Corollarium 1.

364. Sit $dZ = pzdz$ vt ante denotante p functionem quamcunque ipſius z, erit $\frac{zdz}{dp} =$ ſubnormali PR, quam ponamus $= r$. Quo facto habebitur $P = \frac{\int ydx}{(1 + rp\sqrt{\int ydx})^2}$ atque $Y = \frac{dp}{dx}$.

Corollarium 2.

365. Sit curua data BND linea recta parallela axi AC, ita vt potentia ſit vniformis, ſemper enim potentia vniformis datur, quae efficiat vt corpus dato tempore ſpatium AC abſoluat. Ponatur $AB = PN = b$; erit $\int ydx = bx$. Vnde habebitur $P = \frac{bx}{(1 + rp\sqrt{bx})^2}$ hacque differentiata obtinetur $Y = \frac{dp}{dx}$.

Scholion.

Duas has poſteriores propoſitiones inter ſe fere ſimiles ideo innexi, quia peculiarem etiam ſoluendi modum requirunt, cuius vtilitas in ſequentibus reddetur conſpicua. Ceterum vero ipſae propoſitiones non ſunt inelegantes et huic capiti, in quo omnes caſus motum rectilineum a potentiis productum reſpicientes exponere conſtituimus, neceſſario erant inſerendae. Neque vero eas ad caſus ſpeciales accommodare idoneum viſum eſt, ob nimis prolixum calculum, ad quem fuiſſet perueniendum. His igitur relictis pergimus ad motus rectilineos in medio reſiſtente.

CAPUT QUARTUM
DE MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI IN MEDIO RESISTENTE.

DEFINITIO 18.

367.

Lex reſiſtentiae eſt poteſtas ſeu functio celeritatis corporis, cui ipſa reſiſtentia eſt proportionalis. *Sic ſi reſiſtentia eſt celeritatis quadrato proportionalis, lex reſiſtentiae eſt celeritatis quadratum.*

Corollarium 1.

368. Cognoſcitur igitur ex lege reſiſtentiae, ſi plura puncta aequalia diuerſis ferantur celeritatibus, quomodo ſe habeant motus diminutiones inter ſe. Atque dato celeritatis decremento vnius puncti, reliquorum quoque celeritatis decrementa inueniuntur.

Corollarium 2.

369. Si ergo pro vno celeritatis gradu datur ratio reſiſtentiae ad vim grauitatis, pro omnibus aliis quoque gradibus ratio inter reſiſtentiam et vim grauitatis ex lege reſiſtentiae innoteſcet. Atque ex hoc effectus reſiſtentiae in corpus motum inuenietur.

Scholion 1.

370. Pertinet vtique vis resistentiae ad potentias, atque ideo cum vi grauitatis est homogenea, quemadmodum, cum de motu corporum in fluidis tractabitur, apparebit. Semper igitur potentia absoluta poterit assignari eundem in corpore effectum, quem resistentia, producens. Haec vero potentia absoluta pendebit a celeritate corporis, quam ob rem in eius expressione celeritas inerit, seu altitudo celeritati debita. Hoc igitur modo corporis motus in medio resistente reducetur ad corporis motum a potentiis absolutis sollicitatum, cuius, cum supra in capite secundo leges sint expositae, ex iis omnes quaestiones poterunt resolui.

Scholion 2.

371. Directio vis resistentiae in hac tractatione nobis semper erit congruens cum directione motus corporis (117) et contraria. Quamobrem potentia absoluta ei substituenda motum semper retardabit, directione motus non mutata. Perspicuum itaque est, vim resistentiae, quoties eius expressio prodit negatiua, habituram directionem contrariam, motumque corporis esse acceleraturam. Hic quidem casus in fluidis quiescentibus locum habere nequit, sed tamen in calculo, cum ex dato corporis motu resistentia inuestigabitur, saepe occurret.

Co-

PUNC MOTU RECTIL.
37 resistentiae ad potum, si tis est homogenea, recta m corporum in fluidis rectio n r igitur potentia natura in corpore effedem rec s. Haec vero pote corporis, quam as inerit, seu altiur modo corporis cetur ad corporis 37 llicitatum, cuius, cuius di sint expositae, ex gruit, resolui. recta pr soluta n mutabit.
iae in hac tractans cum directione 37 ria. Quamobrem tantum notum semper retentias mutata. Perspimus, n , quoties eius exconueni uram directionem capite p esse acceleraturam. te cum centibus locum ha-Antequ ulo, cum ex dato conueni gabitur, saepe ocimpedit ciorbus
Co-

Corollarium 3.

372. Corpus igitur in medio resistente motum, si a nulla alia potentia sollicitetur, in linea recta moueri debet. Quia enim a vi resistentiae directio motus non mutatur, eius motus, quem a natura in linea recta prosequitur, perpetuo in eadem recta fiat necesse est.

Corollarium 4.

373. Si praeterea accedit potentia absoluta cuius directio perpetuo cum directione motus congruit, corpus quoque in medio resistente in linea recta progredietur. Neque enim potentia haec absoluta neque vis resistentiae directionem motus immutabit.

Scholion 3.

374. In hoc igitur capite, in quo motus tantum rectilineos exponere constituimus, alias potentias absolutas cum vi resistentiae non coniungemus, nisi quarum directio cum motus directione conuenit. Hanc ob rem omnes potentias, quas in capite praecedente adhibuimus, etiam in hoc capite cum vi resistentiae coniunctas considerare licebit. Antequam autem potentias absolutas inducemus, conuenit motum corporum a sola resistentiae vi impeditum examini subiicere, quo facilius a simplicioribus ad magis composita progrediamur.

Scho-

Scholion 4.

375. In legis resistentiae expressione seu illa celeritatis functione, praeter altitudinem celeritati debitam v inesse possunt quantitates constantes, sed excludimus omnes quantitates variabiles a loco corporis pendentes. Fieri quidem potest, vt resistentia, quam corpus aequali celeritate latum patitur, maior minorue sit, prout corpus in alium atque alium locum perueniat; quemadmodum euenit, quando fluidum, in quo corpus mouetur in alio loco est densius in alio vero rarius, quo casu in resistentiae expressione loci rationem haberi oportet. Neque tamen in lege resistentiae locum respici conuenit, nam per eam resistentiae rationem, quando corpus in eodem loco variis celeritatibus moueri ponitur, exprimere volumus. Discrimen vero quod ex loci varietate oriri potest in exponente resistentiae comprehendemus, quo simul resistentiae intensitas indicatur.

DEFINITIO 19.

376. Exponens resistentiae est altitudo debita celeritati ei, quam si corpus habet, resistentiam patitur aequalem vi grauitatis. *Hac scilicet celeritate motum corpus tantum a resistentia retardatur, quantum a vi grauitatis sursum proiectum.*

Corollarium 1.

377. Si igitur corpus in medio resistente motum celeritatem habeat altitudini v debitam, atque haec altitudo v sit ipsi exponenti resistentiae aequa-

PU. RECTIL.
aeq lione seu illa
gre em celeritati
aeq stantes, sed
sem a loco cor-
vt resisten-
tum patitur,
tiae m atque ali-
exp uenit, quan-
bere alio loco est
grau resistentiae
secun ter. Neque
mini i conuenit,
ndo corpus
eri ponitur,
quod ex loci
resistentiae
vel Illud te intensitas
corp
dem
medi altitudo de-
quod , resistenti-
tem c scilicet ce-
form retardatur,
eand
dum
maio o resistente
moti ebitam, at-
sisten resistentiae
re, aequa-

aequalis, erit, dum corpus per spatiolum dx progreditur, $dv = -dx$; quia potentia resistentiae aequiualens hoc casu aequalis est vi grauitatis, quam semper ponimus $= 1$, et motum retardat.

Corollarium 2.

378. Datis ergo lege et exponente resistentiae motus diminutio potest definiri. Namque ex exponente intelligitur, quantam corpus habere deberet celeritatem, vt resistentiae vis aequalis esset grauitati, et ex lege resistentiae cognoscitur ratio, secundum quam diuersae celeritates a resistentia diminuuntur.

Scholion 1.

379. Exponens resistentiae est vel constans vel variabilis seu a loco, in quo est corpus, pendens. Illud accidit in medio seu fluido vniformi, quod corporibus vbique eandem resistentiam infert, si quidem eadem vbique moueantur celeritate. Huiusmodi medium resistens appellabimus vniforme, quippe quod in omnibus locis sui est simile. Exponens autem resistentiae variabilis est in medio seu fluido difformi, etiamsi in quoque loco seorsim resistentia eandem teneat legem. Nam quo densius est fluidum seu medium, in quo corpus versatur, eo quoque maiorem patitur corpus resistentiam aequali etiam motum celeritate. Maior scilicet erit celeritas resistentiam grauitati aequalem patiens in fluido rariore, minor vero in densiore. Quia autem densitas

 et

et raritas medii a loco pendet, perſpicuum eſt reſiſtentiae exponentem, ſi eſt variabilis a loco corporis pendere debere.

DEFINITIO 20.

380. Media reſiſtentia ſimilia hic vocantur, quae eandem habent reſiſtentiae legem. Diſſimilia vero, quae reſiſtentiae lege differunt. *Sic aqua et mercurius ſunt huiusmodi media ſimilia, ſiquidem ambo haec fluida reſiſtunt, vti videntur, in duplicata celeritatum ratione.*

Corollarium I.

381. Si ergo media reſiſtentia ſimilia inter ſe differunt, tota differentia conſiſtit in exponente reſiſtentiae, ſeu denſitate et raritate. Sic in aqua exponens reſiſtentiae eſt maior quam in argento viuo, quia hoc eſt fluidum denſius illo.

Scholion.

382. Media ſimilia cum corporibus aequaliter celeribus diuerſas facere queant reſiſtentias, prout eorum denſitates inter ſe differunt, has ipſas denſitates ex reſiſtentia, quam corpori data celeritate motu inferunt, metiri conuenit. In fluidis enim, vt, cum de motu corporum in fluido agitur, docetur, reſiſtentiae aequalibus celeritatibus factae ſunt denſitatibus fluidorum proportionales. Hancque proprietatem ad alia media quamcunque reſiſtentiae legem tenentia transferimus: quia aliae reſi-

ſtentiae leges praeter duplicatam celeritatam rationem mere ſunt imaginariae, et ad analyſin tantum exercendam adhiberi ſolent.

PROPOSITIO 49.
Problema.

383. *Corporis in recta* AP *moti in medio quocunque reſiſtente, cuius et lex et exponens reſiſtentiae ſunt cognita, data celeritate in puncto* P, *inuenire celeritatis decrementum, dum ſpatii elementum* Pp *percurrit.* Tab. IV Fig. 1.

Solutio.

Poſito elemento $Pp = dx$, ſit altitudo celeritati in P debita $= v$, et exponens reſiſtentiae $= q$. Denotat ergo Vq celeritatem, quam ſi corpus in P haberet, vis reſiſtentiae aequalis foret vi grauitatis $= 1$. Quamobrem, ſi eſſet $v = q$, tum haberetur vis reſiſtentiae $= 1$ atque $dv = -dx$ (376, 377). Sit autem V ea celeritatis Vv functio, qua reſiſtentiae lex exprimitur, atque deſignet Q ſimilem functionem ipſius Vq, ſeu Q eſt huiusmodi quantitas, quae prodit, ſi in V loco v ſubſtituitur q. Reſiſtentia ergo, quam patitur corpus celeritate Vq motum, quae eſt $= 1$, ſe habebit ad reſiſtentiam corporis celeritate Vv moti, vt ſe habet Q ad V (367). Ex hoc elicitur vis reſiſtentiae, quam corpus celeritate Vv latum patitur, $= \frac{V}{Q}$. Quae cum motum retardet erit $dv = \frac{-Vdx}{Q}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

384. Quia quantitas V est functio ipsius v et constantium, atque q, ideoque et Q vel est constans vel functio quaedam ipsius x (375); aequatio inuenta $dv = \frac{-Vdx}{Q}$ sponte separatur. Habetur enim $\frac{dv}{V} = \frac{-dx}{Q}$, ex qua integrata vel saltem constructa totus corporis motus per AP cognoscitur.

Corollarium 2.

385. Cum vis resistentiae sit $-\frac{V}{Q}$, poterit ex hac medii densitas cognosci. Quia enim densitatem metimur ex resistentia, quam corpus data celeritate motum patitur, oportebit in $\frac{V}{Q}$ loco v substituere quantitatem constantem, quo facto habebitur resistentia vt $\frac{1}{Q}$. Densitas igitur medii quoque erit vt $\frac{1}{Q}$ seu reciproce vt Q.

Scholion.

386. Denotat hic $\frac{V}{Q}$ non tantum potentiam sollicitantem, sed iam ipsam vim retardatricem resistentiae, et hanc ob rem non opus est massam corporis in calculum inducere. Ceterum hic corporis massam constantem seu plurium corporum massis inter se aequales ponimus. Non enim consultum esse iudico hanc tractationem, quae non nisi in vnico casu in vsum venire potest, praeter necessitatem extendere et magis complicatam reddere.

PRO-

P TU RECTIL.
ctio ipsius v et vel est constans ; aequatio in- in Habetur enim co constructa totur.
ei tiu de sta rel tis ho ctic : $-\frac{V}{Q}$, poterit nia enim densicorpus data ce- $\frac{V}{Q}$ loco v sub- facto habebi- medii quoque
Hal $\frac{dv}{v^m}$ stat $x=$ C= v^{1-} si $v=$ m potentiam rdatricem re- st massam cor- m hic corporis porum massis nim consultum on nisi in vni- r necessitatem dere.
PRO-

PROPOSITIO 50.

Problema.

387. *In medio resistenti vniformi, quod resistit in ratione quacunque multiplicata celeritatum, definire corporis moti celeritatem in singulis locis.*

Solutio.

Moueatur corpus in recta AP, sitque celeritas eius in puncto A debita altitudini c. Ponatur spatium percursum AP $= x$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Exponens resistentiae, qui est constans, vocetur $= k$, et lex resistentiae sit v^m, ita vt resistentia vbique sit vt celeritatis potestas exponentis $2m$. In praecedente igitur formula $dv = -\frac{Vdx}{Q}$ abit hoc casu V in v^m, et Q, quia talis esse debet functio ipsius q seu k, qualis est v^m ipsius v, erit $= k^m$. Habemus ergo hanc aequationem $dv = -\frac{v^m dx}{k^m}$, seu $\frac{dv}{v^m} = -\frac{dx}{k^m}$. Cuius integralis est $\frac{v^{1-m}}{1-m} = C - \frac{x}{k^m}$. Constans vero C ex hoc determinabitur, quod facto $x = o$ transmutari debeat v in c, quamobrem erit $C = \frac{c^{1-m}}{1-m}$. Hinc itaque resultabit aequatio ista $v^{1-m} = c^{1-m} - \frac{(1-m)x}{k^m}$, seu $v = \sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m - (1-m)x}{k^m}}$, si est $m < 1$. At si erit $m > 1$, habebitur $v = \frac{c k^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m + (m-1)c^{m-1}x)}}$. Vnicus vero casus, quo

est

est $m=1$, in his formulis non comprehenditur, sed deriuari debet ex aequatione differentiali, quae, facto $m=1$, erit huiusmodi $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{k}$, cuius integralis est $lv=C-\frac{x}{k}$. Simili vero modo erit $C=lc$, ideoque $lv=lc-\frac{x}{k}$. Logarithmis ad numeros reductis habebitur ergo $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Quemcunque igitur m habeat valorem, corporis celeritas in quouis loco rectae AP innotescit. Q. E. I.

Corollarium 1.

388. Si resistentia medii est quadratis celeritatum proportionalis, erit $m=2$. Quamobrem pro hoc casu, qui solus in rerum natura existere putatur, valet singularis solutionis casus $v=ce^{\frac{-x}{k}}$. Ex quo apparet corpus celeritatem ante non amittere totam, quam spatium infinitum x percurrerit.

Corollarium 2.

389. Si medium in maiore quam duplicata celeritatum ratione resistit, erit $m>1$, atque

$$v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}.$$ Perspicitur autem ex hac aequatione celeritatem non euanescere, nisi ponatur $x=\infty$.

Corollarium 3.

