{(1-r^2)}+r\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}{2\sqrt{-1}}$$

Seu $2r\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)} - C\sqrt{-1}) - (\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}}(\sqrt{(1-C^2)}+C\sqrt{-1})$ (605 et 607). Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $u = 1$ fieri debeat $y = a$, seu $q = \frac{1}{a}$, seu $r = 1$. Determinata igitur C erit $2r = (u+\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}} + (u-\sqrt{(u^2-1)})^{\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}} = \frac{2a}{y}$, seu $u = \frac{1}{2y^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}}((a+\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}} + (a-\sqrt{(a^2-y^2)})^{\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}}}) = \frac{x}{y}$. Quae est aequatio pro curua quaesita.

Exemplum I.

682. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}} = 2$, seu $\delta = \frac{4}{3}$, atque $c = \frac{2f^{\delta}}{3a^2}$. Erit $2xy = (a+\sqrt{(a^2-y^2)})^2 + (a-\sqrt{(a^2-y^2)})^2 = 4a^2 - 2y^2$. Ponatur applicata PM $= z$, fiet $x\sqrt{(x^2+z^2)} = 2a^2 - x^2 - z^2$, et sumendis quadratis $0 = 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2z^2 + x^2z^2 + z^4$, siue $x = \frac{2a^2-z^2}{\sqrt{(4a^2-z^2)}}$. Haec

P… MOTU
Haec cu… loco dt va-
sed habe… ac forma com-
interual… $-r$, A $= 1$,
68… aequatio $u =$
Oritur … $(u^2-y^2$ … PM $= z$ … Haec c… enume… $\sqrt{(1-C^2)}$ … $-C^2)+C\sqrt{-1})$ … determinabi- … a, seu $q = \frac{1}{a}$, … $2r = (u+\sqrt{}$ … seu $u =$ … $\sqrt{(a^2-y^2)})$ … curua quaesita.
6… curuae … pothesi … te m nu… iorem … theses … distant … et tert… portio… vel alg… ris pe… substitu… ipsius … scripta … hanc … circul… dantu…
atque $c = \frac{2f^{\delta}}{3a^2}$. … $-y^2))^2 = 4a^2$ … $x\sqrt{(x^2+z^2)}$ … is $0 = 4a^4 -$ … $= \frac{2a^2-z^2}{\sqrt{(4a^2-z^2)}}$. Haec

Haec curua igitur ad instar parabolae progreditur, sed habet asymtoton rectae AC parallelam et ab ea interuallo $2a$ distitam, quam nunquam attingit.

Exemplum 2.

683. Sit $\sqrt{\frac{\delta}{\delta-1}} = 3$, seu $\delta = \frac{9}{8}$ et $c = \frac{9f^{\delta}}{16a^3}$. Oritur ergo $2xy^2 = (a+\sqrt{(a^2-y^2)})^3 + (a-\sqrt{(a^2-y^2)})^3 = 8a^3 - 6ay^2$. Atque inducta applicata PM $= z$, habebitur $x^3 = 4a^3 - xz^2 - 3ax^2 - 3az^2$. Haec curua ordinis tertii pertinet ad speciem 41 in enumeratione a *Neutono* facta.

Scholion 3.

684. Innumerabiles aliae inueniri possunt curuae algebraicae, quae a corpore proiecto in hac hypothesi describuntur, si ponatur $\delta = \frac{m^2}{m^2-1}$, denotante m numerum quemcunque rationalem vnitate maiorem ne fiat δ negatiuum. Hae autem tres hypotheses pertractatae, quibus vis centripeta primo distantiis, secundo reciproce quadratis distantiarum et tertio reciproce cubis distantiarum est posita proportionalis, sunt solae, quae deducunt ad curuas vel algebraicas vel a circuli aut hyperbolae quadratura pendentes; si quidem loco P potentia ipsius y substituatur. Quanquam autem in aliis potestatibus ipsius y loco P substitutis aequatio pro curua descripta non potest ab irrationalitate liberari, et hanc ob rem neque algebraica neque a quadratura circuli vel hyperbolae pendens esse potest; tamen dantur casus speciales, quibus curua quaesita fit alge-

gebraica. Namque quemadmodum linea recta et circulus in omnibus hypothesibus satisfacere possunt; ita etiam quandoque aliae curuae algebraicae reperiuntur. Has autem quomodo inueniri oporteat in sequenti propositione declarabimus.

PROPOSITIO 83.
Problema.

685. *Existente vi centripeta vt potestas distantiarum quaecunque, inuenire casus speciales, quibus corpus certo quodam modo proiectum in linea algebraica moueatur.*

Solutio.

Manentibus omnibus, vt hactenus, pro curua quaesita inuenta est haec aequatio $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{bdy\sqrt{c}}{y\sqrt{(cy^2-cb^2-y^2Y)}}$ (601). Nostro autem casu est $P = \frac{y^n}{f^n}$ denotante f distantiam, in qua vis centripeta grauitati aequatur. Hinc erit $Y = \int Pdy = \frac{y^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Deinde quia curuas algebraicas requirimus, ponimus $b = a$ (640). His substitutis erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{cf^n(n+1)}}{y\sqrt{((n+1)cf^n(y^2-a^2)-y^2(y^{n+1}-a^{n+1}))}}$. Sit distantia celeritates determinans k, erit $c = \frac{k^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Hac igitur loco c introducta erit

$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{ady\sqrt{(k^{n+1}-a^{n+1})}}{y\sqrt{(a^{n+3}-a^2k^{n+1}+k^{n+1}y^2-y^{n+3})}}.$$

Patet hinc si $k = a$, quo casu fit $c = 0$, fore $u =$ const. $= 1$, ideoque $x = y$, qui est casus, quo corpus recta descendit ad centrum. Si k est infinita, erit c quoque infinita, quoties $n+1$ est numerus affirmatiuus. Hoc igitur casu corpus etiam in recta progredi debebit, quia vis finita corporis infinita celeritate moti directionem non valet mutare. Ponamus ergo $n+1$ esse numerum negatiuum $= -m$, seu $n = -m-1$, fiet

$$\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}dy\sqrt{(k^m-a^m)}}{\sqrt{(a^{m-2}k^m+a^my^{m-2}-k^my^{m-2}-a^{m-2}y^m)}}.$$