390. Hoc vero differt iste casus a priore, quo erat $m=1$, quod in illo, si fuerit celeritas initialis infinite magna, prodeat vbique ea tanta. Hoc vero casu, quo est $m>1$, si ponatur $c=\infty$, prouenit $v=\sqrt[m-1]{\frac{k^m}{(m-1)x}}$. Erit ergo v semper finitae magnitudinis, nisi sit $x=o$ vel $=\infty$.

Corollarium 4.

391. Praeterea hoc casu, quo $m>1$, corpus antequam perueniat in punctum A, semper alicubi puta in C habuit celeritatem infinite magnam. Ad hoc punctum C inueniendum, fieri debet x negatiuum, et $k^m+(m-1)c^{m-1}x$ poni aequale nihilo. Vnde inuenitur $AC=\frac{k^m}{(m-1)c^{m-1}}$. Tab. IV. Fig. 2.

Corollarium 5.

392. Si resistentia fit in minore quam duplicata ratione celeritatum, ideoque est $m<1$, erit $v=\sqrt[1-m]{\frac{c^{1-m}k^m-(1-m)x}{k^m}}$. Celeritas corporis ergo euanescit in puncto C, si accipiatur $AC=\frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$. Consequenter, cum corpus in C peruenerit, ibi perpetuo quiescet, neque vltra progredietur. Tab. IV. Fig. 1.

Corollarium 6.

393. Si ponatur $m=o$, erit resistentia constans et aequaliter aget in corpus siue quiescens siue motum. Abit ergo hoc casu resistentia in potentiam absolutam et aequalem vi grauitatis. Nam, quoniam si est $v=k$ resistentia aequalis ponitur vi grauitatis, etiam quacunque alia celeritate corpus moueatur, tantundem resistentiae patietur.

Scho-

Scholion 1.

394. Expoſuimus in his corollariis primarias motuum differentias, ſi fuerit vel $m=1$ vel maior vel minor vnitate. Hae vero differentiae breuibus hisce canonibus comprehendi poſſunt: ſi eſt $m=1$, corpus per totum ſpatium nusquam neque celeritatem infinitam neque nullam habebit. Deinde ſi $m>1$, corpus alicubi habeat celeritatem infinitam neceſſe eſt, euanescentem vero nusquam. Denique ſi $m<1$ corpus alicubi celeritatem habebit nullam, infinitam vero nusquam.

Scholion 2.

395. Haec celeritatis diminutio permanet eadem in quamcunque plagam corpus moueatur, quia reſiſtentiam vbique eandem oſtendit. Neque enim hic motus ſimilis eſt ei, qui a potentia abſoluta contra vrgente diminuitur, quo fit, vt corpus in contrariam plagam motum tantumdem acceleretur, quantum ante erat retardatum. Sed ad motum in medio reſiſtente diminutum reſtituendum atque rurſus pariter accelerandum ac ante diminuebatur, oportet vim reſiſtentiae negatiuam ſtatui, atque ita in vim propellentem transmutari. Tum enim fiet $dv=\frac{Vdx}{C}$, ex quo apparet celeritatem tantundem augeri, quantum ante minuebatur. Vi ergo reſiſtente in propellentem transmutata, motus corporis fiet retrogradus, atque ex P in A reuertetur ita, vt in ſingulis punctis ſpatii AP easdem recuperet celeritates, quas ante ibidem habebat.

Scho-

PUNCTI LI… …OTU RECTIL.
396. I… tandem ad qui… cultas, cuius… tum transmut… velimus conue… uenerit celerit… que euanescit… tiuus, et han… poterit depell… nis non poter… Calculus quide… tur CP=y, er… pe $v=\sqrt[1-m]{\frac{(1-m}{k^m}}$… ipſa abſurdum… ponens ipſius… titudinum cel… tangat. Quo… cto C nunqua… commonſtret…
…rollariis primarias …l $m=1$ vel maior …fferentiae breuibus …ſſunt: ſi eſt $m=1$, …am neque celerita- …bebit. Deinde ſi …eritatem infinitam …nusquam. Deni- …tatem habebit nul-
…iinutio permanet …orpus moueatur, …oſtendit. Neque …potentia abſoluta …fit, vt corpus in …ndem acceleretur, Sed ad motum in …endum atque rur- …te diminuebatur, …am ſtatui, atque …tari. Tum enim …itatem tantundem …ir. Vi ergo re- …tata, motus cor- …P in A reuertetur …P easdem recupe- …abebat.
Scho-
397. … mi, quod reſ… tatum proporti… ſpatium quodc…

Scholion 3.

396. In caſibus, quibus $m<1$, corpusque tandem ad quietem peruenit, occurrit eadem difficultas, cuius ſupra (316) mentio eſt facta, ſi motum transmutanda vi reſiſtente in propellentem velimus conuertere. Nam ſi corporis cum in C peruenerit celeritas eſt nulla, vis propellens $\frac{v^m}{k^m}$ quoque euanescit, ſi quidem m non eſt numerus negatiuus, et hanc ob rem nunquam ex loco C corpus poterit depelli. Hoc igitur caſu motus diminutionis non poterit in motum augmentationis conuerti. Calculus quidem contrarium oſtendit, nam ſi dicatur $CP=y$, erit altitudo debita celeritati in P, nempe $v=\sqrt[1-m]{\frac{(1-m)y}{k^m}}$. Quod autem ex hac aequatione ipſa abſurdum ſequatur, hinc apparet quod $\frac{1}{1-m}$ exponens ipſius y eſt vnitate maior, ideoque ſcala altitudinum celeritatibus debitarum rectam AC in C tangat. Quoties enim hoc euenit, corpus ex puncto C nunquam egredi poteſt, etiamſi calculus ſecus commonſtret (319).

PROPOSITIO 51.
Problema.

397. *Moto corpore in medio reſiſtente vniformi, quod reſiſtentiam facit poteſtati cuicunque celeritatum proportionalem; determinare tempus, quo corpus ſpatium quodcunque* AP *percurrit.*

So-

Solutio.

Positis vt in praecedente problemate, celeritate initiali in $A=\sqrt{c}$, $AP=x$, celeritate in $P=\sqrt{v}$, exponente resistentiae $=k$ et lege $=v^m$, ita vt vis resistentiae sit vt celeritatis potestas exponentis $2m$. Quia iam est $v=\frac{ck^{\frac{m}{m-1}}}{\sqrt[m-1]{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)}}$ (387) si quidem $m>1$, erit $\sqrt{v}=\frac{\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}{(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}$. Elementum ergo temporis quo spatiolum dx percurritur est $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{1}{2m-2}}}{\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}}$, cuius integralis est

$$=\frac{C+2(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}},$$

quod exprimit tempus per spatium AP, si modo constans C recte determinatur, id quod fit efficiendo, vt facto $x=0$ totum tempus euanescat. Debebit itaque esse

$$C=-\frac{2k^{\frac{2m^2-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{m-1}\sqrt{c}k^{\frac{m}{m-1}}};$$

quamobrem totum tempus per spatium

$$AP=\frac{2(k^m+(m-1)c^{m-1}x)^{\frac{2m-1}{2m-2}}-2k^{\frac{2mm-m}{2m-2}}}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}k^{\frac{m}{2m-2}}}.$$

Quae

PUNC TU RECTIL.
Quae emate, celeri- pecul itate in $P=\sqrt{v}$, v^m, ita vt vis exponentis $2m$.
erit exprin Quem his for (387) si qui-
Q. E. Ele-
3 est pro quo co totum dx percurritur usintegralis est
3 et con inuent tempu infinit spatiu uod exprimit nstans C recte vt facto $x=0$ itaque esse
4 peruen nitam notesc totum tempus
facto r Quae

Quae expressio quoque valet si $m<1$. At si est $m=1$, peculiari operatione opus est, nam quia est $v=ce^{\frac{x}{k}}$, erit $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{e^{\frac{x}{2k}}dx}{\sqrt{c}}$, cuius integrale est $\frac{2ke^{\frac{x}{2k}}-2k}{\sqrt{c}}$, quod exprimit tempus, quo spatium AP percurritur. Quemcunque ergo valorem habeat m, tempus ex his formulis per spatium quodcunque determinatur. Q. E. I.

Corollarium 1.

398. Si ergo resistentia quadratis celeritatum est proportionalis, et consequenter $m=1$, tempus quo corpus spatium infinitum describit, quoad scilicet totum suum motum amittit, erit quoque infinitum.

Corollarium 2.

399. Si vero est $m>1$, erit quoque $2m>1$, et consequenter formula exprimens tempus per AP inuenta recte est disposita. Ex ea autem apparet, tempus, donec corpus totum motum amittat, fore infinitum, id quod facile ex hoc perspicitur, quod spatium quoque sit infinitum (389).

Corollarium 3.

400. Quia vero hoc casu corpus, antequam peruenit in A, alicubi in C habuit celeritatem infinitam, tempus etiam, quo ex C in A pertingit innotescet facto $k^m+(m-1)c^{m-1}x=0$ (391). Quo facto resultat tempus per $CA=\frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}$. Tab. IV. Fig. 2.

Co-

Corollarium 4.

401. Si fuerit $m<1$, duo casus sunt a se inuicem distinguendi, quibus m vel maius est quam $\frac{1}{2}$ vel minus. Si enim est $m>\frac{1}{2}$, manet $2m-1$ numerus affirmatiuus, et tempus quo spatium AP absoluitur

$$\text{erit} = \frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}}{(2m-1)(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}} - \frac{2k^m}{(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}}.$$

Corollarium 5.

Tab. IV. Fig. 1.

402. Quia corpus hac hypothesi motum, omnem celeritatem amittit, cum in C peruenit existente $AC=\frac{c^{1-m}k^m}{1-m}$ (392), erit tempus, quo spatium hoc AC percurrit, ob denominatorem $(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{2m-1}{2-2m}}$ euanescentem, infinitum. Hoc igitur euenit, si m intra limites 1 et $\frac{1}{2}$ continetur.

Corollarium 6.

403. Sin vero fuerit $m<\frac{1}{2}$ erit tempus, quo spatium quodcunque AP percurritur $=\frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m}$ $-\frac{2k^{\frac{m}{2-2m}}(c^{1-m}k^m-(1-m)x)^{\frac{1-2m}{2-2m}}}{1-2m}$. Ex quo apparet tempus, quo corpus ex A in C, vbi totum suum motum amittit, esse finitum et $=\frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m}$. Fit enim hoc casu $c^{1-m}k^m-(1-m)x=0$ (392).

Scho-

PUNCT … OTU RECTIL.

40… casus, q… proporti… rentiali … $m=\frac{1}{2}$ pro… rithmis … vero C d… cto $x=0$ … percurrit … isus sunt a se inui… ius est quam $\frac{1}{2}$ vel … $2m-1$ numerus … m AP absoluitur … $2k^m$ … $(2m-1)c^{\frac{2m-1}{2}}$.

…pothesi motum, … in C peruenit … tempus, quo … denominatorem … em, infinitum. … es 1 et $\frac{1}{2}$ conti-

405 spatium … tum perd… spatium …

406 pus, quo… infinitum … maior; … nor, ten… it tempus, quo … ur $=\frac{2c^{\frac{1-2m}{2}}k^m}{1-2m}$

467 pellenten… li modo … eadem es… quia cor… locis ead… Ex quo apparet … vbi totum suum … Fit … 392).

Scho-

Scholion 1.

404. In his autem formulis non continetur casus, quo $m=\frac{1}{2}$, i. e. si resistentia est celeritatibus proportionalis. Hic igitur casus ex formula differentiali temporis est deducendus. Posito autem $m=\frac{1}{2}$ prodit $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{2dx\sqrt{k}}{2\sqrt{ck}-x}$. Cuius integrale a logarithmis pendet atque est $=2\sqrt{k}\,l\frac{C}{2\sqrt{ck}-x}$. Constans vero C debet esse $2\sqrt{ck}$, quo tempus euanescat facto $x=0$. Consequenter tempus quo spatium AP percurritur erit $2\sqrt{k}\,l\frac{2\sqrt{ck}}{2\sqrt{ck}-x}$.

Corollarium 7.

405. In hoc itaque casu, quo $m=\frac{1}{2}$, quia spatium AC, quo corpus percurrendo totum motum perdit, est $=2\sqrt{ck}$ (392), tempus quo hoc spatium percurritur est infinitum.

Corollarium 8.

406. Ex his igitur omnibus colligitur tempus, quo corpus totum suum motum amittit esse infinitum, si fuerit $2m$ vel aequalis vnitati, vel ea maior; contra vero si est $2m$ vnitate numerus minor, tempus totius motus esse finitum.

Scholion 2.

467. Si vis resistentiae transmutatur in propellentem, quo casu motus fit retrogradus et simili modo augetur, quo ante minuebatur; tempora eadem esse debebunt, quae hic sunt definita. Nam quia corporis spatium AP percurrentis in singulis locis eadem est velocitas siue ex A in P motu retar-

da-

dato siue viciſſim ex P in A motu accelerato feratur, inter vtrumque tempus diſcrimen eſſe non poteſt. Attamen iis caſibus, quibus ſpatium totum AC tempore finito abſoluitur, haec regula non valet, quia corpus in C quieſcens nullam vim propellentem ſentire poteſt (396). Semper vero huic regulae confidere poſſumus, ſi corpori finita celeritas initialis tribuatur.

PROPOSITIO 52.
Problema.

Tab. IV. Fig. 3. 408. *Sollicitetur corpus, quod mouetur in medio quocunque reſiſtente, a potentia quacunque abſoluta, determinare celeritatis incrementum vel decrementum, dum quodvis elementum* Pp *percurrit.*

Solutio.

Sit corporis celeritas in P debita altitudini v, et elementum percurrendum $Pp = dx$. Sit porro potentia abſoluta ſeu potius eius vis accelerans in $P = p$, atque exponens reſiſtentiae $= q$. Deſignet V eam ipſius v functionem, cui reſiſtentia proportionalis eſt, ſitque Q talis functio ipſius q, qualis V eſt ipſius v. His poſitis retardabitur corpus, dum per elementum Pp mouetur, vi reſiſtentiae $\frac{V}{Q}$ (383); interea vero ſimul acceleratur potentia abſoluta p. Quamobrem corpus elementum Pp percurrens accelerabitur a vi $p - \frac{V}{Q}$. Ex quo igitur erit $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$. Q. E. I.

Co-

FUNC OTU RECTIL.
ccelerato feratur, eſſe non poteſt. totum AC tem- non valet, quia propellentem ſen- huic regulae con- celeritas initia-
52.
od mouetur in me- quacunque abſolu- tum vel decremen- rcurrit.
ebita altitudini v, dx. Sit porro po- ccelerans in $P = p$, Deſignet V eam ia proportionalis qualis V eſt ipſi- us, dum per ele- iae $\frac{V}{Q}$ (383); in- entia abſoluta p. percurrens acce- rit $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$.
Co-

Corollarium 1.

409. Si igitur eſt $p > \frac{V}{Q}$ celeritas corporis elementum Pp percurrentis augebitur; ſin vero $p < \frac{V}{Q}$, eius celeritas diminuetur. Atque ſi fuerit $p = \frac{V}{Q}$ celeritas neque augebitur, neque minuetur, ſed immutata manebit per elementum Pp.

Corollarium 2.

410. Si potentia abſoluta fuerit motui contraria, eumque retardet; erit $dv = -pdx - \frac{V}{Q}dx$. Hoc igitur caſu corpus ab vtraque vi retardabitur.

Scholion 1.

411. Si potentia abſoluta corpus deorſum trahat, vt in ſolutione problematis poſuimus, atque corpus ſurſum moueatur, habebit et potentiam abſolutam et vim reſiſtentiae contrariam. Tum igitur habebitur iſta aequatio $dv = -pdx - \frac{V}{Q}dx$. Ex quo apparet motum aſcendentem non ſimilem fore deſcendenti, quia vis ſollicitans in aſcenſu non eſt negatiua ratione vis ſollicitantis in deſcenſu. Quo igitur aſcenſus ſimilis ſit deſcenſui atque corpus in vtroque motu in iiſdem locis eandem habeat celeritatem, oportet vim reſiſtentiae in aſcenſu transmutari in propellentem. Quo facto habebitur $dv = -pdx + \frac{V}{Q}dx$, ex qua aequatione perſpicitur corpus aſcendens per Pp tantundem retardari, quantum ante in deſcenſu accelerabatur.

Scho-

Scholion 2.

412. Aequatio inuenta $dv = pdx - \frac{V}{Q}dx$ hac ſumma extenſione ob defectum analyſeos neque ſeparari neque conſtrui poteſt: et hanc ob rem celeritas corporis in P non poteſt determinari. Multo minus igitur tempus, quo ſpatium AP abſoluitur poterit aſſignari. Relinqui ergo oportet hanc generalem aequationem, atque deſcendi ad caſus particulares, quibus aequatio poteſt ſeparari ac celeritas definiri. Triplici vero modo aequatio iſta ſeparationem indeterminatarum x et v admittit. Quorum primus eſt, ſi x plus vna dimenſione non habet. Secundus ſi v vnicam tantum obtinet dimenſionem. Tertius caſus habebitur, ſi x et v ſimul vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt; vel ſi aequatio ad aliam hac proprietate praeditam reduci poterit.

Corollarium 3.

413. Primus caſus ergo habetur, ſi et p et q fuerint conſtantes, tum enim quia et Q conſtans erit, prodit $dx = \frac{Qdv}{pQ - V}$, in qua indeterminatae ſunt a ſe inuicem ſeparatae. Praeterea vero etiam aequatio ſeparari poterit ſi fuerit $p = \frac{A}{Q}$. Tum enim erit $\frac{dv}{A - V} = \frac{dx}{Q}$, quae quia V ab v, et Q ab x pendent, conſtrui poteſt.

Corollarium 4.

414. Quo v vnicam habeat dimenſionem oportet ſit $V = v$, quo caſu quoque erit $Q = q$, et aequa-

PUNC . RECTIL.
aequat ... in deter ... $-\frac{V}{Q}dx$ hac ... os neque ſe- ... ob rem ce- ... nari. Multo ... ſoluitur po- ... hanc gene- ... caſus parti- ... ac celeritas ... iſta ſepara- ... tit. Quo- ... non habet. ... nenſionem. ... vbique eun- ... nt; vel ſi ... litam redu-
4 genea ſ Sit po menſio aequati primo cundo Debet $+1-\alpha$ rit $\alpha-1$ tem p minari.
4 ſumere quia in greditu rum x dem re poteſta $V = v^\alpha$, giam α ficient nam Itaque ... ſi et p et q ... Q conſtans ... inatae ſunt ... m aequatio ... m erit $\frac{dv}{A-V}$ ... lent, con- ... menſionem $Q = q$, et aequa-

aequatio generalis abibit in hanc $dv = pdx - \frac{vdx}{q}$, quae in determinatarum ſeparationem admittit.

Corollarium 5.

415. Quo appareat, quando aequatio homogenea ſit futura, ſit $V = v^\alpha$, et $q = x^\beta$, erit $Q = x^{\alpha\beta}$. Sit porro $p = x^\gamma$, et computetur v conſtituere δ dimenſiones dum x vnam adimplet. His poſitis aequatio illa abibit in hanc $dv = x^\gamma dx - \frac{v^\alpha dx}{x^{\alpha\beta}}$ in cuius primo termino cenſendae ſunt δ dimenſiones; in ſecundo $\gamma + 1$ dimenſiones, et in tertio $\alpha\delta + 1 - \alpha\beta$. Debet igitur eſſe $\delta = \gamma + 1$, atque $\gamma + 1 = \alpha\gamma + \alpha + 1 - \alpha\beta$, ſeu $\gamma(\alpha - 1) = \alpha(\beta - 1)$. Quoties igitur fuerit $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ toties aequatio ad homogeneitatem poteſt reduci, adeoque celeritas ipſa determinari.

Scholion 3.

416. Loco V, q et p alias functiones non aſſumere licet niſi poteſtates ipſarum v et x. Nam, quia in V non ineſſe poteſt x atque in q et p non ingreditur v, ac inſuper numerus dimenſionum ipſarum x et v vbique vel debet eſſe idem, vel ad eundem reducibilis; loco harum quantitatum neceſſario poteſtates debent aſſumi. Hanc ob rem poſui $V = v^\alpha$, $q = x^\beta$, et $p = x^\gamma$, atque ſuperiorem analogiam $\alpha - 1 : \alpha = \beta - 1 : \gamma$ elicui. Neglexi quidem coefficientes, qui ſalua hac reductione poſſunt adiici: nam homogeneitas hiſce perturbari non poteſt. Itaque poteſt poni $q = Bx^\beta$ et $p = Cx^\gamma$, manente eadem

eadem analogia. Pro x vero non solum spatium percursum AP potest substitui, sed illud ipsum quacunque constante auctum, dummodo eius differentiale sit dx vel huius aliquod multiplum. Ad v^{a} coefficientem addere non est opus, quia per V ratio tantum resistentiae indicatur.

Corollarium 6.

417. Si medium resistens est vniforme ideoque $\delta = o$; erit $a = -1 : \gamma$. Vnde fit $\gamma = \frac{a}{1-a}$. Quare si fuerit lex resistentiae v^{a}, potentia absoluta debebit esse $= Bx^{\frac{a}{1-a}}$, quo aequatio celeritatem definiens ad homogeneitatem possit reduci.

Scholion 4.

418. Hos motus rectilineos in medio resistente ita sumus pertractaturi, vt primo potentiam absolutam constantem ponamus, tumque ad quasuis vires centripetas progrediamur. Hisque expositis quaestiones inuersas contemplabimur, quemadmodum in praecedente capite fecimus, atque ex datis proprietatibus motus cum potentiam absolutam tum resistentiae vim eruemus.

PROPOSITIO 53.

Problema.

419. *Posita potentia absoluta, et medio resistente vniformi, determinare corporis descendentis celeritatem in singulis locis, si resistentia fuerit quadratis celeritatum proportionalis.*

So-

PUNCTI ... OTU RECTIL.
Mane... solum spatium ... illud ipsum qua... do eius differen... tiplum. Ad v^{a} ... quia per V ratio
... vniforme ideo... $= \frac{a}{1-a}$. Quare ... absoluta debe... eritatem defini... i.
... in medio resi... imo potentiam ... ique ad quasuis ... isque expositis ... quemadmo... atque ex datis ... absolutam tum
420. choet, eri... x, magis ... num nunqu... habebitur ... tum corpo... quam ex sp...
...3.
... medio resisten... ndentis celeri... ierit quadratis
421. toto Vgk ... erit vnifor... etiam ex ...
So-

Solutio.

Manentibus vt hactenus $AP = x$, celeritate in $P = \sqrt{v}$, sit potentia vniformis $= g$, exponens resistentiae $= k$. Quia lex resistentiae est v, erit vis resistentiae $= \frac{v}{k}$. Ex quibus prodit $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$, seu $dx = \frac{kdv}{gk-v}$; cuius integralis est $x = kl\frac{c}{gk-v}$. Sit celeritas initialis in A debita altitudini c debebit esse $C = gk - c$, atque $x = kl\frac{gk-c}{gk-v}$. Logarithmorum loco sumantur numeri $e^{\frac{x}{k}} = \frac{gk-c}{gk-v}$; ex qua aequatione prouenit $e^{\frac{x}{k}}v = c + gk(e^{\frac{x}{k}} - 1)$ seu $v = e^{\frac{-x}{k}}c + gk(1 - e^{\frac{-x}{k}}) = e^{\frac{-x}{k}}(c - gk) + gk$. Q. E. I.

Corollarium 1.

420. Si corpus in A motum ex quiete inchoet, erit $c = o$. Hoc igitur in casu habebitur $v = gk(1 - e^{\frac{-x}{k}})$, quae expressio, quo maior accipitur x, magis quoque augetur, certum tamen terminum nunquam potest transgredi. Nam sumto $x = \infty$, habebitur $v = gk$. Est ergo $\sqrt{gk}$ asymtotos celeritatum corporis descendentis, quam ante non acquirit, quam ex spatio infinito fuerit delapsum.

Corollarium 2.

421. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit huic asymtoto $\sqrt{gk}$ aequalis, motus corporis descendentis erit vniformis, fit enim $v = gk = c$. Apparet hoc etiam ex aequatione differentiali, $dv = gdx - \frac{vdx}{k}$.

Nam

Nam ſi ſemel fuerit $v = gk$, incrementum celeritatis erit perpetuo euaneſcens.

Corollarium 3.

422. Si fuerit $c < gk$, corpus deſcendens mouebitur motu accelerato, nunquam tamen celeritatem $\sqrt{gk}$ acquiret, niſi ſpatio infinito percurſo. Si enim eſt $c < gk$, quantitas $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ ſemper eſt negatiua, et hanc ob rem v perpetuo erit minor quam gk.

Corollarium 4.

423. Si celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit maior quam $\sqrt{gk}$, erit $e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$ quantitas poſitiua, ideoque v vbique maior quam gk. Percurſo vero ſpatio infinito fiet $v = gk$. Ex quo perſpicitur corpus hoc caſu motu retardato deſcendere.

Scholion 1.

424. Comprehendi debet in hac aequatione $v = e^{\frac{-x}{k}}(c-gk) + gk$ etiam caſus, quo corpus in vacuo a ſola potentia abſoluta ſollicitatum deſcendit. Hicque habebitur, ſi reſiſtentia ponatur euaneſcens, ſeu exponens k infinitus, tum enim reſiſtentiae vis $\frac{v}{k}$ euaneſcit. Difficile autem videtur determinatu, quem valorem habitura ſit altitudo v, facto $k = \infty$. Ad hunc vero inueniendum plurimum conducit $e^{\frac{-x}{k}}$ in ſeriem aequiualentem $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{6k^3} +$ etc. transmu-

mutare, cuius ſi k eſt ∞ ſufficit loco accipere $1 - \frac{x}{k}$. Quo valore loco $e^{\frac{-x}{k}}$ ſubſtituto habebitur $v = c - \frac{cx}{k} + gx = c + gx$ ob euaneſcentem terminum $\frac{cx}{k}$. Quae aequatio conuenit cum ea, quam ſupra (239) inuenimus; nam quod ibi eſt $\frac{g}{A}$ hic nobis eſt tantum g. Quoniam g nonſolum potentiam abſolutam, ſed vim eius accelerantem exhibet.

Scholion 2.

425. Si k non quidem habet valorem infinitum, ſed tamen perquam ingentem; prout accidit, quando corpora vehementer grauia in fluido tenui delabuntur; magnam praeſtabit vtilitatem ſuperior ſeries, ſumendis tantum tribus terminis primis $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2}$ loco $e^{\frac{-x}{k}}$: error enim erit inſenſibilis. Hoc igitur caſu ſi corpus ex quiete delabatur, vt ſit $c = 0$, erit $v = gx - \frac{gx^2}{2k}$. Ex qua aequatione vero proximus ipſius v valor eruitur. At ſi prorſus nihil negligere velimus, erit $v = gx - \frac{gx^2}{2k} + \frac{gx^3}{6k^2} - \frac{gx^4}{24k^3} + \frac{gx^5}{120k^4} -$ etc. qua ſerie infinita verus valor ipſius v exprimitur.

PROPOSITIO 54.

Problema.

426. *Determinare tempus, quo corpus in medio reſiſtente uniformi, exiſtente reſiſtentia celeritatum quadratis proportionalis, a potentia abſoluta uniformi ſollicitatum per ſpatium* AP *deſcendit.*

 So-

Solutio.

Positis vt supra AP$=x$, celeritate in A$=\sqrt{c}$, celeritate in P$=\sqrt{v}$, exponente resistentiae $=k$, erit $v=gk+e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)$, (419). Ex quo habebitur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{dx}{\sqrt{(gk+e^{\frac{-x}{k}}(c-gk))}}$. Ad quod integrandum pono $e^{\frac{-x}{k}}=z$ et $c-gk=b$, breuitatis causa; eritque $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-kdz}{z\sqrt{(gk+bz)}}$. Fiat porro $gk+bz=r^2$, erit $z=\frac{r^2-gk}{b}$, et $\frac{dx}{\sqrt{v}}=\frac{-2kdr}{r^2-gk}=\frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r+\sqrt{gk}}-\frac{dr\sqrt{\frac{k}{g}}}{r-\sqrt{gk}}$. Quocirca erit $\int\frac{dx}{\sqrt{v}}=C+\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{r+\sqrt{gk}}{r-\sqrt{gk}}$. Restituatur loco r suus valor $\sqrt{(gk+e^{\frac{-x}{k}}(c-gk))}$, et habebitur tempus descensus per spatium AP$=C+$

$$\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}+\sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}-\sqrt{gk}}.$$

Quod quo euanescat facto $x=0$, debebit esse $C=-\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}-\sqrt{gk}}$. Ex his conficitur tempus descensus per AP

$$=\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}+\sqrt{gk}}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}-\sqrt{gk}}-\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}-\sqrt{gk}}.$$

Quae expressio simplicior reddi potest ita, vt prodeat $\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c-gk)+gk)}+\sqrt{gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$; cui itaque tempus descensus per AP aequale est. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

427. Si celeritas initialis fuerit $=0$, ideoque $c=0$, erit tempus, quo corpus per altitudinem AP descendit $=\frac{x}{\sqrt{gk}}+2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l(\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}+1)=\frac{x}{\sqrt{gk}}$ $-2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{1-\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}}{e^{\frac{-x}{k}}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}-\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}}=2\sqrt{\frac{k}{g}}$ $l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

Scholion 1.

428. Formula etiam generalis temporis per AP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ transmutatur posito $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l e^{\frac{x}{2k}}$ loco $\frac{x}{\sqrt{gk}}$ in hanc $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\frac{\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}gk+c-gk)}+\sqrt{e^{\frac{x}{k}}gk}}{\sqrt{c}+\sqrt{gk}}$. Ex qua ea, quam modo pro casu $c=0$ inuenimus, sponte sequitur, prodit enim $2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$.

Corollarium 2.

429. Si ponatur $c=gk$, quo casu motus descensus est aequabilis (422), prodibit tempus descensus per spatium AP ex hac vltima forma $=2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}=\frac{x}{\sqrt{gk}}$, quemadmodum ex natura motus aequabilis quoque reperitur. Tempus enim debet esse primi spatio percurso x diuiso per celeritatem $\sqrt{gk}$.

Scholion 2.

430. Tempora haec autem habebuntur in minutis secundis, si inuentae expressiones per 250 di-

diuidantur, et lineae c, k, x in scrupulis pedis Rhenani exhibeantur (222).

Scholion 3.

431. Posita celeritate initiali $c = 0$, si detur tempus, quo spatium AP descendendo percurritur, poterit ipsum spatium AP determinari. Nam sit tempus t minutorum secundorum, denturque k et x in scrupulis pedis Rhenani, erit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}} + \sqrt{(e^{\frac{x}{k}} - 1)})$. Consequenter $e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}} = \sqrt{e^{\frac{x}{k}}} + \sqrt{(e^{\frac{x}{k}} - 1)}$. Hinc inuenitur $e^{\frac{x}{2k}} = \frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}} + 1}{2e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}}$ atque $x = 2kl\left(\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}} + 1}{2}\right) - 250t\sqrt{gk}$, vel etiam $x = 250t\sqrt{gk} - 2kl\frac{2}{e^{-250t\sqrt{\frac{g}{k}}} + 1}$. Hocque spatium x reperitur in partibus millesimis pedis Rhenanis.

Scholion 4.

432. Si k fuerit quantitas vehementer magna, et tempus tantum quam proxime desideretur per AP, existente celeritate initiali $\sqrt{c} = 0$; assumo hanc formulam $\frac{x}{\sqrt{gk}} + 2\sqrt{\frac{k}{g}}\, l(\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})} + 1)$. In qua, quia $\sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})}$ fere euanescit si k est valde magnum, erit $l(1 + \sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})}) = \sqrt{(1 - e^{\frac{-x}{k}})} - \frac{1 + e^{\frac{-x}{k}}}{2} +$ (1−e

PUNCTI)TU RECTIL.
ı scrupulis pedis
$\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{3}{2}}}{3}$ -
quam pro) $c = 0$, si detur
dendo percur-
prouenit / .P determinari.
Quamobre orum, dentur-
um AP = ì, erit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{k}{g}}$
$e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}} = \sqrt{e^{\frac{x}{k}}}$
$\frac{e^{250t\sqrt{\frac{g}{k}}}+1}{e^{125t\sqrt{\frac{g}{k}}}}$ atque
433. ideoque fi AP a sola descensus nescentes tur $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$, nentum, vt hic inst
etiam $x = 250t$
um x reperitur
hementer magna
me desideretur
$\sqrt{c} = 0$; assumo
434. ressistit in proiciatur minari opo
+1). In qua,
ualde magnum,
$)-\frac{1+e^{\frac{-x}{k}}}{2}+$ (1−e
Sit c P = $\sqrt{v}$, p

$\frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{2}}{4} + \frac{(1-e^{\frac{-x}{k}})^{\frac{5}{2}}}{5}$. Est vero etiam quam proxime $\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{x\sqrt{x}}{4k\sqrt{k}} + \frac{5x^2\sqrt{x}}{96k^2\sqrt{k}}$. Ex quo prouenit $l(1+\sqrt{(1-e^{\frac{-x}{k}})}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}} - \frac{x}{2k} + \frac{x\sqrt{x}}{12k\sqrt{k}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{480k^2\sqrt{k}}$. Quamobrem habebitur tempus descensus per spatium AP $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$.