Fiat k infinite magna, erit $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{y^{\frac{m-4}{2}}dy}{\sqrt{(a^{m-2}-y^{m-2})}}$ euanescentibus reliquis terminis; et ponatur $y^{m-2} = q^2$, erit $y = q^{\frac{2}{m-2}}$. Hacque facta substitutione oritur sequens aequatio $\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{2dq}{(m-2)\sqrt{(a^{m-2}-q^2)}}$. Qua formula comparata cum vniuersali $\frac{\lambda dZ}{\sqrt{(A^2-Z^2)}}$ (604), erit $\lambda = \frac{2}{m-2}$, $A = a^{\frac{m-2}{2}}$ et $Z = q = y^{\frac{m-2}{2}}$. Emerget igitur ista aequatio algebraica pro curua quaesita, $2y^{\frac{m-2}{2}}\sqrt{-1}$ $= (\sqrt{(1-u^2)}+u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{a^{m-2}-C^2})+C\sqrt{-1}) -$ ($\sqrt{}$

$(\sqrt{(1-u^2)}-u\sqrt{-1})^{\frac{m-2}{2}}(\sqrt{(a^{m-2}-C^2)}-C\sqrt{-1})$ (607). Constans C ex hoc determinatur, quod facto $u=1$ fieri debeat $y=a$. Hanc ob rem erit $2y^{\frac{m-2}{2}}=a^{\frac{m-2}{2}}((u-\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}}+(u+\sqrt{(u^2-1)})^{\frac{m-2}{2}})$. Quoties igitur m est numerus rationalis affirmatiuus, inuenitur curua algebraica, quam corpus normaliter proiectum existente distantia celeritates determinante infinita, describet. Q. E. I.

Corollarium 1.

686. Sumendis quadratis obtinebitur $4y^{m-2}-2a^{m-2}=a^{m-2}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{m-2}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{m-2})$ seu ob $m=-n-1$, haec aequatio $4y^{-n-3}-2a^{-n-3}=a^{-n-3}((u+\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3}+(u-\sqrt{(u^2-1)})^{-n-3})$.

Corollarium 2.

687. Oportet esse m numerum affirmatiuum nihilo maiorem. Nam si esset m vel $=0$ vel numerus negatiuus, celeritas corporis foret infinita, et curua propterea linea recta.

Corollarium 3.

688. Si sit $n=-2$, habebitur ista aequatio $\frac{yu}{y}-2=2u=\frac{2x}{y}$, seu $2a=x+y$. Quae posita applicata PM, $\sqrt{(y^2-x^2)}=z$ abit in hanc aequationem $z^2=4a^2-4ax$, pro parabola centro virium in foco posito, vt iam inuenimus (647).

Co-

PU MOTU
-$C\sqrt{-1}$) (607). quod facto $u=1$
689. erit $2y^{\frac{m-2}{2}}=$
praeceden seu $y=a$. circulus, incidit.
690. ideoque $\frac{m-2}{2}$ solutione fuerit par, debet adhi tionem ra quentibus
obtinebitur $4y^{m-2}$
691. quadruplic proiiciatu nante infi algebraica $=\frac{2ax}{y}$, seu plicata z: (a^2+z^2) quarti.
affirmatiuum vel $=0$ vel numerus infinita, et
ista aequatio posita applicata aequationem virium in foco
692 plicata di
Co-

Corollarium 4.

689. Si $n=-3$ seu $m=2$, qui est casus in praecedente propos. tractatus, erit $2y^{\frac{m-2}{2}}=2a^{\frac{m-2}{2}}$ seu $y=a$. Curua ergo quam corpus describet erit circulus, in cuius centrum ipsum centrum virium incidit.

Scholion 1.

690. Si n est numerus impar, erit m par ideoque $\frac{m-2}{2}$ integer. His igitur casibus formula in solutione problematis inuenta vti conueniet. At si n fuerit par, formula (686) quadratis sumtis producta debet adhiberi. Statim enim vtroque casu ad aequationem rationalem inter x et y peruenitur vt in sequentibus exemplis apparebit.

Exemplum 1.

691. Attrahat centrum in ratione reciproca quadruplicata distantiarum, et corpus normaliter proiiciatur existente distantia celeritates determinante infinita; curua, quam corpus describit erit algebraica sequens. Ob $n=-4$ erit $4y-2a=2au=\frac{2ax}{y}$, seu $2y^2=a(y+x)$. Introducta vero applicata $z=\sqrt{(y^2-x^2)}$ erit $2x^2+2z^2=ax+a\sqrt{(x^2+z^2)}$, quae aequatio est pro curua ordinis quarti.

Exemplum 2.

692. Sit vis centripeta reciproce in quintuplicata distantiarum ratione, seu $n=-5$ et $m=4$.

Ha-

Habebitur ergo $2y = 2au = \frac{2ax}{y}$, atque $yy = ax = x^2 + z^2$, quae eſt aequatio ad circulum centro virium in eius peripheria poſito. Caſum hunc habet *Neutonus* in Princ. Lib. 1. Prop. VII.

Exemplum 3.

693. Sit $n = -7$, ſeu $m = 6$, erit $2y^2 = 4a^2u^2 - 2a^2$ ſeu $y^4 = 2a^2x^2 - a^2y^2$. Poſita applicata PM $= z$, prodibit iſta aequatio $(x^2 + z^2)^2 = a^2x^2 - a^2z^2$, pro linea ordinis quarti, in qua centrum virium quoque in peripheriam incidit.

Scholion 2.

694. De figuris, quas corpora a datis viribus centripetis ſollicitata deſcribunt, hic plura addere operae non eſſet pretium, cum in Phyſica et Aſtronomia aliae virium centripetarum hypotheſes, niſi quae quadratis diſtantiarum reciprocé eſt proportionalis, vſum habeant nullum. Quando tamen in Aſtronomia corpus a pluribus huiusmodi viribus ſollicitatum conſiderari debet, quarum vna prae reliquis maximam vim exercet, haec prout res poſtulat ne reliquas in computum ducere opus ſit, aliquantum vel augetur vel diminuitur, quo ſaltem quam fieri poteſt proxime motus illius corporis cognoſcatur. His igitur caſibus curua, quam corpus deſcribit, non multum diſcrepabit ab ellipſi. Hanc ob rem Aſtronomi hanc curuam ad inſtar ellipſis contemplari ſolent, quae autem non eſt fixa ſed mobilis, ita vt corpus in ellipſi circa focum reuoluente moueri concipiant. Ex hocque oritur mobilitas orbitarum planetarum, qua lineae abſidum perpetuo in alium ſitum transferuntur. Nos vero quo propius ad veritatem accedamus praeter mobilitatem axis ellipſis etiam ſpeciem eius tanquam variabilem conſiderabimus. Ita igitur hac in re verſabimur, vt de quolibet elemento curuae, quam corpus deſcribit, determinemus, cuiusnam ellipſis focum in centro virium habentis ſit portio, ex quo tam poſitio quam ſpecies iſtiusmodi ellipſium innoteſcet. Omnes autem hae ellipſes alterutram focum in ipſo centro virium poſitum habebunt, quia ad id punctum corpus perpetuo retrahitur.

PROPOSITIO 84.

Problema.

695. *Si vis centripeta non multum diſcrepat a rationе reciproca duplicata diſtantiarum; determinare motum ellipſis, eiusque continuam ſpeciei mutationem, atque corporis motum in iſta mutabili ellipſi.* Tabula VI. Fig. 5.

Solutio.

Sit centrum virium C, habeatque corpus in M ſecundum directionem MT celeritatem altitudini v debitam. Conatur vis centripeta in M agens $= P$, diſtantia CM $= y$ et ſinus anguli CMT $= s$. Iam perſpicuum eſt, quamcunque legem teneat P, ſemper tamen aequari poſſe huic formae $\frac{f^2}{y^2}$, dummodo f non

non quantitatem constantem vt hactenus, sed variabilem denotet. Erit ergo $f^2 = Py^2$. Quia autem dum corpus elementum Mm percurrit f constans manet, poterit determinari ellipsis, cuius focus est C et elementum Mm, in qua corpus, si f perpetuo maneret constans, moueretur. Sit igitur AC huius ellipsis axis transuersi positio, erit tangens anguli MCA $= \frac{2svy\sqrt{(1-ss)}}{ff-2ssvy}$ (656), quae ergo erit $= \frac{2sv\sqrt{(1-ss)}}{Py-2s^2v}$. At latus rectum erit $= \frac{4s^2v}{P}$ et axis transuersus $\frac{Py^2}{Py-v}$ (cit.). Ex centro C demittatur perpendiculum CT in tangentem MT, quod ponatur $= p$, erit $s = \frac{p}{y}$. Atque vbi perpendiculum in tangentem est $= h$, quod fiat in G posita $CG = a$, sit corporis celeritas debita altitudini c, ex quo erit $v = \frac{ch^2}{p^2}$ (589). Tangens vero $MT = \sqrt{(y^2-p^2)}$ ponatur breuitatis gratia $= t$. His positis erit tang. ang. MCA $= \frac{2ch^2t}{Py^2p-2ch^2p}$ et latus rectum $= \frac{4ch^2}{Py^2}$, transuersum vero $= \frac{Py^2p^2}{Pyp^2-ch^2}$. Praeterea vero est ex natura attractionis $Pdy = \frac{2ch^2dp}{p^3}$ (587). Ex qua aequatione p in y poterit determinari, adeoque tota ellipsis ex solo y, et c et h. Sit iam CE linea fixa, cum qua angulus, quem recta CM constituit, ex natura curuae potest definiri. Ab hoc igitur angulo, si auferatur angulus MCA, habebitur inclinatio lineae absidum AC in rectam fixam CG. Motus autem corporis ex cognita celeritate, $v = \frac{ch^2}{p^2}$ facile innotescet. Q. E. I.

Scho-

PUNCTI MOTU
ctenus, sed variabilem ... Quia autem ... currit f constans ... cuius focus est ... si f perpetuo ... Sit igitur AC huius ... erit tangens anguli ... quae ergo erit $= \frac{4s^2v}{P}$ et axis ... C demittatur ... T, quod ponatur ... perpendiculum in ... posita $CG = a$, ... altitudini c, ex quo $MT = \sqrt{(y^2-p^2)}$ ... positis erit tang. ... rectum $= \frac{4ch^2}{Py^2}$, ... Praeterea vero est ... (587). Ex qua ... adeoque tota ... Sit iam CE linea ... CM constituit, ... Ab hoc igitur ... habebitur in... in rectam fixam CG. ... celeritate, $v = \frac{ch^2}{p^2}$
Scho-
696. Ell... potest vocari el... nem circulorum ... linearum mensu... est pure geom... tem inueniend... oportet celerit...
697. Si ... positio axis elli... ob euanescente...
698. Si ... rectus: Hoc ig... distantiae reci... $c = \frac{f^2}{2h^2}$. Curua ... bitur, est spir... igitur curua li... cum radio MC ... erit $= 2y = 2M$...
699. Si ... $= C - \frac{ch^2}{p^2}$. ... erit $C = c$ ...

Scholion 1.

696. Ellipsis hoc modo determinata merito potest vocari ellipsis curuam osculans ad similitudinem circulorum osculatorum, quibus curuedines linearum mensurantur. Haec vero consideratio non est pure geometrica, sed ad hanc ellipsin osculantem inueniendam praeter curuae naturam nosse oportet celeritatem corporis et vim centripetam.

Corollarium 1.

697. Si t euanescit linea absidum AC seu positio axis ellipsis osculantis incidit in radium CM, ob euanescentem angulum MCA.

Corollarium 2.