Corollarium 3.

433. Quando itaque resistentia euanescit, ideoque fiat $k = \infty$, prodibit descensus corporis per AP a sola potentia absoluta g sollicitati. Huius vero descensus tempus ex hac postrema formula, ob euanescentes omnes terminos praeter primum, inuenitur $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}}$, quemadmodum iam supra (216) est inuentum, neglecto numero m et g posito loco $\frac{g}{4}$ vt hic instituimus.

PROPOSITIO 55.

Problema.

434. *Si corpus in medio resistente uniformi, quod resistit in duplicata ratione, ex B data celeritate sursum proiciatur, atque sollicitetur potentia uniformi* g; *determinari oporteat celeritatem corporis in singulis locis.* Tab. IV. Fig. 4.

Solutio.

Sit celeritas in puncto B $= \sqrt{c}$, et celeritas in P $= \sqrt{v}$, ponatur BP $= x$, et resistentiae exponens

 $= k$,

$=k$; Quia nunc motus et a potentia absoluta g et a resistentia $\frac{v}{k}$ retardatur erit $dv = -gdx - \frac{vdx}{k}$. Hinc fit $dx = \frac{-kdv}{gk+v}$ et $x = kl\frac{C}{gk+v}$, vbi debet esse $C = gk+c$ quo fiat $v=c$ facto $x=0$. Quamobrem habebimus $x = kl\frac{gk+c}{gk+v}$; ex qua erit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk$, quae determinat celeritatem in quouis loco P. Q. E. I.

Corollarium I.

435. Pertingat corpus hoc modo sursum poiectum ad A vsque, et sit celeritas in $A=0$. Quocirca altitudo tota BA reperietur faciendo $v=0$, quo casu fit $e^{\frac{-x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$ seu $x = kl\frac{c+gk}{gk}$, cui quantitati aequalis est altitudo BA.

Corollarium 2.

436. Euanescat resistentia, seu fiat $k=\infty$ vt motus fiat in vacuo, erit $e^{\frac{-x}{k}} = 1 - \frac{x}{k}$. Hoc igitur casu erit $v = c - gx$. Eademque aequatio reperitur, si corpus a potentia sola absoluta g sollicitatum consideretur.

Corollarium 3.

437. Si medium resistens fuerit valde rarum, ita vt k numerum vehementer magnum significet, poterit loco $e^{\frac{-x}{k}}$ accipi $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{3k^3}$. Ex quo erit $v = c - \frac{cx}{k} + \frac{cx^2}{2k^2} - gx + \frac{gx^2}{2k} - \frac{gx^3}{3k^2}$ q. p. Quo autem haec quantitas valorem vero proximum ipsius v exhibeat,

PUNCTI . . . OTU RECTIL.
at, non so . . . a absoluta g et a
gnus, sed i . . . $gdx - \frac{vdx}{k}$. Hinc
minor quai . . . t esse $C=gk+c$
differat. . . . brem habebimus
$-gk$, quae de-
P. Q. E. I.
438.
ris per AB . . . modo sursum
vtroque ca . . . in $A=0$. Quo-
census per . . . faciendo $v=0$,
milis sit as . . . , cui quantitati
descensu i
Ad hoc au
tiam absol
lens. Na
contrariae . . . u fiat $k=\infty$ vt
da constit
gradus. . . . Hoc igitur
atio reperitur,
llicitatum con-
439.
tate hoc
qua integr . . . t valde rarum,
num significet,
440. . . . Ex quo erit
quam acc
$y=AB-x$ . . . o autem haec
hoc igitur . . . psius v exhibe-
at,

at, non solum opus est vt k sit numerus valde magnus, sed insuper requiritur vt altitudo x multo sit minor quam k, quo $e^{\frac{-x}{k}}$ non multum ab vnitate differat.

Scholion I.

438. Iam animaduertimus descensum corporis per AB non similem esse ascensui, si medium in vtroque casu resistens ponatur. Potest tamen descensus per AB cogitatione concipi, qui prorsus similis sit ascensui, ita vt corpus tam in ascensu quam descensu in puncto P eandem habeat celeritatem. Ad hoc autem statui oportet in descensu et potentiam absolutam accelerantem, et medium propellens. Nam quia in ascensu ambae motui erant contrariae, necesse est vt in descensu vtraque secunda constituatur, quo motus fiat perfecte retrogradus.

Corollarium 4.

439. Posita igitur altitudine $AP=y$, et celeritate hoc descensu $=\sqrt{v}$, erit $dv = pdy + \frac{vdy}{k}$. Ex qua integrata prodit $v = gk^{\frac{y}{k}} - 1$.

Scholion 2.

440. Congruit haec aequatio cum priore quam accensum contemplantes eruimus. Est enim $y = AB - x = kl\frac{c+gk}{gk} - x$, ideoque $e^{\frac{y}{k}} = \frac{c+gk}{gk}.e^{\frac{-x}{k}}$. Ex hoc igitur prodit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk$; quemadmodum

dum supra inuenimus in solutione problematis. Apparet igitur in hoc descensu corpus in singulis punctis P easdem esse habiturum celeritates, quas habuit ibidem in ascensu. Idem ergo etiam necesse est reperiatur tempus descensus hoc modo considerati, ac ex ascensu prouenit.

PROPOSITIO 56.

Problema.

441. *Determinare tempus ascensus per* BP *corporis in medio resistente in duplicata ratione celeritatum ex* B *data celeritate sursum proiecti, et interim sollicitati a potentia absoluta* g *deorsum tendente.*

Solutio.

Positis celeritate in $B = \sqrt{c}$, eaque in $P = \sqrt{v}$; deinde $BP = x$ et exponente resistentiae $= k$, erit $v = e^{\frac{-x}{k}}(c+gk) - gk$ (434). Ex quo oritur elementum temporis $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}}$. Ad quod integrandum pono vt supra $e^{\frac{-x}{k}} = z$ et $c+gk = b$, breu. gr. quo facto habebitur $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-kdz}{z\sqrt{(bz-gk)}}$. Sit $bz - gk = r^2$, erit $z = \frac{r^2+gk}{b}$, atque $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{-2kdr}{r^2+gk}$, cuius integratio a quadratura circuli pendet. Ad hoc igitur construendum constituatur quadrans circuli *abc* cuius radius *ac* sit $= 1$; sumatur in eo tangens $at = \frac{r}{\sqrt{gk}}$, eritque arcus $am = \int \frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk}$ qui signetur hoc modo $A.\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Huius-

Tab. IV. Fig. 5.

iusmodi scilicet expressio $A\,t$ nobis denotet arcum circuli, cuius tangens est t existente radio $= 1$. Hanc ob rem erit $\int \frac{-2kdr}{r^2+gk} = -2\sqrt{\frac{k}{g}} \int \frac{dr\sqrt{gk}}{r^2+gk} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}} A.\frac{r}{\sqrt{gk}}$. Quia autem est $r = \sqrt{(e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk)}$, erit $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = C - 2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}$. Quae quantitas cum debeat euanescere facto $x = 0$, dabit $C = 2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{\frac{c}{gk}}$. Tempus igitur ascensus per spatium BP inuenitur $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{\frac{c}{gk}} - 2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}}$ $(A.\sqrt{\frac{c}{gk}} - A.\sqrt{\frac{e^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-gk}{gk}}) = 2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\frac{\sqrt{cgk} - \sqrt{(gke^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-g^2k^2)}}{gk + \sqrt{(ce^{\frac{-x}{k}}(c+gk)-cgk)}}$ Tab. IV. Fig. 4.

Q. E. I.

Corollarium 1.

442. Quia tota altitudo AB ad quam corpus pertingere potest habetur faciendo $x = kl\frac{c+gk}{gk}$ quo casu fit $e^{\frac{-x}{k}} = \frac{gk}{c+gk}$; Inuenietur tempus totius ascensus $= 2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{gk}}$.

Corollarium 2.

443. Quare si fuerit $c = gk$ erit tempus totius ascensus per $BA = 2\sqrt{\frac{k}{g}}.A.1$. At arcus cuius tangens aequatur radio est peripheriae pars octaua. Posita itaque quarta peripheriae parte $amb = \pi$, erit tempus ascensus per $BA = \pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

A 2 Co-

Corollarium 3.

444. Ex hoc quoque intelligitur, ſi celeritate infinita corpus ex B ſurſum proiiciatur tempus aſcenſus totius nihilo minus fore finitum, fit enim $=2\sqrt{\frac{k}{g}}.\mathrm{A}.\infty$; qui arcus cum ſit quarta peripheriae pars $=\pi$, erit tempus totius aſcenſus $=2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.

Corollarium 4.

445. Si loco celeritatis initialis $\sqrt{c}$ detur tota altitudo $\mathrm{BA}=a$, ad quam corpus pertingit, quia eſt $a=kl\frac{c+gk}{gk}$ et propterea $c=gk(e^{\frac{a}{k}}-1)$; reperietur tempus totius aſcenſus per $\mathrm{BA}=2\sqrt{\frac{k}{g}}.\mathrm{A}.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$.

Scholion 1.

446. Si transmutetur aſcenſus in deſcenſum medio accelerante, vt ſupra aſſumſimus (438) et vocetur $\mathrm{AP}=y$, erit tempus deſcenſus per $\mathrm{AP}=2\sqrt{\frac{k}{g}}\mathrm{A}.\sqrt{(e^{\frac{y}{k}}-1)}$, ſubſtituto y loco a in ſuperiore formula. Ibi enim a denotabat altitudinem aſcenſu percurſam, hic vero eſt y altitudo integra, ad quam corpus celeritate, quam P habet, pertingere poteſt.

Scholion 2.

447. Aequatio fundamentalis pro deſcenſu hoc modo conſiderata eſt $dv=gdy+\frac{vdy}{k}$ (438), quae ex aequatione fundamentali pro vero deſcenſu $dv=gdx-\frac{vdx}{k}$ (419) poteſt formari ponendo y loco x et $-k$ loco k. Quare etiam expreſſio temporis vero pro-

PUNCTI … RECTIL.
proxima … , ſi celerita-
mus (432 … atur tempus
terit ad … m, fit enim
uerſum; … peripheriae
Hoc itaqu … $=2\pi\sqrt{\frac{k}{g}}$.
ſpatium A
fuerit num … $\sqrt{c}$ detur to-
… rtingit, quia
448. … ; reperietur
vt fiat $k=$
um BA= … $\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$.
re $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}}-\frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}}$
termini pr … in deſcen-
… ſimus (438)
449. … ſcenſus per
tegri aſcer
quia eſt $t=$ … a in ſuperi-
… itudinem aſ-
$\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{(e}$ … udo integra,
$\mathrm{T}^2+1=e$ … bet, pertin-
ro deſcenſu
438), quae
ro deſcenſu
450. … ndo y loco x
proiectum i. … nporis vero
plicata cele … pro-
ſoluta vniſo

proxima per ſpatium AP ex ea quam ſupra inuenimus (432) pro vero deſcenſu, accommodari poterit ad hunc deſcenſum imaginarium aſcenſus inuerſum; ponendo quoque y loco x et $-k$ loco k. Hoc itaque modo inuenitur tempus deſcenſus per ſpatium $\mathrm{AP}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}}-\frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}}+\frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ *q. p.* dummodo $\frac{y}{k}$ fuerit numerus vnitate minor.

Corollarium 5.

448. Si medii reſiſtentia prorſus euaneſcat, vt fiat $k=\infty$, erit tempus totius aſcenſus per ſpatium $\mathrm{BA}=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. Quae expreſſio prouenit ex ſuperiore $\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{g}}-\frac{y\sqrt{y}}{6k\sqrt{g}}+\frac{y^2\sqrt{y}}{240k^2\sqrt{g}}$ poſito a loco y, omnes enim termini praeter primum euaneſcunt.

Corollarium 6.

449. Poterit hinc etiam ex dato tempore integri aſcenſus t reperiri altitudo percurſa a. Nam quia eſt $t=2\sqrt{\frac{k}{g}}.\mathrm{A}.\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$, erit tangens arcus $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}=\sqrt{(e^{\frac{a}{k}}-1)}$. Vocetur illa tangens T, erit $\mathrm{T}^2+1=e^{\frac{a}{k}}$ et $a=kl(\mathrm{T}^2+1)$.

PROPOSITIO 57.

Problema.

450. *Dato tempore quo corpus ex* B *ſurſum proiectum iterum in* B *decidit in medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione, et ſollicitante potentia abſoluta vniformi* g, *determinare altitudinem* BA *ad quam* Tabula IV. Fig. 4.

 cor-

corpus peruenit, vt et celeritatem initialem in B et finalem post descensum in eodem loco B; nec non tempus ascensus per BA *et tempus descensus per* AB.

Solutio.

Sit datum tempus $=t$, quod est summa temporum ascensus et descensus per rectam BA, et exponens resistentiae $=k$. Ponatur altitudo BA quaesita $=x$. Erit tempus ascensus par $BA = 2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)}$, (445) atque tempus descensus sequentis ex A in $B = 2\sqrt{\frac{k}{g}}\,l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, (427). Ex quibus conflatur ista aequatio $\frac{t}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = A.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)} + l(\sqrt{e^{\frac{x}{k}}}+\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)})$, ex qua inueniri potest x. Cognita autem altitudine x dabitur simul et tempus ascensus per BA et tempus descensus per AB. Porro data altitudine $BA = x$, erit altitudo generans celeritatem in B, qua ascendit $= gk(e^{\frac{x}{k}}-1)$ (420), et altitudo generans celeritatem, qua decidit in $B = gk(1-e^{\frac{-x}{k}})$ (420). Q. E. I.

Corollarium I.

451. Erit ergo celeritas ascendens in B ad celeritatem descendentem ibidem vt $e^{\frac{x}{2k}}$ ad 1. Ex quo apparet tanto magis de motu amitti quanto corpus altius ascendat.

Scho-

PUNC OTU RECTIL.
itialem in B et fi- ; nec non tempus per AB.
altitud supra in ceat; (447) $+\frac{x^2\sqrt{x}}{240k}$ data est xime.
est summa tem- ctam BA, et ex- ltitudo BA quae- r $BA = 2\sqrt{\frac{k}{g}}A.\sqrt{}$
nsus sequentis ex (427). Ex qui- $.\sqrt{(e^{\frac{x}{k}}-1)} + l$
45 porum ascensus tempus $-\frac{x^4\sqrt{x}}{46080}$ $+\frac{x^2\sqrt{x}}{240k}$ horum etc. V cundis; mantur, Ita si te pro t su
i potest x. Co- ul et tempus as- per AB. Porro lo generans cele- -1)(420), et al- a decidit in B=
I. scendens in B ad vt $e^{\frac{x}{2k}}$ ad 1. Ex tu amitti quanto Scho-
45 inuerte $-\frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15}$ $-\frac{g^3t^6}{2^{16}.15k}$

Scholion I.

452. Si fuerit k numerus valde magnus neque altitudo x admodum magna, vt loco temporum supra inuentas expressiones algebraicas adhibere liceat; erit tempus ascensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (447), atque tempus descensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{6k\sqrt{g}}{x\sqrt{x}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}}$ (432). Quorum temporum summa, quia data est, habebitur $t\sqrt{g} = 4\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2}$, quam proxime.

Scholion 2.