698. Si fuerit $P = \frac{2ch^2}{y^3}$, fiet angulus MCA rectus: Hoc igitur casu erit vis centripeta vt cubus distantiae reciproce. Quare posito $P = \frac{f^2}{y^3}$, erit $c = \frac{f^2}{2h^2}$. Curua autem, quae tum a corpore describitur, est spiralis hyperbolica (679). Pro hac igitur curua linea absidum perpetuo est normalis cum radio MC. At latus rectum ellipsis osculantis erit $= 2y = 2MC$.

Corollarium 3.

699. Si fuerit $P = \frac{f^n}{y^n}$, erit $\int Pdy = -\frac{f^n}{(n-1)y^{n-1}} = C - \frac{ch^2}{p^2}$. Quia vero facto $y = a$ fieri debet $p = h$ erit $C = c - \frac{f^n}{(n-1)a^{n-1}}$. Hinc inuenietur

$p^2 =$

$$p^2 = \frac{(n-1)cb^2a^{n-1}y^{n-1}}{(n-1)ca^{n-1}y^{n-1} + f^n(a^{n-1} - y^{n-1})}.$$ Latus rectum ergo ellipsis osculantis erit $\frac{4cb^2y^{n-2}}{f^n}$. Latus transuersum et ang. MCA ex his etiam in y determinabuntur.

Corollarium 4.

700. Si fuerit $P = \frac{cb^2}{yp^2}$, ellipsis osculans semper erit parabola. Fiet autem hoc valore loco P in aequatione $Pdy = \frac{2cb^2dp}{p^3}$ substituto $p^2 = \frac{b^2y}{a}$. Et consequenter $P = \frac{ac}{yy}$. Hoc autem casu curua descripta haec ipsa est parabola ob $f^2 = ac$ (647).

Scholion 2.

701. Non confundenda est haec ellipsium osculantium doctrina cum motu corporum in orbibus mobilibus, de quo *Neutonus* aliique post eum tractauerunt. Hoc enim loco determinauimus, cuiusnam ellipsis portio sit quoduis elementum curuae a corpore descriptae. At, quando de orbibus mobilibus sermo erit, inuestigabitur vis centripeta efficiens, vt corpus in data curua circa centrum virium reuoluente moueatur.

PROPOSITIO 85.

Theorema.

Tabula VI. Fig. 6.

702. *Si corpus vtcunque proiectum attrahatur ad quotcunque centra virium* A, B, C, *quorum singulorum vires sint distantiis ab ipsis proportionales: corpus eodem modo mouebitur ac si ad punctorum* A, B, C, *commune centrum grauitatis* O *attraheretur pariter in ratione distantiarum simplici.*

Pl MOTU
les: corp Latus
A, B, (La-
retur pa his etiam in y de-
Pof 4.
distantia osculans sem-
directio hoc valore loco P
tangens uto $p^2 = \frac{b^2y}{a}$. Et
centrum casu curua descrip-
A, B, C (647).
tiis direc
trahat vi
hetur ad haec ellipsium
CM.γ. orporum in orbi-
strandum aliique post eum
corpus a erminauimus, cu-
punctis A lementum curuae
perpendi ando de orbibus
libet vis ur vis centripeta
eritque circa centrum vi-
dentibus
vero tan 85.
At quia C
in A, B, roiectum attraha-
Bb+γ C A, B, C, quorum
Mc=(α- ipsis proportiona-
αAM; les:
(α+β+

Demonstratio.

Positis centrorum A, B, C, viribus, quas in distantia 1 exercent, α, β, γ, respectiue, sit ac directio motus, quam corpus in M habet, ideoque tangens curuae EMF descriptae in M. At sit O centrum grauitatis corporum α, β, γ, in punctis A, B, C positorum, et in O concipiatur vis distantiis directe proportionalis, quae in distantia 1, attrahat vi $= \alpha + \beta + \gamma$. His positis corpus in M attrahetur ad A vi AM.α, ad B vi BM.β, et ad C vi CM.γ. His autem viribus simul agentibus demonstrandum est aequalem esse vim OM.$(\alpha + \beta + \gamma)$ corpus ad O trahentem. Ad hoc ostendendum ex punctis A, B, C et O in tangentem ac demittantur perpendicula Aa, Bb, Cc et Oo. Hoc modo quaelibet vis in normalem et tangentialem resoluetur, eritque summa normalium ex viribus ad A, B, C tendentium ortarum $= \alpha.\,Aa + \beta.\,Bb + \gamma.\,Cc$, summa vero tangentialium erit $= -\alpha.\,Ma + \beta.\,Mb + \gamma.\,Mc$. At quia O est centrum grauitatis corporum α, β, γ in A, B, C sitorum, liquet ex staticis fore $\alpha.Aa + \beta.Bb + \gamma\,Cc = (\alpha + \beta + \gamma)$. O$o$ et $-\alpha.Ma + \beta.Mb + \gamma.Mc = (\alpha + \beta + \gamma)\,Mo$. Ex quo perspicitur viribus αAM, β.BM, γ.CM coniunctis aequiualere vim $(\alpha + \beta + \gamma)$OM. Q. E. D.

Co-

Corollarium 1.

703. Corpus igitur in hac hypothesi ellipsin describet, cuius centrum in ipso centro grauitatis O est positum (631). Omnes enim vires idem efficiunt, quod vnica in O posita et attrahens in ratione directa distantiarum.

Corollarium 2.

704. Manifestum quoque est, quotcunque etiam sint huiusmodi virium centra in ratione distantiarum attrahentia; semper tamen corpus in ellipsi motum iri, omnino ac si ad vnicum virium centrum in eorum communi centro grauitatis positum attraheretur.

Scholion 1.

705. Demonstratio porro pari quoque modo succedit, si illa quotcunque virium centra non sint in eodem plano posita, quemadmodum ex staticis principiis cuique perspectum esse potest. Hincque intelligitur, corpus nihilominus perpetuo in eodem plano moueri debere, etiamsi centra virium in diuersissimis planis sint dispersa.

Scholion 2.

706. Si centra virium in alia ratione quacunque praeter simplicem distantiarum ad se trahant, huiusmodi reductio ad vnicum virium centrum locum prorsus non habet, atque motus corporis calculo vix, re ipsa autem ne vix quidem potest

PU. MOTU
test determ- mati-ones e- ditionibus hanc ob r- ex duplici cepit, sed natus est. siderationi- da, qua e- ad vires att- subsidia ad quentibus, tanquam i- bimus. A quae dupli- praeter cu- tentiae sol- que quanti- motus det- curua et c- tur, ex q- tebit.
707. -cundum rec- faciat, et determinare
-pothesi ellipsin -ntro grauitatis vires idem effi- -rahens in ratio-
-t, quotcunque . in ratione di- -men corpus in vnicum virium grauitatis posi-
-ari quoque mo- -um centra non -dmodum ex sta- -e potest. Hinc- -s perpetuo in -msi centra viri- -a.
-ia ratione qua- -rum ad se tra- -m virium cen- -que motus cor- vix quidem po- test

test determinari. His igitur in casibus ad approximationes erit confugiendum, quae pro variis conditionibus diuersimode sunt instituendae. Atque hanc ob rem *Neutonus* verum lunae motum, qui ex duplici attractione oritur, determinare non suscepit, sed vero tantum proxime hoc praestare conatus est. Ad hoc autem opus est peculiaribus considerationibus, atque inuersa methodus est adhibenda, qua ex curua, quam corpus describit cognita, ad vires attrahentes receditur. Quamobrem, quae subsidia ad hoc institutum afferri possunt, ea in sequentibus, cum inuerso ordine vim sollicitantem tanquam incognitam sumus inuestigaturi, explicabimus. Ad hanc igitur tractationem progrediemur quae duplici modo institui potest. Primo enim praeter curuam descriptam vt cognita sumetur potentiae sollicitantis directio in singulis locis, ex hisque quantitas potentiae sollicitantis et ipse corporis motus determinabitur. In altera contemplatione curua et corporis motus in ea pro datis accipientur, ex quibus potentiam sollicitantem erui oportebit.

PROPOSITIO 86.

Problema.

707. *Inuenire legem vis perpetuo dorsum secundum rectas* MP *inter se parallelas tendentis, quae faciat, vt corpus in data curua* AM *moueatur; atque determinare corporis in singulis locis* M *celeritatem.* Tabula VIII. Fig. 1.

 So-

Solutio.

Per rectas MP ducatur normali AP, et vocetur AP, x et PM, y. Ponatur curua AM$=s$, et radius osculi MR in M$=r$, erit $r=\frac{dsdy}{ddx}$ sumto ds pro constante. Porro debita sit corporis in M celeritas altitudini v, et vis corpus in M trahens secundum MP ponatur P. Ex his habebuntur duae istae aequationes $dv=-Pdy$ et $Prdx=2vds$ (547), ex quibus si cognita esset v statim appareret quantitas ipsius P. Eliminetur igitur P ad v inueniendum ex hac aequatione $rdxdv=-2vdsdy$, quae posito loco r eius valore $\frac{dsdy}{ddx}$ abit in hanc $-\frac{dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, quae integrata dat $lC-lv=l\frac{dx^2}{ds^2}$. Cognita autem sit celeritas in puncto A, eaque debeatur altitudini c, atque sit cosinus anguli MAP seu valor ipsius $\frac{dx}{ds}$ incidente puncto M in A$=\lambda$. Hinc ergo erit $lC=lc+2l\lambda$ et consequenter $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dx^2}$, vnde corporis in singulis locis M celeritas innotescit. Vis autem sollicitans P reperietur $=\frac{2\lambda^2 c ds^2}{rdx^3}=\frac{2\lambda^2 c ds^2 ddx}{dx^3 dy}$. Siue sumto dx pro constante, quo casu est $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$, erit $P=\frac{-2\lambda^2 c ddy}{dx^2}$. Tempus denique, quo arcus AM percurritur erit $=\int\frac{ds}{\sqrt{v}}=\frac{x}{\lambda\sqrt{c}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

708. Quaecunque ergo sit vis sollicitans, corpus perpetuo aequabiliter secundum horizontem progreditur, ob tempus per AM proportionale ipsi AP, vti iam supra est obseruatum (579).

Co-

MOTU
mali AP, et vocecurua AM$=s$, et $r=\frac{dsdy}{ddx}$ sumto ds corporis in M celeritas in M trahens secundum habebuntur duae $Prdx=2vds$ (547), appareret quantitas ad v inueniendum $dsdy$, quae posito $-\frac{dv}{v}=\frac{2ddx}{dx}$, quae nita autem sit celeritas altitudini c, atvalor ipsius $\frac{dx}{ds}$ incihinc ergo erit $lC=lc$ vnde corporis in escit. Vis autem $=\frac{2\lambda^2 c ds^2 ddx}{dx^3 dy}$. Siue casu est $r=\frac{ds^3}{-dxddy}$ nique, quo arcus Q. E. I.
I.
sit vis sollicitans, ndum horizontem AM proportionale atum (579).
Co-
70 mittatu que pe pendic re vis $2\lambda^2 c$ a
7 Quo c At si t magnu corpus
7 posita $r=a$, et $v=$ hens e leritas vero g puncto
7 CB est zontal $z^2=at$

Corollarium 2.

709. Si ex R in rectam MP productam demittatur perpendicularis RS, et ex S in MR quoque perpendiculum ST, atque denique tertium perpendiculum TV ex T in MS: erit MV$=\frac{rdx^2}{ds^2}$. Quare vis sollicitans P se habebit ad vim grauitatis vt $2\lambda^2 c$ ad MV, seu P est reciproce vt MV.

Corollarium 3.

710. Si angulus ad A est rectus, fiet $\lambda=0$. Quo casu corpus directe sursum ascendere debebit. At si tantum sit λ infinite paruum atque c infinite magnum, ita vt $2\lambda^2 c$ finitum habeat valorem, corpus in huiusmodi curua vtique moueri poterit.

Exemplum I.

711. Sit curua AM circulus, cuius diameter posita sit in axe AP, et radius $=a$. Erit itaque $r=a$, et $ds:dx=a:y$. Hanc ob rem fiet $P=\frac{2\lambda^2 a^2 c}{y^3}$, et $v=\frac{\lambda^2 a^2 c}{y^2}$. Vis ergo corpus in M deorsum trahens est reciproce, vt cubus applicatae MP et celeritas reciproce vt haec ipsa applicata. Altitudo vero generans celeritatem in summo peripheriae puncto, vbi fit $y=a$ est $=\lambda^2 c$.