453. Accuratius autem definietur haec temporum summa magis continuandis seriebus tempora ascensus et descensus exprimentibus. Fit scilicet tempus ascensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} - \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} + \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} -$ etc. et tempus descensus $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x\sqrt{x}}{6k\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{240k^2\sqrt{g}} - \frac{x^3\sqrt{x}}{1344k^3\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{46080k^4\sqrt{g}} +$ etc. Quamobrem horum temporum summa $t = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{g}} + \frac{x^2\sqrt{x}}{120k^2\sqrt{g}} - \frac{x^4\sqrt{x}}{23040k^4\sqrt{g}}$ etc. Vbi notandum si tempus detur in minutis secundis, et k et x in scrupulis pedis Rhenani exprimantur, superiorem seriem per 250 esse diuidendam. Ita si tempus t sit μ minutorum secundorum debebit pro t substitui 250μ.

Corollarium 2.

454. Ex superiore aequatione poterit serie inuertenda elici x per seriem. Fiet autem $\sqrt{x} = \frac{t\sqrt{g}}{4} - \frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{15}.15.k^2} + \frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{29}.15.k^4} -$ etc. et consequenter $x = \frac{gt^2}{2^4} - \frac{g^3t^6}{2^{16}.15k^2} + \frac{g^5t^{10}}{2^{30}.225k^4} -$ etc.

Co-

Corollarium 3.

455. Differentia inter tempus descensus et tempus ascensus erit ergo $\frac{x\sqrt{x}}{2k\sqrt{g}}-\frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{g}}$ quam proxime. Inuenta ergo altitudine x simul et tempus ascensus et tempus descensus innotescunt.

Corollarium 4.

456. In serie erit etiam altitudo debita celeritati, qua corpus ascensum inchoat $=gx+\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^3}{6k^2}+\frac{gx^4}{24k^3}+$ etc. et altitudo debita celeritati, qua corpus delabitur $=gx-\frac{gx^2}{2k}+\frac{gx^3}{6k^2}-\frac{gx^4}{24k^3}+$ etc.

Exemplum.

457. Globus ferreus ex tormento bellico sursum explosus recidebat in terram post 34 minuta secunda, eratque $k=2250000$ scrupulorum pedis Rhenani, et $g=\frac{7499}{7500}$. Habebimus ergo $t=8500$, et $\frac{t\sqrt{g}}{4\sqrt{k}}=1,416572$, adeoque $\frac{g^2t^5\sqrt{g}}{2^{10}.15k^2\sqrt{k}}=0,01188$. Atque $\frac{g^4t^9\sqrt{g}}{2^{19}.15k^4\sqrt{k}}=0,0007477$. Fiet igitur $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{k}}=1,405439$, et $\sqrt{x}=2108,159$, et tota altitudo x ad quam globus in aere peruenit $=4443$ ped. Rhen. Sit nunc δ numerus minutorum secundorum, quibus descensus longius durat quam ascensus; erit $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}}=\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}}-\frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}}$. Est vero $\sqrt{\frac{x}{k}}=\frac{527}{375}$, ex quo prodit $\frac{x\sqrt{x}}{3k\sqrt{k}}=0,9913$, et $\frac{x^3\sqrt{x}}{672k^3\sqrt{k}}=0,01893$. Habebimus ergo $\frac{250\delta\sqrt{g}}{\sqrt{k}}=0,97237$, et hinc $\delta=5'',50'''$. Ex quo apparet tempus ascensus fuisse 14'', 5''',

PUNCT. OTU RECTIL.
5''', et ... do autem ... sum inch ... bita celer ... tur de hi ... pus descensus et ... quam proxime ... ul et tempus ascunt.
45 ... sum proi ... + etc.). sumtum ... proiicer ... tudo debita celechoat ... debita celeritati, ... etc.
45 ... et descen ... dio resist ... corpus e ... nento bellico suroft 34 minuta selorum pedis Rhe- ... $t=8500$, et ... $=0,01188$. Fiet igitur ... t tota altitudo x 4443 ped. Rhen. ... scundorum, qui- ... ascensus; erit ... ex quo ... $=0,01893$. ... et hinc $\delta=5''$, ensus fuisse 14'', 5''',
46 ... 340 est ... medio r ... vt hic q ... que asse ... tempore ... ne appa ... minus s ... paruum

5''', et tempus descensus $=19'', 55'''$. Altitudo autem generans celeritatem, qua corpus ascensum inchoauit reperitur 15542 ped. et altitudo debita celeritati, qua delabitur $=1969$ ped. Videatur de his Comment. Tom. II. pag. 338.

Corollarium 5.

458. Quia altitudo celeritati, qua corpus sursum proiicitur $=gk(e^{\frac{x}{k}}-1)=gx(1+\frac{x}{2k}+\frac{x^2}{6k^2}+\frac{x^3}{24k^3}+$ etc.$)$. Erit tempus ascensus et descensus simul sumtum, si corpus hac celeritate in vacuo sursum proiiceretur sola sollicitante vi grauitatis, $=4\sqrt{gx}+\frac{x\sqrt{gx}}{k}+\frac{5x^2\sqrt{gx}}{24k^2}+\frac{x^3\sqrt{gx}}{32k^3}+$ etc.

Corollarium 6.

450. Erit ergo summa temporum ascensus et descensus in vacuo ad temporum summam in medio resistente vt $g(1+\frac{x}{4k}+\frac{5x^2}{96k^2}+\frac{x^3}{124k^3}+$ etc.$)$ ad $1+\frac{x^2}{480k^2}-\frac{x^4}{92160k^4}$ etc. Si scilicet in vtroque casu corpus eadem celeritate proiiciatur.

Scholion 3.

460. In citato Tomo II. Commentar. pag. 340 est Theorema, quo haec tempora in vacuo et medio resistente in duplicata celeritatum ratione, vt hic quoque statuimus, inter se conferuntur; atque asseritur tempus in vacuo semper esse maius tempore in pleno. At vero ex nostra comparatione apparet, fieri posse, vt tempus in vacuo etiam minus sit tempore in pleno. Nam si fuerit x valde paruum k vero vehementer magnum, ea tempora in-

inter ſe erunt proxime vt g ad 1. Eſt vero g in medio reſiſtente ob vim grauitatis denſitate medii minutam ſemper minor vnitate, et hanc ob rem tempus in vacuo minus erit his caſibus tempore in pleno. Quando vero g quam minime ab vnitate differt et x non eſt admodum paruum reſpectu k, prout in eiaculatione globorum ex tormentis euenit, tempus in vacuo vtique perpetuo erit maius quam in medio reſiſtente. Deinde ſi fuerit $x > k$ facile perſpicitur, dari quoque caſus, quibus euentus illi Theorematí futurus ſit contrarius. In exemplo autem allato corpus celeritate altitudini 15542 ped. debita in vacuo surſum proiectum recidet in terram poſt 63 minuta ſecunda, cum tamen in aere non diutius quam 34″ moretur.

PROPOSITIO 58.

Problema.

Tabula IV. Fig 6.

461. *Si corpus poſt quemuis deſcenſum ex* O *reflectatur eaque celeritate, quam in deſcenſu eſt adeptum iterum recta aſcendat, atque hae reflexiones perpetuo, cum in* O *peruenerit repetantur; quaerendae ſunt altitudines* OA, OB, OC *etc. quas corpus hoc modo ſucceſſiue percurrit in medio reſiſtente uniformi iuxta quadrata celeritatum et ſollicitatum a potentia uniformi* g.

Solutio.

Poſito, vt hactenus eſt factum, exponente reſiſtentiae $= g$, altitudo prima AO$= a$, eritque celeritati, qua corpus aſcenſum inchoauit, altitudo de-

debita $= gk(e^{\frac{a}{k}} - 1)$ (439). Altitudo vero debita celeritati, qua per AO delapſum punctum O attingit eſt $= gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})$ (420). Hac celeritate iam ſecundum aſcenſum per OB incipiat, ſitque OB$= z$, erit $gk(1 - e^{\frac{-a}{k}}) = gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)$. Ex quo prodit OB $= kl(2 - e^{\frac{-a}{k}}) = z$. Altitudo vero debita celeritati, qua in hoc ſecundo deſcenſu per BO delabitur, erit $= gk(1 - e^{\frac{-z}{k}}) = \frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{2 - e^{\frac{-a}{k}}}$, hacque celeritate tertium aſcenſum per OC incipiet. Sit nunc OC$= z$, erit $\frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{2 - e^{\frac{-a}{k}}} = gk(e^{\frac{z}{k}} - 1)$, conſequenter $z =$ OC $= kl \frac{3 - 2e^{\frac{-a}{k}}}{2 - e^{\frac{-a}{k}}}$. Celeritas vero, quam in deſcenſu per CO acquirit, debita erit altitudini $gk(1 - e^{\frac{-z}{k}}) = \frac{gk(-e^{\frac{-a}{k}})}{3 - 2e^{\frac{-a}{k}}}$. Hac porrò celeritate quartum aſcenſum per OD incipit, quam altitudinem OD denuo vocemus z, erit $gk(e^{\frac{z}{k}} - 1) = \frac{gk(1 - e^{\frac{-a}{k}})}{3 - 2e^{\frac{-a}{k}}}$ et conſequenter $z =$ OD

$= kl$

$=kl\frac{4-3e^{\frac{-a}{k}}}{3-2e^{\frac{-a}{k}}}$. Simili modo prodibit altitudo quinta $OE=kl\frac{5-4e^{\frac{-a}{k}}}{4-3e^{\frac{-a}{k}}}$, et sexta $OF=kl\frac{6-5e^{\frac{-a}{k}}}{5-4e^{\frac{-a}{k}}}$. Ex quibus concluditur ea altitudo OP, cuius index est n, fore $=kl\frac{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}}{(n-1)-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}}=kl\frac{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$. Manifestum igitur est ad quantam altitudinem corpus in quaque reflexione ex puncto O perueniat. Q. E. I.

Corollarium 1.

462. Ex hac solutione simul perspicitur celeritati, qua in hoc descensu per PO delabitur, debitam altitudinem fore $=\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-(n-1)e^{\frac{-a}{k}}}=\frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{ne^{\frac{a}{k}}-n+1}$. Celeritas vero, qua ascensum per OP est adorsum, debita est altitudini $\frac{gk(1-e^{\frac{-a}{k}})}{n-1-(n-2)e^{\frac{-a}{k}}}=\frac{gk(e^{\frac{a}{k}}-1)}{(n-1)e^{\frac{a}{k}}-n+2}$.

Corollarium 2.

463. Quia $OA=a=kle^{\frac{a}{k}}$ et $OB=kl(2-e^{\frac{-a}{k}})$, erit $OA+OB=kl(2e^{\frac{a}{k}}-1)$. Eodemque modo

OA

PUNCTI L... TU RECTIL.

$OA+OB+OC=kl(3e^{\frac{a}{k}}-2)$, et $OA+OB+OC+OD=kl(4e^{\frac{a}{k}}-3)$ etc.

Corollarium 3.

464. Si k est numerus valde magnus, vt $\frac{a}{k}$ fere euanescat, erit quam proxime $OP=a-\frac{(n-1)a^2}{k}+\frac{(n-1)^2a^3}{k^2}-\frac{(n-1)^3a^4}{k^3}+$ etc. Quae series cum sit geometrica erit $OP=\frac{ak}{k+(n-1)a}$ q. p.

Corollarium 4.

465. Si altitudo prima OA fuerit infinite magna reliquae nihilo minus erunt finitae. Prodibit enim $OB=kl2$, $OC=kl\frac{3}{2}$, $OD=kl\frac{4}{3}$, etc. OP $kl\frac{n}{n-1}$.

Corollarium 5.

466. Et, si altitudo quaecunque fuerit $=klA$ erit altitudo sequens, ad quam corpus post repercussionem e prima pertingere valet $=kl\frac{2A-1}{A}$. Porro altitudo tertia erit $=kl\frac{3A-2}{2A-1}$ et similiter quarta $=kl\frac{4A-1}{3A-1}$ et ea cuius index est n erit $=kl\frac{nA-n+1}{(n-1)A-n+2}$.

Scholion I.

467. Possunt etiam loco n numeri negatiui substitui, tumque inuenientur altitudines praecedentes in quarum serie prima existit. Sic altitudo, quam sequitur prima $OA=a$, posito $n=0$, erit $=kl\frac{1}{2-e^{\frac{a}{k}}}$. Ex quo apparet, si fuerit $e^{\frac{a}{k}}=2$ seu

$a = kl2$, altitudinem praecedentem fuiffe infinitam. At fi fuerit $e^{\frac{a}{k}} > 2$, altitudo praecedens ob $\overline{\text{loga-}}$rithmum quantitatis negatiuae erit imaginaria, id quod indicat, fieri non poffe, vt altitudo tanta poffit affignari, cuius fequens fit haec affumta a.

Scholion 2.

468. Quod poft altitudinem infinitam fequi poffit altitudo finita admirabile quidem videtur; fed confideranti, quod corpus in medio refiftente ex infinita altitudine delapfum finitam acquirat tantum celeritatem, (420) ratio huius phaenomeni facile patebit. Hac enim finita celeritate ad finitam tantum altitudinem reascendere poterit. Maxima autem celeritas, quam corpus in descenfu poteft adipisci, eft $\sqrt{gk}$. Quare fi corpus initio furfum proiiciatur celeritate maiore quam $\sqrt{gk}$ haec celeritas ex nullo quamuis magno descenfu antecedente generari potuit; quemadmodum etiam hoc cafu calculus altitudinem praecedentem exhibet imaginariae quantitatis.

PROPOSITIO 59.

Problema.

Tabula IV. Fig. 3. et 4. 469. *Refiftente medio uniformi in celeritatum ratione fimplici, et follicitante potentia abfoluta uniformi deorfum tendente, determinare corporis recta vel ascendentis vel descendentis celeritatem in quouis puncto.*

So-

Solutio.

Descendat primo corpus in recta AP, fitque celeritas eius initialis in A debita altitudini c. Ponatur potentia abfoluta $= g$, exponens refiftentiae $= k$; atque $AP = x$, et altitudo debita celeritati in $P = v$. His pofitis erit $dv = gdx - \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$, eft enim vis refiftentiae $= \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Hinc fit $dx = \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. Fiat $\sqrt{v} = u$, erit $dv = 2udu$, atque $dx = \frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - u} = -2du\sqrt{k} + \frac{2gkdu}{g\sqrt{k} - u}$. Integrata hac aequatione prodit $x = C - 2u\sqrt{k} - 2gkl(g\sqrt{k} - u) = C - 2\sqrt{kv} - 2gkl(g\sqrt{k} - \sqrt{v})$. Pofito vero $x = 0$ fieri debet $v = c$, ex quo fit $C = 2\sqrt{kc} + 2gkl(g\sqrt{k} - \sqrt{c})$. Habebimus itaque $x = 2\sqrt{kc} - 2\sqrt{kv} + 2gkl\frac{g\sqrt{k} - \sqrt{c}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$, ex qua v ope logarithmicae poteft deduci Q. E. Alterum.

Fig. 4. Iam pro ascenfu fit celeritas initialis in B altitudini c debita, et $BP = x$, et altitudo celeritati in P debita $= v$. Quia in ascenfu tam potentia abfoluta, quam refiftentiae vis retardant, erit $dv = -gdx - \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quae aequatio directe ex priore $dv = gdx - \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ deducitur ponendo $-g$ loco g. Quamobrem etiam hoc modo requifitam aequationem integralem ex illa deriuare licet. Fit igitur facto g negatiuo $x = 2\sqrt{kc} - 2\sqrt{kv} - 2gkl\frac{g\sqrt{k} + \sqrt{c}}{g\sqrt{k} + \sqrt{v}}$. Q. E. Alterum.

Corollarium I.

Fig. 3. 470. Si celeritas initialis in descenfu fuerit $= 0$, erit $x = -2\sqrt{kv} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k} - \sqrt{v}}$. Ex qua aequatio-

tione determinatur celeritas corporis ex quacunque altitudine delapsi.

Corollarium 2.

471. Quia vero est $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = -l(1-\frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}})$; habebitur in serie $l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{\sqrt{v}}{g\sqrt{k}} + \frac{v}{2g^2k} + \frac{v\sqrt{v}}{3g^3k\sqrt{k}} + \frac{v^2}{4g^4k^2}$ + etc. Qua substituta prodibit $x = \frac{v}{g} + \frac{2v\sqrt{v}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{v^2}{2g^3k} + \frac{2v^2\sqrt{v}}{5g^4k\sqrt{k}}$ + etc. Si nunc fuerit k numerus valde magnus erit $v = gx - \frac{2x\sqrt{gx}}{3\sqrt{k}}$ q. p.

Corollarium 3.

Tabula IV. Fig. 4. 472. Si fit $v = g^2k$, prodit $x = \infty$. Ex quo apparet, corpus ex infinita altitudine delapsum maiorem acquirere non posse celeritatem quam $g\sqrt{k}$. Et si fuerit semel $v = g^2k$, corpus motu aequabili esse progressurum; tum vero motum eius retardari, si sit $v > g^2k$.

Corollarium 4.

473. Si corpus ex B sursum proiiciatur celeritate $\sqrt{c}$, altitudo BA reperietur facto $v = 0$. Prodibit autem $BA = 2\sqrt{kc} - 2gkl(1 + \frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} - \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k}$. Altitudo vero ex qua corpus descendendo hanc celeritatem acquirere potest erit $= -2\sqrt{kc}$ $2gkl(1 - \frac{\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}) = \frac{c}{g} + \frac{2c\sqrt{c}}{3g^2\sqrt{k}} + \frac{c^2}{2g^3k}$ + etc.

Corollarium 5.

474. Si corpus sursum proiiciatur celeritate $g\sqrt{k}$, maxima scilicet, quam descensu acquirere potest, erit altitudo ad quam pertingit $= 2gk(2 - l2)$.

PRO-

PUNCTI ...TU RECTIL.
...is ex quacunque
475. ... plici celer. ... mi; deter ... descendens ... numerus valde
Posi... in A=√c ... x=∞. Ex quo ... udine delapsum ... atem quam g√k. ... motu aequabili ... n eius retardari,
Qui... tiali √c p... proiiciatur cele- ... census p... Problema ... cto v=o. Pro- ... to x. Q ... percurrit ... ous descendendo ... erit =−2√kc
476 ... cendit fu... um AP= ... ciatur celeritate ... censu acquirere ... tione x: ... git =2gk(2−l2).
PRO-

PROPOSITIO 60.

Problema.

475. *Resistente medio uniformi in ratione simplici celeritatum et sollicitante potentia absoluta uniformi; determinare tempus, quo corpus vel ascendens vel descendens spatium quoduis percurrit.*

Solutio.

Positis vt ante pro descensu per AP celeritate in $A = \sqrt{c}$, et ea in $P = \sqrt{v}$; exponente resistentiae $= k$ et potentia absoluta $= g$, spatioque $AP = x$, erit $dx = \frac{dv\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}} = \frac{2udu\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$ posito u^2 loco v. Iam dicto tempore per $AP = t$ erit $dt = \frac{dx}{u} = \frac{2du\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-u}$. Ex qua prodit $t = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}-\sqrt{c}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Tabula IV. Fig. 3.

Quia ascensus per $BP = x$, cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ prodit ponendo $-g$ loco g, erit tempus ascensus per $BP = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}+\sqrt{v}}$. Q. E. Alterum. Problemate vero praecedente definitur v ex dato x. Quare et hic tempus, quo spatium quoduis percurritur poterit cognosci. Q. E. I. Fig. 4.

Corollarium 1.

476. Si celeritas initialis, qua corpus descendit fuerit nulla, erit tempus descensus per spatium $AP = 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. At v definitur ex hac aequatione $x = -2\sqrt{kv} + 2gkl\frac{g\sqrt{k}}{g\sqrt{k}-\sqrt{v}}$. Fig. 3.

Co-

Corollarium 2.

477. Tota altitudo BA, ad quam corpus ex B ascendens peruenire potest, absoluetur tempore $= 2\sqrt{k}\, l\frac{g\sqrt{k}+\sqrt{c}}{g\sqrt{k}}$.

Corollarium 3.

478. Si ergo celeritas initialis $\sqrt{c}$ fuerit infinita, erit etiam tempus, quo tota altitudo BA percurritur, infinitum, nempe $= 2\sqrt{k}\, l\infty$.

Scholion 1.

479. Hoc igitur vehementer differt haec resistentiae hypothesis a priore, quae quadratis celeritatum posita erat proportionalis. Nam illo casu corpus infinita celeritate sursum proiectum ad summum punctum pertingit tempore finito (444). Hoc vero notandum est tempus $2\sqrt{k}\, l\infty$ esse numerum infinitum infimi ordinis: Ex quo concludi posse videtur; si resistentia fuerit in maiore quam simplici ratione celeritatum, tempus ascendens totius semper esse finitum. Sin autem resistentia sit in simplici vel minore celeritatum ratione, tempus ascensus totius esse infinitum, si quidem celeritas initialis est infinite magna.

Scholion 2.

490. Has duas resistentiae hypotheses ideo fusius pertractandas esse censui, quod eae a *Neutono*, aliisque, qui eum secuti sunt, praecipue sint consideratae. Haec quidem posterior hypothesis, qua resistentiam celeritatibus proportionalem posuimus, mere mathematica est, neque vllum in physicis habere potest vsum. Sed quia initio putarunt, resistentiam fluidorum a tenacitate oriundam celeritatibus esse proportionalem, diligentius in huiusmodi motus inquirendum esse existimauerunt. Postmodum tamen, cum resistentiam tenacitatis longe aliter se habere intellexissent, hanc tractationem nihilo minus retinuerunt. Prior vero, qua resistentia quadratis celeritatum proportionalis est, maxime explorari meretur: certum enim est praecipuam fluidorum resistentiam hanc tenere rationem. Praeterea etiam haec hypothesis in calculo prae reliquis tantam habet praerogatiuam, vt, quod in aliis hypothesibus minime potest praestari, in hac tamen sola calculus non refragetur. Omnia enim fere problemata, quae in vacuo solutionem non respuunt, in hac resistentiae hypothesi resolui possunt. Hanc ob rem in sequentibus istam resistentiam potissimum examinabimus, reliquas autem, nisi concinno computo quaesitum inueniri potest, plerumque negligemus.

PROPOSITIO 61.
Problema.

481. *Resistat medium vniforme in ratione quacunque multiplicata celeritatum, sitque potentia sollicitans vniformis; determinari oportet motum corporis recta vel ascendentis vel descendentis.*

Solutio.

Tabula IV. Fig. 3. Consideremus primo descensum, et ponamus celeritatem in A $= \sqrt{c}$, spatium iam percursum AP $= x$ et celeritatem in P $= \sqrt{v}$. Sit resistentiae exponens $= k$ et lex resistentiae $= v^m$, atque potentia absoluta $= g$. His igitur positis erit $dv = g\,dx - \frac{v^m dx}{k^m}$, et $dx = \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$. Habemus ergo $x = \int \frac{k^m dv}{gk^m - v^m}$ ex qua ope quadraturarum v in x determinari poterit. Ponatur tempus, quo spatium AP percurritur $= t$, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{k^m dv}{gk^m \sqrt{v} - v^m \sqrt{v}}$. Atque $t = \int \frac{k^m dv}{gk^m \sqrt{v} - v^m \sqrt{v}}$ Q. E. Alterum.

Iam pro ascensu maneat $\sqrt{c}$ celeritas initialis in B, sitque BP $= x$, et celeritas in P $= \sqrt{v}$, atque tempus, quo spatium BP percurritur $= t$. His positis erit $dv = -g\,dx - \frac{v^m dx}{k^m}$ quae aequatio ex illa elicitur ponendo $-g$ loco g. Quo facto erit pro ascensu $x = -\int \frac{k^m dv}{gk^m + v^m}$ et $t = -\int \frac{k^m dx}{gk^m \sqrt{v} + v^m \sqrt{v}}$. Q. E. Alterum inueniendorum.

Corollarium 1.

482. Si fuerit $v^m = gk^m$, corpus hac celeritate descendens motu aequabili feretur. Nam perpetuo potentiae absolutae, qua corpus acceleratur, aequalis erit vis resistentiae, qua retardatur.

Co-

Corollarium 2.

483. Corpus vero ex quiete delapsum perpetuo accelerabitur, neque tamen vnquam celeritatem acquiret altitudini $g^{\frac{1}{m}}k$ debitam. Sed haec celeritas est quasi assymtotos, quam siue celerius siue tardius corpus moueatur, affectat.

Scholion.

484. Quia hae inuentae aequationes neque integrari possunt, neque v vel t in x definiri, diutius iis immorari non expedit. Ad alia igitur progredior, atque medium resistens variabile contemplabor manente potentia absoluta vniformi. Huiusmodi tamen accipiam hypothesin, qua aequatio dv determinans fiat homogenea, ideoque his difficultatibus non sit obnoxia. Deinde potentiam absolutam non amplius vniformem sed variabilem pono, seu eius loco vim centripetam considero, qua corpus perpetuo ad certum aliquod punctum fixum attrahitur. Cum hac quidem primum aliam resistentiam non coniungam, nisi quae quadratis celeritatum est proportionalis. Deinde vero cum aliis resistentiae hypothesibus eas tantum vires centripetas coniungi conuenit, quae integrationem aequationis differentialis admittunt.

PROPOSITIO 62.

Problema.

485. *Potentia absoluta existente vniformi, et exponente resistentiae distantiis a puncto* C *proportionali,* al- Tabula IV. Fig. 7.

atque lege resistentiae celeritatum ratione quacunque multiplicata, requiritur corporis in recta AC *ad* C *vel accedentis vel ab eo recedentis celeritas in quouis loco.*

Solutio.

Potentia vniformis ad C vrgens sit $=g$ altitudo debita celeritati in loco quocunque $P=v$. Ponatur AC quae est maxima altitudo ad quam corpus pertingit $=a$ et $CP=x$, erit exponens resistentiae vt x, sit is $\lambda^{\frac{1}{m}}x$ et lex resistentiae sit v^m. His positis erit vis resistentiae $=\frac{v^m}{\lambda x^m}$, et pro ascensu per CA, quo et potentia absoluta et vis resistentiae retardant, habebitur ista aequatio $dv=-g\,dx-\frac{v^m\,dx}{\lambda x^m}$. Descensum hic quoque tanquam ascensum consideremus, et quia in descensu vero potentia accelerans, resistentia vero retardans est, in hoc ascensu substituto contrario modo potentia retardans et resistentia accelerans poni debet (411), ex quo oritur pro descensu haec aequatio $dv=-g\,dx+\frac{v^m\,dx}{\lambda x^m}$. Quae aequatio ex illa deriuatur faciendo λ negatiuum, et hanc ob rem alteram tantum aequationem integrari opus est. Sumamus aequationem pro descensu, quae erit huiusmodi $\lambda x^m dv+\lambda g x^m dx=v^m dx$, et ponamus $v=xz$. Erit ergo $dv=x\,dz+z\,dv$, ex quo prodibit ista aequatio, $\lambda x^{m+1}dz$ $+\lambda x$

$+\lambda x^m z\,dx+\lambda g\,x^m dx=x^m z^m dx$. Quae diuisa per $x^{m+1}(z^m-\lambda z-\lambda g)$ abit in hanc $\frac{\lambda dz}{z^m-\lambda z-\lambda g}=\frac{dx}{x}$ in qua indeterminatae iam sunt separatae. Haec igitur aequatio ita integretur, vt facto $x=a$, celeritas euanescat; quo facto ex aequatione integrali celeritas corporis descendentis in quouis loco innotescet. Eadem vero ipsa aequatio facto λ negatiuo inseruiet ad celeritates in ascensu per CA definiendas. Q. E. I.

Corollarium 1.

486. Si fuerit $m=1$ seu resistentia quadratis celeritatum proportionalis, erit $\frac{\lambda dz}{(1-\lambda)z-\lambda g}=\frac{dx}{x}$, adeoque $\frac{\lambda}{1-\lambda}l((1-\lambda)z-\lambda g)=lx+C=\frac{\lambda}{1-\lambda}l\frac{(1-\lambda)v-\lambda gx}{x}$ substituo $\frac{v}{x}$ loco z. Quia autem si $x=a$ debet esse $v=o$, erit $C=\frac{\lambda}{1-\lambda}l-\lambda g-la$, ideoque $lx=la+\frac{\lambda}{1-\lambda}l\frac{\lambda gx-(1-\lambda)v}{\lambda gx}$. Ex qua prodit $v=\frac{\lambda gx}{\lambda-1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}-x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}\right)$ $=\frac{\lambda g}{\lambda-1}(a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}x^{\frac{1}{\lambda}}-x)$.

Corollarium 2.

487. Si fuerit λ vnitate minor, haec aequatio ad aliam formam redigi debet; Prodibit autem $v=\frac{\lambda g}{1-\lambda}\left(\frac{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}x-x^{\frac{1}{\lambda}})}{a^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}}\right)$.

Corollarium 3.

488. Casus, quo $\lambda=1$, seu exponens resistentiae ipsi distantiae a puncto C est aequalis, in his formulis non continetur, sed ex differentiali $\frac{-dz}{z}=\frac{dx}{x}$ est deducendus. Prodibit autem $C-\frac{a}{z}=lx$ hincque $v=gx(la-lx)$.

Corollarium 4.

489. Ex his intelligitur casu $m=1$ corporis descendentis celeritatem tam in A quam in C fore $=o$. Fit enim $v=o$ in tribus hisce aequationibus, tam posito $x=o$ quam $x=a$. Corpus igitur ex A in C delapsum omnem motum amittet atque in C perpetuo quiescet, ob resistentiam in eo loco infinite magnam.

Corollarium 5.

490. Dum igitur corpus rectam AC percurrit, alicubi inter A et C habebit celeritatem maximam, quae inuenitur ex aequatione differentiali faciendo $dv=o$. Fiet autem tum $v=\lambda gx$, quo valore loco v in integratis aequationibus substituto prodibit $\lambda x^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}=a^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}$, atque $x=\frac{a}{\lambda^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}}$, si $\lambda>1$. Sin autem $\lambda<1$ erit $x=\lambda^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}a$. At si $\lambda=1$; erit $1=la-lx$ ideoque $x=\frac{a}{e}$, denotante e numerum, cuius logarithmus est vnitas.

Scho-

PUNCTI TU RECTIL.
491. exponens resi- resistentiae : aequalis, in ad C perue- ex differentiali stentiae est item $C-\frac{a}{z}=lx$
Quare si c ea a vi re deberet. $m=1$ corporis habebit q iam in C fore maximam aequationibus, Sed quia is igitur ex A me desce- ret atque in C terminari 1 eo loco infi- ope aequa
492 n AC percur- tes corpo- itatem maxi- e differentiali hac aequa- λgx, quo va- bus substituto pro desc- si $\lambda>1$. oportet.
$\lambda=1$; erit 49 semper uinerum, cu- vnitate
Scho-

Scholion 1.

491. Ex his colligere licet etiam in reliquis resistentiae hypothesibus celeritatem corporis, cum ad C peruenerit, esse euanituram. Vis enim resistentiae est $\frac{v^m}{\lambda x^m}$, quae ergo fit infinita si $x=o$. Quare si corpus in C quandam haberet velocitatem, ea a vi resistentiae infinita statim in nihilum redigi deberet. Maximam vero in descensu celeritatem habebit quando est $v^m=\lambda gx^m$. Ex quo apparet maximam celeritatem esse debitam altitudini $x\sqrt[m]{\lambda g}$. Sed quia x ignoratur seu locus, quo corpus celerrime descendit, etiam ipsa celeritas non potest determinari, nisi per quadraturas curuarum, quarum ope aequatio differentialis construitur.

Corollarium 6.

492. Pro ascensu ex C in A si $m=1$ celeritates corporis in singulis locis P determinabuntur ex hac aequatione $v=\frac{\lambda gx}{\lambda+1}\left(\frac{a^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}-x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\right)$, quae ex illis pro descensu formatur, facto λ negatiuo, vti oportet.

Corollarium 7.

493. In ascensu ergo corporis celeritas in C semper est infinita. Facto enim $x=o$, quia $\frac{\lambda+1}{\lambda}$ est vnitate maius, denominator euanescit.

Scho-

Scholion 2.

494. Perſpicuum etiam eſt ex ſola contemplatione, celeritatem in C eſſe debere infinitam. Nam niſi tanta eſſet, corpus vim reſiſtentiae in C infinitam ſuperare non poſſet, ſed perpetuo in C haerere deberet.