Exemplum 2.

712. Sit curua AMC parabola, cuius axis CB est verticalis et parameter $=a$. Ducatur horizontalis MQ, et ponatur CQ$=t$ et MQ$=z$, erit $z^2=at$. Praeterea vero erit $dx=-dz$ et $dy=-dt$, et Tabula VII. Fig. 2.

et vt ante $\sqrt{(dt^2+dz^2)}=ds$. Quo circa fiet $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2\lambda^2 c ddt}{dz^3}$. Debita sit celeritas in puncto summo C altitudini b, eritque ob $ds=dz$ in C, $\lambda^2 c=b$, ideoque $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ sumto dz pro constante. Ex aequatione vero $z^2=at$ fit $dt=\frac{2zdz}{a}$ et $ddt=\frac{2dz^2}{a}$, atque $ds^2=dz^2(1+\frac{4z^2}{a^2})$. Consequenter inuenitur $v=b(\frac{a^2+4z^2}{a^2})=b(\frac{a+4t}{a})$ et $P=\frac{4b}{a}$. Ex quo apparet potentiam deorsum tendentem, quae efficit, vt corpus in hac parabola progrediatur esse constantem. Quae igitur, si aequalis sit grauitati $=1$, fiet $b=\frac{a}{4}=$ distantiae foci a vertice. Quae conueniunt cum supra inuentis (454 et sqq.).

Exemplum 3.

Tabula VII. Fig. 3.

713. Sit curua MAN hyperbola centro C descripta habens axem CP verticalem. Ponatur semiaxis transuersus $AC=a$, et semi coniugatus $=e$, atque $CP=t$ ac $PM=z$, sitque insuper altitudo celeritati quam corpus in A habet, debita $=b$, erit vt supra pro parabola fecimus, $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ sumto dz constante. Est vero ex natura hyperbolae $a^2z^2=-a^2e^2+e^2t^2$, ex qua fit $dt=\frac{a^2zdz}{e^2t}$ et $ddt=\frac{a^2dz^2}{e^2t}-\frac{a^2zdzdt}{e^2t^2}=\frac{a^2e^2t^2dz^2-a^4z^2dz^2}{e^4t^3}=\frac{a^4dz^2}{e^2t^3}$. Consequenter erit $P=\frac{2a^4b}{e^2t^3}$, seu potentia corpus deorsum trahens vbique in M proportionalis est reciproce cubo distantiae ML puncti M ab horizontali LC per centrum C ducta. Porro erit $\frac{ds^2}{dz^2}=\frac{e^4t^2+a^4z^2}{e^4t^2}=\frac{(a^2+e^2)t^2-a^4}{e^2t^2}$. Atque praeterea habebitur $v=\frac{b(a^2+e^2)t^2-a^4b}{e^2t^2}$.

PRO-

PUN
714. um C inuen. corpus in ha corporis in
Quia quaeratur curuae pun quod ex C posita CM aequatio. tas debita in tangent quae sunt i tati in M= sitis erit Vel posito Q. E. I.
715. Arcum A tionale ar
716 centripet
E MOTU
circa fiet $v=\frac{\lambda^2 c ds^2}{dz^2}$ in puncto summo dz in C, $\lambda^2 c=b$, dz pro constante, $=\frac{2zdz}{a}$ et $ddt=\frac{2dz^2}{a}$, quenter inuenitur Ex quo apparet quae efficit, vt iatur esse constantem. sit grauitati $=1$, rtice. Quae conet sqq.).
3. perbola centro C lem. Ponatur semi coniugatus $=e$, insuper altitudo ce, debita $=b$, erit $v=\frac{bds^2}{dz^2}$ et $P=\frac{2bddt}{dz^2}$ natura hyperbola $dt=\frac{a^2zdz}{e^2t}$ et ddt Consequenrpus deorsum traest reciproce cubo ntali LC per cen PRO-

PROPOSITIO 87.

Problema.

714. *Data curua AMB vna cum centro virium C inuenire legem vis centripetae, quae faciat, vt corpus in hac curua libere moueatur, et celeritatem corporis in loco quouis M.* Tabula VII. Fig. 4.

Solutio.

Quia curua AMB vna cum puncto C est data, quaeratur aequatio inter distantiam MC cuiusque curuae puncti M a centro C et perpendiculum CT, quod ex C in tangentem MT demittitur. Quare posita $CM=y$ et $CT=p$ habebitur inter p et y aequatio. Iam sit corporis in dato loco A celeritas debita altitudini c, atque perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $=h$. Eorum vero, quae sunt incognita, vocetur altitudo debita celeritati in $M=v$, et vis centripeta in $M=P$. His positis erit $v=\frac{ch^2}{p^2}$ (589), atque $P=\frac{2ch^2dp}{p^3dy}$ (592). Vel posito radio osculi in $M=r$ erit $P=\frac{2ch^2y}{p^3r}$ (592). Q. E. I.

Corollarium 1.

715. Tempus etiam, quo corpus quem vis Arcum AM absoluit, erit $=\frac{2\,ACM}{h\sqrt{c}}$ seu erit proportionale areae ACM (588).

Corollarium 2.

716. Quia ch^2 est quantitas constans, erit vis centripeta in puncto quouis M proportionalis huic va-

valori $\frac{dp}{p^3 dy}$ seu huic $\frac{y}{p^3 r}$. Celeritas vero $\sqrt{v}$ proportionalis est reciproce perpendiculo CT in tangentem MT demisso (589).

Exemplum 1.

717. Sit curua data ellipsis, et centrum virium C in ipso eius centro positum. Vocetur eius semi axis transuersus, a et semiaxis coniugatus, b erit ex natura ellipsis $p=\frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2-y^2)}}$. Habebitur ergo $dp=\frac{abydy}{(a^2+b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, ideoque $\frac{dp}{p^3 dy}=\frac{y}{a^2 b^2}$. Quocirca prodibit vis centripeta $P=\frac{2cb^2 y}{a^2 b^2}$, quae igitur proportionalis est distantiae corporis a centro.