PROPOSITIO 63.

Theorema.

495. *Iisdem poſitis, quae in praecedente propoſitione, ſi plura corpora ex diuerſis diſtantiis ad punctum C accedant, erunt tempora, quibus eo perueniunt in ſubduplicata ratione diſtantiarum.*

Demonſtratio.

In ſolutione praecedentis problematis ad celeritatem in P determinandam obtinuimus hanc aequationem, $\lambda x^m dv + \lambda g x^m dx = v^m dx$, (485). In qua aequatione x et v vbique eundem dimenſionum numerum conſtituunt. Eius igitur integralis ita accepta, vt poſito $x = a$ fiat $v = o$, habebit hanc proprietatem, vt x, v et a vbique eundem dimenſionum numerum conſtituant. Ex ea ergo prodibit v aequalis functioni cuidam ipſarum a et x, in qua a et x vnicam vbique dimenſionem conſtituunt; ſeu v erit functio ex a ex x conſtans vnius dimenſionis. Quare in elemento temporis per CP quod eſt $\frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit ipſarum x, dx, et a dimidia dimenſio, et hanc ob rem tempus per CP aequabitur functioni ex a et x conſtanti dimidiae dimenſionis. Poſito ergo $x = a$, quo

quo caſu totum tempus deſcenſus per AC inuenitur, habebitur functio ipſius ſolius a dimidiae dimenſionis. Quamobrem tempus per AC exprimetur huiusmodi expreſſione $C\sqrt{a}$ in qua C ex quantitatibus λ, m et g conſtat, non vero pendet ab a. Quia iam a denotat altitudinem AC, perſpicuum eſt plurium deſcenſuum tempora eſſe inter ſe in ſubduplicata ratione altitudinum percurſarum. Q. E. D.

Corollarium 1.

496. Simili modo intelligitur plurium aſcenſuum ex C tempora tenere etiam rationem altitudinum, ad quas peruenitur, ſubduplicatam.

Corollarium 2.

497. In quacunque igitur multiplicata celeritatum ratione medium reſiſtat, dummodo potentia abſoluta eſt conſtans et reſiſtentiae exponens diſtantiis a C proportionalis, tempora vel aſcenſuum vel deſcenſuum rationem tenent ſubduplicatam altitudinum.

Scholion 1.

498. Neque vero aſcenſus cum deſcenſibus comparare licet, neque plures aſcenſus vel deſcenſus inter ſe, in quibus litterae λ, m et g non eosdem tenent valores. Nam in expreſſione $C\sqrt{a}$, quantitas C in omnibus caſibus, qui inter ſe comparantur, eadem eſſe debet.

Scholion 2.

499. In hac propositione eadem vsi sumus methodo varia descensuum ad punctum fixum tempora comparandi, quam supra in propositionibus 39 et 46. Hoc autem casu eo magis huius methodi praestantia cernitur, quia nequidem celeritatem in x determinare licebat. Hoc enim solum nobis perspicere sufficiebat, cuiusmodi functio ipsarum a et x futura sit ea expressio, cui v esset aequalis. In sequentibus autem plura specimina egregia huius methodi occurrent.

PROPOSITIO 64.
Problema.

Tabula IV. Fig. 7. 500. *Existente vi centripeta cuicunque potestati distantiarum a centro C proportionali, medioque uniformi resistente in duplicata celeritatum ratione; determinare corporis in recta AC moti siue sursum siue deorsum in singulis locis P celeritatem.*

Solutio.

Sit corpus in P, habeatque celeritatem altitudini v debitam. Vocetur AP, x, et sit vis centripeta vt x^n, atque ea distantia, in qua vis centripeta aequalis est grauitati $=f$. Deinde ponatur exponens resistentiae k. His praemissis erit vis absoluta, qua corpus in P sollicitatur $=\frac{x^n}{f^n}$, et vis resistentiae in hoc loco $\frac{v}{k}$, existente vi grauitatis $=1$. Des-

Descendat iam corpus ad C et habebit, dum per elementum pP mouetur, vim centripetam accelerantem, atque vim resistentiae retardantem. Quia hic autem corpus inuerse ex P in p peruenire ponimus crescente x, contrarias harum virium actiones statui oportet, seu quod eodem redit dx negatiuum est ponendum, quia descensu distantia PC $=x$ minuitur. Prodibit ergo $dv=-\frac{x^n}{f^n}dx+\frac{vdx}{k}$. In vero autem corporis ascensu per Pp, vtraque vis erit retardans, ideoque habebitur $dv=-\frac{x^n}{f^n}dx-\frac{vdx}{k}$. Ex quo perspicitur alteram aequationem ex altera oriri faciendo k negatiuum. Hanc ob rem alterutram tantum aequationem integrari opus est. Sumamus eam pro ascensu $dv=-\frac{x^n dx}{f^n}-\frac{vdx}{k}$, seu $dv+\frac{vdx}{k}=\frac{-x^n dx}{f^n}$ haecque multiplicetur per $e^{\frac{x}{k}}$ vt prodeat $e^{\frac{x}{k}}(dv+\frac{vdx}{k})=-\frac{e^{\frac{x}{k}}x^n dx}{f^n}$, cuius integralis est $e^{\frac{x}{k}}v=-\int\frac{e^{\frac{x}{k}}x^n dx}{f^n}$. Erit ergo $v=-e^{\frac{-x}{k}}\int\frac{e^{\frac{x}{k}}x^n dx}{f^n}$. Pro descensu igitur erit $v=-e^{\frac{x}{k}}\int\frac{e^{\frac{-x}{k}}x^n dx}{f^n}$. In vtraque vero integratione quantitas constans adiicienda ex eo de-

 ter-

terminari debet, quod corporis moti alicubi celeritas sit data: alioquin enim motus non esset determinatus. Q. E. I.

Corollarium 1.

501. Perspicitur igitur si n fuerit numerus integer affirmatiuus, has formulas fore integrabiles. Est enim $\int e^{\frac{x}{k}} x^n dx = k e^{\frac{x}{k}} x^n - nk^2 e^{\frac{x}{k}} x^{n-1} + n(n-1)k^3 e^{\frac{x}{k}} x^{n-2} - n(n-1)(n-2)k^4 e^{\frac{x}{k}} x^{n-3} + \text{etc.} + C.$ Quae series non sit infinita, quoties n est numerus integer affirmatiuus.

Corollarium 2.

502. Sit celeritas in C data et debita altitudini c, erit pro ascensu $v = e^{\frac{-x}{k}} c - \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2 x^{n-1}}{f^n} - \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} + \text{etc.} \pm n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1. \frac{k^{n+1} e^{\frac{-x}{k}}}{f^n}$; quorum signorum ambiguorum superius valet si $n+1$ fuerit numerus impar, inferius vero si $n+1$ fuerit numerus par. Pro descensu autem erit $v = e^{\frac{x}{k}} c + \frac{kx^n}{f^n} + \frac{nk^2 x^{n-1}}{f^n} + \frac{n(n-1)k^3 x^{n-2}}{f^n} + \text{etc.} - n(n-1)\ldots\ldots\ldots 2.1. \frac{k^{n+1} e^{\frac{x}{k}}}{f^n}$. Loco C debita substituta constante.

Co-

Corollarium 3.

503. Integrale ipsius $\frac{e^{\frac{x}{k}} x^n dx}{f^n}$ ita acceptum vt fiat $=0$, facto $x=0$, ponatur $=X$. Eritque $v = e^{\frac{-x}{k}}(c-X)$, quia facto $x=0$, fieri debet $v=c$. Inseruit quidem haec aequatio ascensui, sed facto k negatiuo ad descensum accommodatur.

Corollarium 4.

504. Cognito X apparebit altitudo CA ad quam corpus vel ascendere potest, vel ex ea delapsum celeritatem acquirit $=\sqrt{c}$. Ex hac enim aequatione $X=c$ radix x dabit altitudinem CA.

Corollarium 5.

505. Ex differentiali aequatione pro descensu $dv = -\frac{x^n dx}{f^n} + \frac{v dx}{k}$, apparet alicubi corpus habiturum esse celeritatem maximam antequam ad C pertingit, quae ibi erit, vbi est $v = \frac{kx^n}{f^n}$, si quidem n non est numerus negatiuus.

Corollarium 6.

506. Detur altitudo $CA=a$, ex hacque si quaeratur c, oportet eam habere quantitatem, quae resultat in X posito a loco x. Sit $ta=A$ erit pro ascensu $v = e^{\frac{-x}{k}}(A-X)$, et pro descen-

censu $v = e^{\frac{x}{k}}(A-X)$. Facto enim $x=a$ debet euanescere v. Iam facto $x=o$, quo casu etiam fit $X=o$ (503), erit $v=c=A$.

Corollarium 7.

507. Manifestum est ex hisce, quomodo tempus quo spatium CP percurritur, inueniendum sit. Scilicet pro ascensu erit tempus per CP $= \int \frac{e^{\frac{x}{2k}}dx}{\sqrt{(A-X)}}$ atque pro descensu tempus per CP erit $= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2k}}\sqrt{(A-X)}}$

Exemplum.

508. Sit vis centripeta vt distantia a centro C, quo casu fit $n=1$; Erit ergo pro ascensu $v = e^{\frac{-x}{k}}c - \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{-x}{k}}}{f}$. Pro descensu vero $v = e^{\frac{x}{k}}c + \frac{kx}{f} + \frac{k^2}{f} - \frac{k^2 e^{\frac{x}{k}}}{f}$ (502). In descensu maxima celeritas erit, vbi est $v = \frac{kx}{f}$ (505), qua aequatione cum illa coniuncta habebitur $fe^{\frac{x}{k}}c + k^2 = k^2 e^{\frac{x}{k}}$. Erit ergo $e^{\frac{x}{k}} = \frac{k^2}{k^2-cf}$ et $x = kl\frac{k^2}{k^2-cf}$. Haec igitur distantia fit infinita si $cf=k^2$, omnino vero imaginaria si $cf>k^2$. Sit porro in A corporis celeritas $=o$, positaque $AC=a$, erit pro ascensu celeritatis initialis in C altitudo debita $= \frac{c^{\frac{a}{k}}ka - c^{\frac{a}{k}}k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$.

In

In descensu vero erit celeritatis finalis in C altitudo debita $= -\frac{c^{\frac{-a}{k}}ka}{f} - \frac{c^{\frac{-a}{k}}k^2}{f} + \frac{k^2}{f}$. Ex qua apparet si fuerit a infinitum fore celeritatis vltimae in C altitudinem debitam $= \frac{k^2}{f}$.

PROPOSITIO 65.

Problema.

509. *Existente vi centripeta ad* C *quacunque et medio resistente secundum quadrata celeritatum vtcunque difformi: determinare motum corporis recta vel accedentis vel recedentis a* C.

Solutio.

Sit corpus in P, et ponatur $CP=x$, et celeritas in $P=\sqrt{v}$. Deinde sit vis centripeta in $P=p$, posita vi grauitatis $=1$, et exponens resistentiae $=q$, quae litterae p et q denotant functiones quascunque ipsius x. Erit ergo vis resistentiae $= \frac{v}{q}$. Hanc ob rem habebitur pro ascensu $dv = -pdx - \frac{vdx}{q}$. Pro descensu vero haec $dv = -pdx + \frac{vdx}{q}$. Quarum altera in alteram transmutatur facto q negatiuo. Consideremus igitur alterutram tantum ascensui accommodatam, quae induit hanc formam $dv + \frac{vdx}{q} = -pdx$. Multiplicetur haec per $e^{\int\frac{dx}{q}}$ vt fiat integralis. Erit autem aequatio integralis $e^{\int\frac{dx}{q}}v = -\int e^{\int\frac{dx}{q}}pdx$; ergo $v = -e^{-\int\frac{dx}{q}}\int e^{\int\frac{dx}{q}}pdx$. Sit corpoporis in A, posita AC$=a$, celeritas nulla, et scribatur X loco integralis ipsius $e^{\int\frac{dx}{q}}pdx$ ita accepti vt euanescat facto $x=o$. Deinde loco x posito a abeat X in A erit $-\int e^{\int\frac{dx}{q}}pdx=A-X$, atque $v=e^{-\int\frac{dx}{q}}(A-X)$. Tempus igitur quo spatium PC absoluitur est $=\int\frac{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}dx}{\surd(A-X)}$. Pro descensu erit autem scripto A–X simili modo loco $-\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$, altitudo celeritati in P debita $v=e^{\int\frac{dx}{q}}(A-X)$ et tempus quo spatium PC absoluitur erit $=\int\frac{dx}{e^{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{q}}\surd(A-X)}$

Q. E. I.

Corollarium I.

510. Celeritas in puncto infimo C reperietur facto $x=o$, quo casu et X euanescit, et $\int\frac{dx}{q}$ euanescere ponamus. Prodibit igitur tam pro ascensu quam pro descensu $v=A$. Notandum autem est A in vtroque casu non eundem habere valorem, sed diuersum. Formatur enim ex X, quod pro ascensu est $=\int e^{\int\frac{dx}{q}}pdx$, pro descensu vero $=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}pdx$.

Corollarium 2.

511. In descensu maximam habebit corpus celeritatem quando est $v=pq$, tum enim fit $dv=o$.

Lo-

PUNCTI TU RECTIL.
Locus erg itas nulla, et minabitur pdx ita accepti oco x posito a
512. dii vnifor nito perc tem, et perpetuo titates va tempore neque si e pq perpetu vi centrip X, atque v= spatium PC ab- nsu erit autem pdx, alti- –X) et tem- (A–X)
513. trabentis, ratione; si cunque alt minare de lis locis. no C reperie- nescit, et ir tam pro as- Notandum au- lem habere va- m ex X, quod descensu vero
Posit peta in P applicata celeritati rit, quae resistentia habebit corpus nim fit dv=o. Lo-

Locus ergo, in quo celeritas est maxima, determinabitur ex ista aequatione $pq=e^{\int\frac{dx}{q}}(A-X)$.

Scholion.

512. In hypothesi tam potentiae quam medii vniformis, corpus delapsum spatio demum infinito percurso acquirebat maximam suam celeritatem, et si principio ea statim promoueatur, eam perpetuo retinebat. Hic vero vbi p et q sunt quantitates variabiles corpus ex quiete delapsum finito tempore maximam celeritatem acquirere potest, neque si eam semel habuit retinere debet; nisi sit pq perpetuo quantitas constans, seu medii densitas vi centripetae proportionalis (385).

PROPOSITIO 66.

Problema.

513. *Data lege vis centripetae ad centrum C trahentis, et medio resistente in duplicata celeritatum ratione; si dentur celeritates corporis, quas ex quibuscunque altitudinibus delapsum in C acquirit, determinare densitatem seu resistentiae exponentem in singulis locis.* Tabula IV. Fig. 8.

Solutio.

Posita quacunque distantia CP$=x$ et vi centripeta in P$=p$; sit curua CMB huius indolis vt eius applicata quaeuis AB sit aequalis altitudini debitae celeritati, quam corpus ex A delapsum in C acquirit, quae curua igitur data erit. Exponens vero resistentiae, qui quaeritur, sit in P$=q$. Sit porro

distan-

diſtantia AC ex qua corpus delabitur $=a$, erit AB certa quaedam functio ipſius a, quam ponamus L. Eiusdem vero curuae applicata PN ſit R, eritque R talis functio ipſius x qualis L eſt ipſius a. Ex praecedente autem propoſitione apparet, corporis ex diſtantia $AC=a$ delapſi altitudinem celeritati in C acquiſitae debitam fore $=A$ (510). Quamobrem erit $L=A$, atque etiam $R=X$, eſt enim quoque X talis functio ipſius x, qualis A eſt ipſius a, R igitur talis eſſe debet functio ipſius x, vt euaneſcat facto $x=0$. Quoniam vero eſt $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$ erit $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$, et $l\frac{pdx}{dR}=\int\frac{dx}{q}$. Ex qua poſito dx conſtante, elicitur $q=\frac{pdxdR}{dpdR-pddR}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

514. Si fuerit CMB linea recta, adeoque $R=ax$, erit $ddR=0$ et $q=\frac{pdx}{dp}$. Si ſit praeterea $p=\mathfrak{b}x^n$ erit $q=\frac{x}{n}$, ſeu medii denſitas erit diſtantiis a centro reciproce proportionalis.