Exemplum 2.

718. Sit curua data iterum ellipsis, at centrum virium C in eius alterutro foco positum. Ponatur eius axis transuersus $=A$ et latus rectum $=L$, eritque ex natura ellipsis $4pp=\frac{ALy}{A-y}$. Differentiando ergo fit $8pdp=\frac{A^2 L dy}{(A-y)^2}$. Quia vero est $16p^4=\frac{A^2L^2y^2}{(A-y)^2}$ erit $\frac{dp}{2p^3}=\frac{dy}{Ly^2}$, et consequenter $P=\frac{4cb^2}{Ly^2}$. Vis igitur centripeta reciproce erit proportionalis quadrato distantiae corporis a centro virium C.

Exemplum 3.

719. Sit curua spiralis logarithmica, et centrum virium in eius centro positum; erit $p=ny$ et $\frac{dp}{p^3 dy}=\frac{1}{n^2 y^3}$, ideoque $P=\frac{2cb^2}{n^2 y^3}$. Quare vis centripeta erit reciproce vt cubus distantiae corporis a centro.

PRO-

PUNCT. ... MOTU
P... ...tas vero $\sqrt{v}$ pro... ...iculo CT in tan-
720. Vi... corpus in data cu... dentem ad aliud ... curua et eodem ... ctae cV ex c ad ... ctae, ad solidum ...
..., et centrum vi... ...n. Vocetur eius ...xis coniugatus, b ... Habebitur er... $\frac{dp}{p^3 dy}=\frac{y}{a^2b^2}$. Quo-
Sit corporis ... pus circa centr... dini c, et perp... demissum $=b$. ... um c mouetur, ... et perpendicul... demissum $=\theta$. ... ca vtrumque vi... $=\theta\sqrt{\gamma}$ seu cb^2... porro in tanger... CT et ct, sitqu... erit vis centri... quam vocemus ... in M ad cen... $\Pi=\frac{2\gamma\theta^2.cM}{r.ct^3}$ (71... P:$\Pi=\frac{CM}{CT^3}:\frac{cM}{ct^3}$. ... CM erit, ob tr... $=CM:cV$. ... $=cV^3:cM.CM$
...$\frac{2cb^2y}{a^2b^2}$, quae igitur ...ris a centro.
... ellipsis, at cen... ...co positum. Po... ...latus rectum $=L$, Differentiando ... est $16p^4=\frac{A^2L^2y^2}{(A-y)^2}$ ... $\frac{4cb^2}{Ly^2}$. Vis igitur ...tionalis quadrato ... C.
...rithmica, et cen... ...um; erit $p=ny$ et ...are vis centri... ...stantiae corporis
PRO-

PROPOSITIO 88.

Theorema.

720. *Vis tendens ad centrum* C, *quae facit, vt corpus in data curua* AM *moueatur, se habet ad vim tendentem ad aliud centrum* c, *quae facit, vt corpus in eadem curua et eodem tempore periodico moueatur, vt cubus rectae* cV *ex* c *ad tangentem* TM *parallele rectae* CM *ductae, ad solidum ex recta* cM *in quadratum rectae* CM. Tabula VII. Fig 5.

Demonstratio.

Sit corporis celeritas in dato puncto A, cum corpus circa centrum virium C reuoluitur debita altitudini c, et perpendiculum ex C in tangentem in A demissum $=b$. At cum corpus circa centrum virium c mouetur, sit celeritas in A debita altitudini γ, et perpendiculum ex centro c in tangentem in A demissum $=\theta$. Quia autem tempora periodica circa vtrumque virium centrum sunt aequalia erit $b\sqrt{c}=\theta\sqrt{\gamma}$ seu $cb^2=\gamma\theta^2$ (715). Ex centro C et c porro in tangentem in M demittantur perpendicula CT et ct, sitque radius osculi in $M=r$. His positis erit vis centripeta in M ad centrum C tendens, quam vocemus $P=\frac{2cb^2.CM}{r.CT^3}$. Atque vis centripeta in M ad centrum c tendens, quam vocemus $\Pi=\frac{2\gamma\theta^2.cM}{r.ct^3}$ (714). Quamobrem ob $cb^2=\gamma\theta^2$ erit $P:\Pi=\frac{CM}{CT^3}:\frac{cM}{ct^3}$. Ducta autem cV parallela rectae CM erit, ob triangula TCM et tcV similia, $CT:ct=CM:cV$. Hanc ob rem erit $P:\Pi=\frac{1}{CM^2}:\frac{cM}{cV^3}=cV^3:cM.CM^2$. Q. E. D.

Co-

Corollarium 1.

721. In eodem puncto M erit celeritas corporis, dum ad virium centrum C attrahitur ad celeritatem, dum ad alterum centrum c attrahitur, reciproce vt CT ad ct, siue directe vt cV ad CM. Sequitur hoc ex eo, quod est $cb^2 = \gamma\theta^2$.

Corollarium 2.

722. Si tempora periodica non sint aequalia, sed sint inter se vt T ad t; erit $T:t = \frac{1}{b\sqrt{c}} : \frac{1}{\theta\sqrt{\gamma}}$ seu $cb^2 : \gamma\theta^2 = t^2 : T^2$. Consequenter erit $P : \Pi = t^2 . cV^3 : T^2 . cM . CM^2$. Seu vires P et Π erunt in ratione composita ex ratione in theoremate assignata, et inuersa duplicata temporum periodicorum.

Corollarium 3.

723. Eodem hoc casu, quo tempora periodice sunt inaequalia, erit celeritas in M centro virium in C posito, ad celeritatem in M centro virium in c posito in ratione reciproca composita ex ratione perpendiculorum CT et ct et ratione temporum periodorum $T : t$.

Scholion 1.

724. Propositionem hanc *Neutonus* deduxit ex Lib. I. prop. VII. in coroll. 3. Princ. eaque vtitur ad inueniendam vim centripetam tendentem ad punctum quodcunque ex cognita vi ad aliud quodpiam centrum trahente. Nos hic vsum eius in vnico exemplo sequente ostendemus.

Ex-

OTU
72 celeritas cor- que cen ahitur ad ce- tro C. ttrahitur, re- erit con t cV ad CM. ad cent faciensq circulo sint aequalia, gentem $\frac{1}{b\sqrt{c}} : \frac{1}{\theta\sqrt{\gamma}}$ seu circuli t P : $\Pi = t^2$. rem eri unt in ratione Ducatu assignata, et ang. cM um. =cM : $\Pi = \frac{8g.C}{cM}$ testas q npora perio- c, vt i M centro vi- centro viri- ompofita ex ratione tem-
7 culi cir et cele onus deduxit reuolu Princ. eaque =cV : n tendentem Quam vi ad aliud uoluen ic vsum eius tiae c
Ex-

Exemplum.

725. Sit curua data circulus AMc, alterumque centrum virium positum sit in ipso circuli centro C. Vis igitur centripeta P ad C tendens vbique erit constans, dicaturque g. Ex hac quaeratur vis ad centrum virium c in peripheria situm tendens Π, faciensque, vt corpus eodem tempore periodico in circulo moueatur. Demittatur ergo ex c in tangentem MV perpendiculum CV, quod ex natura circuli simul parallelum erit rectae CM. Quamobrem erit $g : \Pi = cV^3 : cM . CM^2$, ideoque $\Pi = \frac{g.cM.CM^2}{cV^3}$. Ducatur recta AM erunt triangula cVM, cMA ob ang. $cMV = cAM$, similia; et propterea $cV : cM = cM : cA$. Habetur ergo $cV = \frac{cM^2}{2CM}$, ex quo fit $\Pi = \frac{8g.CM^5}{cM^5}$. Est igitur haec vis Π reciproce vt potestas quinta distantia Mc corporis a centro virium c, vt iam supra (692) est inuentum. Tabula VII. Fig. 6.

Corollarium 4.

726. Sit celeritas corporis in peripheria circuli circa centrum C reuoluentis debita altitudini c, et celeritas corporis in M circa centrum virium c reuoluentis debita altitudini v. Eritque $\sqrt{c} : \sqrt{v} = cV : CM = cM^2 : 2.CM^2$ (721) seu $v = \frac{4c.CM^4}{cM^4}$. Quamobrem celeritas corporis circa centrum c reuoluentis erit vbique reciproce vt quadratum distantiae eius ab c.

Co-

Corollarium 5.

727. Quia centro virium in centro circuli C exiftente, eft $b=y=p=r=$ radio CM; erit $P=g=\frac{2c}{CM}$ (592). Hanc ob rem fiet pofito $\Pi=\frac{f^5}{cM^5}$, $g=\frac{f^5}{8.CM^5}$, et $c=\frac{f^5}{16.CM^4}$. Ideoque $v=\frac{f^5}{4.CM^4}$.

Scholion 2.

728. In his propofitionibus pofuimus curuam, quam corpus defcribit, abfolute effe datam et aequationem pro ea haberi. Sed dantur etiam cafus, quibus curua ipfa quam corpus defcribit non datur, fed ex certis conditionibus ad ipfum motum fpectantibus ante debet inueniri, quam lex vis centripetae poteft determinari. Hucque pertinent, quae paffim tradita funt de motu corporum in orbibus mobilibus, qua de re igitur in fequenti propofitione tractabimus.

PROPOSITIO 89.

Problema.

Tab. VIII. Fig. 1. 729. *Si orbita* (A) (M) (B) *vtcunque reuoluatur circa centrum virium* C; *oportet definiri vim centripetam perpetuo ad* C *tendentem, quae faciat vt corpus in hac orbita mobili moueatur.*

Solutio.

Dum orbita ex fitu (A) (M) (B) in fitum AMB peruenit, ponatur corpus interea ex (A) in M perueniffe, ita vt corpus interea in orbita angulum (A)C(M)=ACM, reuera autem angulum (A)CM =(A)C(M)+(A)CA defcripferit. Exiftente initio corpore in (A) fit eius celeritas vera non ea, quam in orbita habet, debita altitudini c, et recta C(A), quae tam in orbitam quam in veram curuam, in qua corpus mouetur, fit perpendicularis $=a$. Porro fit celeritas corporis in M, quatenus in orbita mouetur, debita altitudini u, et vera corporis celeritas in M debita altitudini v. At celeritas angularis in orbita fit ad veram celeritatem angularem circa C, dum corpus in M verfatur, vt 1 ad w. In orbita igitur tanquam immobili fpectata elementum (M)(m) celeritate $\sqrt{u}$ defcribetur. Ponatur diftantia $C(M)=CM=y$, et perpendiculum in tangentem orbitae in (M) vel M ex C demiffum, $C(T)=CT=p$, habebiturque ob orbitam datam aequatio inter p et y. Iam dum corpus in orbita elementum Mm defcribit, progrediatur ipfa orbita motu angulari circa C per angulum $=m$Cμ, et hanc ob rem corpus reipfa non in m, fed in μ reperietur, fumto $C\mu=Cm$, atque idcirco interea elementum Mμ defcripfiffe cenfendum eft, id quod fecit celeritate debita altitudini v. Erit itaque $M\mu:Mm=\sqrt{v}:\sqrt{u}$, atque centro C defcripto arculo Mν (ob datam motuum angularium circa C in orbita et reuera rationem $1:w$) erit $Mn:M\nu=1:w$. Eft vero pofita tangente $MT=\sqrt{(y^2-p^2)}=q$, $Mm=\frac{ydy}{q}$, et $Mn=\frac{pdy}{q}$. Quo circa habebitur $M\mu=\frac{ydy\sqrt{v}}{q\sqrt{u}}$, et $M\nu=\frac{wpdy}{q}$. Ex quo ob $\mu\nu=mn=dy$ prodibit $1+\frac{w^2p^2}{q^2}=\frac{vy^2}{uq^2}$ feu $vy^2=uq^2+w^2up^2$. Quia Mμ eft elemen-