Corollarium 2.

515. Si fuerit $n=0$ ſeu vis centripeta vbique eadem erit $q=\infty$, ideoque medii denſitas nulla, et ipſa reſiſtentia euaneſcens. Hicque eſt caſus corporis in vacuo deſcendentis a potentia abſoluta vniformi ſollicitati.

Corollarium 3.

516. Si fuerit n numerus negatiuus, habebit q quoque valorem negatiuum. Ex quo cognoſcitur

PUNCTI
tur reſiſten
pellentem.
517.
quaeſtio ad
tur altitudo
ritate proie
$=\sqrt{R}$, qua ſ
negatiuum
tur $q=\frac{pd}{pddR}$
518.
aſcenſu qua
idem valor
pla loco p
concludere
gum quends
debebit eſſe
ipſius R, q
quoddam m
remittenda
tripetae in ſ
ma erit plus
tates quibu
duntaxat ea
vero difficul
ex aequatio

IOTU RECTIL.
tur $=a$, erit AB
quam ponamus L.
ſit R, eritque R
ſius a. Ex prae-
ret, corporis ex
m celeritati in C
). Quamobrem
ſt enim quoque X
ipſius a, R igitur
vt euaneſcat facto
$=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$ erit
Ex qua poſito dx
Q. E. I.
1.
a recta, adeoque
Si ſit praeterea
tas erit diſtantiis a
2.
centripeta vbique
denſitas nulla, et
ue eſt caſus corpo-
tia abſoluta vni-
3.
negatiuus, habebit
Ex quo cognoſci-
tur

tur reſiſtentiam transmutandam eſſe in vim propellentem.

Scholion 1.

517. Ex hisce facile quoque reſoluitur eadem quaeſtio ad aſcenſum accommodata, ſi nimirum detur altitudo, ad quam corpus ex C quacunque celeritate proiectum pertingit. Poſita enim celeritate $=\sqrt{R}$, qua ſpatium x abſoluitur, q tantummodo in ſui negatiuum transmutari debebit, quo facto habebitur $q=\frac{pdxdR}{pddR-dpdR}$.

Scholion 2.

518. Vtraque aequatio definiens q tam pro aſcenſu quam pro deſcenſu ita eſt comparata, vt idem valor ipſius q inueniatur, quaecunque multipla loco p et R accipiantur. Neque tamen ex his concludere licet, ſi determinatae ſint q et p, R vagum quendam habere poſſe valorem: ſed neceſſario debebit eſſe determinatus. Quo autem ille ipſe valor ipſius R, qui eſt aſſumtus, prodeat, non vero eius quoddam multiplum, vis centripeta p ad hoc eſt vel remittenda vel intendenda. Quando autem vis centripetae in ſingulis locis quantitas ipſa datur, problema erit plus quam determinatum, ſi quidem celeritates quibusvis diſtantiis reſpondentes dentur: ſed duntaxat earum ratio propoſita eſſe debet. Ratio vero difficultatis in hoc conſiſtit, quod inuenimus q ex aequatione $R=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}p\,dx$ bis differentiata. Dif-

ferentiata enim aequatio latius patet plusque in se complectitur quam integralis

Scholion 3.

519. Ex solutione problematis sponte sequitur, quomodo, si data fuerit medii densitas in singulis locis seu quantitas q, inueniri oporteat vim centripetam p, reliquis iisdem, quibus ante, manentibus datis. Ex hac enim aequatione $l\frac{pdx}{dR}=\int\frac{dx}{q}$, deducetur $p=\frac{dR}{dx}e^{\int\frac{dx}{q}}$, qui valor est determinatus, quia $\int\frac{dx}{q}$ ita sumtum ponimus, vt euanescat, facto $x=0$ (510).

PROPOSITIO 67.
Problema.

Tabula IV. Fig. 7.

520. ***Resistente medio in duplicata celeritatum ratione, dataque eius densitate, seu exponente resistentiae in singulis locis: determinare vim centripetam, quae faciat, vt corpus, ex quacunque altitudine ad centrum C delabatur, perpetuo tamen eodem tempore eo perueniat.***

Solutio.

Descendat corpus ex puncto quocunque A sitque AC$=a$. Vocetur indeterminata CP$=x$ et ponantur altitudo celeritati in P debita $=v$, exponens resistentiae in P$=q$, et vis centripeta ibidem $=p$, quae est inuenienda. Habebitur igitur $v=e^{\int\frac{dx}{q}}$ (A$-$X) et tempus, quo spatium PC absoluitur $=\int$

$=\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}\sqrt{(A-X)}}$, (509). Vbi est $X=\int e^{\frac{-dx}{q}}$ pdx ita accepto, vt euanescat posito $x=0$: et A oritur ex X posito $x=a$. Totum igitur tempus per AC habebitur si in integrali ipsius $\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}\sqrt{(A-X)}}$ ponatur $x=a$ vel X$=$A. Expressio vero resultans ita esse debebit comparata, vt in ea omnino non insit a vel A: quod obtinetur, si $\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}\sqrt{(A-X)}}$ fuerit functio ipsarum a et x vel ipsarum A et X nullius dimensionis. Quamobrem et differentialis huiusmodi sit functio necesse est. Ponatur igitur $\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}=\frac{dX}{P}$; habebimus pro differentiali temporis $\frac{dX}{P\sqrt{(A-X)}}$, in quo A et X dimensionem obtinent dimidiam; P ergo, quo nulla adsit dimensio, quoque dimidiam dimensionem habere debebit. Sed in P non inesse potest a vel A, eius enim quantitas a solo puncto P pendere debet, non a puncto A. Hanc ob rem erit P$=\frac{\sqrt{X}}{b}$, et elementum temporis $=\frac{bdX}{\sqrt{(AX-XX)}}$, quod requisitam habet proprietatem. Erit igitur $\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}=\frac{bdX}{\sqrt{X}}$, et integratione peracta $2b\sqrt{X}$ $=\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}$, quod integrale ita esse debet sumtum, vt eua-

euanescat facto $x=0$. Quia autem est $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}} p\,dx$, habebitur $4b^2\int e^{-\int\frac{dx}{q}} p\,dx=\left(\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}\right)^2$, et hinc differentiando tandem $p=\frac{e^{\int\frac{dx}{2q}}}{2b^2}\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

521. Quia elementum temporis est $\frac{b\,dX}{\sqrt{(AX-XX)}}$ erit tempus, quo spatium PC absoluitur = arcui circuli, cuius sinus versus est X, existente diametro $=A$, ducto in $\frac{2b}{A}$. Et posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi:1$, erit tempus totius descensus per $AC=b\pi$, quod est constans, neque ab a pendens.

Corollarium 2.

522. Quia est $\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}=2b\sqrt{X}$ et $e^{\int\frac{dx}{2q}}=\frac{dx\sqrt{X}}{b\,dX}$ erit $p=\frac{X\,dx}{b^2\,dX}$. Estque $X=\frac{1}{4b^2}\left(\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}\right)^2$.

Corollarium 3.

523. Sit medium resistens vniforme, et ideo $q=k$; erit $e^{\int\frac{dx}{2q}}=e^{\frac{x}{2k}}$ et $\int\frac{dx}{e^{\int\frac{dx}{2q}}}=2k(1-e^{\frac{-x}{2k}})$. Ex

quo

PUN(TU RECTIL.
quo p ;t $X=\int e^{-\int\frac{dx}{q}}$
peta i $)^2$, et hinc
Q. E. I.
$=2k($
in A ris est $\frac{b\,dX}{\sqrt{(AX-XX)}}$
$v=$ ir= arcui cir-
nte diametro
peripheriae ad
descensus per
tati d a pendens.
$e^{\int\frac{dx}{2q}}=\frac{dx\sqrt{X}}{b\,dX}$
vbi e
$-(1$ $)^2$.
hinc
orme, et ideo
tur l $-e^{\frac{-x}{2k}})$. Ex
cens
quo

quo prodibit $p=\frac{k}{b^2}(e^{\frac{x}{2k}}-1)$. Vis igitur centripeta in C erit $=0$.

Corollarium 4.

524. Si q est constans et $=k$; erit $2b\sqrt{X}=2k(1-e^{\frac{-x}{2k}})$ et $X=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Quia vero X abit in A posito $x=a$, erit $A=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2$, atque $v=\frac{k^2}{b^2}e^{\frac{x}{k}}((1-e^{\frac{-a}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2)$.

Corollarium 5.

525. In infimo igitur loco C altitudo celeritati debita erit $=A=\frac{k^2}{b^2}(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2$.

Corollarium 6.

526. Maximam habebit corpus celeritatem, vbi est $v=pk$. Erit ergo $e^{\frac{-x}{2k}}(1-e^{\frac{-x}{2k}})=(1-e^{\frac{-a}{2k}})^2-(1-e^{\frac{-x}{2k}})^2$. Ex quo reperitur $e^{\frac{-x}{2k}}=2e^{\frac{-a}{2k}}-e^{\frac{-a}{k}}$, hincque $x=2al(2e^{\frac{a}{2k}}-1)$.

Scholion.

527. Si q et k accipiantur negatiua inuenitur lex vis centripetae, quae efficit, vt omnes ascensus ex C facti absoluantur aequalibus temporibus.

Hoc

Hoc enim semper locum habet, descensum in ascensum transmutari vi resistentiae negatiua facta. Quo igitur omnes ascensus fiant isochroni erit $p = \frac{e^{-\int \frac{dx}{2q}}}{2b^2} \int e^{\int \frac{dx}{2q}} dx$. In casuque medii vniformis erit $p = \frac{k}{b^2}(1 - e^{\frac{-x}{2k}})$.

PROPOSITIO 68.

Problema.

Tabula IV. Fig. 9.

528. *Si vis centripeta sit distantiis a centro C proportionalis, et medium vniforme resistat in simplici celeritatum ratione: oportet determinari motum corporis tam recto accedentis ad centrum C, quam recedentis ab eo.*

Solutio.

Sit distantia, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis $= f$, et exponens resistentiae $= k$. Iam accedat corpus in recta AC ad centrum C et ponatur altitudo celeritati, quam C habebit debita $= c$. Hacque celeritate tum vltra C in recta CB recedat a C. Consideremus primo ascensum, et ponamus $CP = x$ et celeritatis in P altitudinem debitam $= v$. His positis erit vis centripeta in $P = \frac{x}{f}$, et vis resistentiae $= \frac{v}{\sqrt{k}}$; ex quibus oritur ista aequatio $dv = -\frac{xdx}{f} + \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$. Quo haec aequatio fiat homogenea ponatur $\sqrt{v} = u$ et $\sqrt{k} = b$; erit ergo $dv = 2udu$, et

et $2udu = -\frac{xdx}{f} + \frac{udx}{b}$. Fiat $u = rx$; erit $2r^2xdx + 2rx^2dr = -\frac{xdx}{f} + \frac{rxdx}{b}$, ex qua oritur $\frac{dx}{x} = \frac{2fbrdr}{fr - b - 2fbr^2}$. Quae integrata cum debita adiecta constante, et restitutis v et k, abit in hanc $\frac{v}{c} - \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} - x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$ Si autem $8k > f$ aequatio differentialis ope circuli quadraturae debet construi. Ponatur scilicet $b = \frac{1}{4\alpha}$ et $f = \frac{1}{2\beta}$, et habebitur ista aequatio differentialis $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} = \frac{dx}{x} + \frac{rdr - \alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} + \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta}$. Cuius integralis est $C = l\sqrt{(u^2 - 2\alpha ux + \beta x^2)} + \int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta}$. Est vero $\int \frac{\alpha dr}{r^2 - 2\alpha r + \beta} = \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$, arcusque am tangens $at = \frac{r - \alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$, existente radio $ac = 1$. Posito ergo $\frac{u}{x}$ loco r, erit $at = \frac{u - \alpha x}{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}$. Ad constantem C determinandam ponatur $x = 0$ et $u = \sqrt{c}$, quo facto loco $\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$ habebitur $\frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot amb$. Erit ergo $l\sqrt{c} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot amb = l\sqrt{(u^2 - \alpha ux + \beta x^2)} + \frac{\alpha}{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}} \cdot am$. Vnde fit $bm = \frac{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{\alpha} l\sqrt{\frac{u^2 - 2\alpha ux + \beta x^2}{c}}$, estque bm arcus cuius tangens bs est $= \frac{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{u - \alpha x}$. Pro recessu a centro C si ponatur, vt ante $CQ = x$, et celeritas in $Q = \sqrt{v}$, retinentibus b, f, k, α, β, r et u eosdem quos ante valores, habebitur $0 = \frac{dx}{x} + \frac{rdr}{r^2 + 2\alpha r + \beta}$. Ex qua obtinebitur $bm = -\frac{\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{\alpha} l\sqrt{\frac{u^2 + 2\alpha ux + \beta x^2}{c}}$, estque arcus bm tangens $bs = \frac{x\sqrt{(\beta - \alpha^2)}}{u + \alpha x}$. At si fuerit $\alpha^2 > \beta$ seu $f > 8k$ poterit integratio algebraice exhiberi, erit $\frac{v}{c} + \frac{x\sqrt{v}}{2c\sqrt{k}} + \frac{x^2}{2fc} = \left(\frac{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} - x\sqrt{(f-8k)}}{4\sqrt{fkv} + x\sqrt{f} + x\sqrt{(f-8k)}}\right)^{\sqrt{\frac{f}{f-8k}}}$. Restat

Tabula IV. Fig. 10.

ſtat autem caſus quo $\alpha^2 = \beta$, ſeu $f = 8k$ qui ſeorſim pertractari debet. Inuenitur autem pro acceſſu haec aequatio $l\frac{4\sqrt{kv}-x}{4\sqrt{kc}} = \frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$. Atque pro receſſu iſta $l\frac{4\sqrt{kv}+x}{4\sqrt{kc}} = \frac{-x}{4\sqrt{kv}+x}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

529. In caſu ergo quo $f = 8k$ ſemper pro acceſſu eſſe debet $4\sqrt{kv} > x$, alioquin $\frac{x}{4\sqrt{kv}-x}$ aequaretur quantitati imaginariae. Quare nisi $x = 0$, non poterit eſſe $v = 0$, atque ideo celeritas in C neceſſario debet eſſe $= 0$. Quamobrem ſi ea ponatur finita $\sqrt{c}$ initium deſcenſus erit imaginarium.

Tabula IV Fig. 9.

Corollarium 2.

530. Hoc autem caſu $f = 8k$ receſſus ex aequatione cognoſcitur facto enim $v = 0$ inuenitur $l\frac{x}{4\sqrt{kc}} = -1$, hincque $x = BC = \frac{4\sqrt{kc}}{e}$ denotante e numerum cuius logarithmus eſt vnitas. Ergo diſtantia BC eſt proportionalis celeritati in C.

Corollarium 3.

531. Quia igitur, quando reſiſtentia tanta eſt, vt ſit $8k = f$, corpus in acceſſu ad C omnem amittit celeritatem; multo maiore ratione ſi $8k < f$, ſeu reſiſtentia adhuc maior fuerit, corpus ad C accedens omnem celeritatem amittet.

PUNCTI)TU RECTIL.
=8k qui ſeorſim
em pro acceſſu
532. que pro receſſu
poſt acceſ
his caſibus
ſtentia fue
dens in
qua deinc ſemper pro ac-
rio moue aequare-
nisi x=0, non
eritas in C ne-
m ſi ea ponatur
533 narium.
tur aequat
l V
nitur por 8k receſſus ex
tangens v=0 inuenitur
ro ſimili lenotante e nu-
as. Ergo di-
ati in C.
534
per aequ eſiſtentia tanta
aequation ad C omnem
nullus om atione ſi 8k<f,
ſi 8k ali corpus ad C ac-
ſpatium r
cultas ha
rabiles ar

Corollarium 4.

532. Quare ſi vel $8k = f$ vel $8k < f$, corpus poſt acceſſum ad C in C perpetuo quieſcet, atque his caſibus nullus receſſus ſequi poterit. At ſi reſiſtentia fuerit minor, ſeu $8k > f$, tum corpus accedens in C finitam celeritatem habere poterit, qua deinde a C recedet, atque motu oſcillatorio mouebitur.

Corollarium 5.

533. Sin autem $8k > f$ pro acceſſu haec habetur aequatio; arcus cuius tangens eſt $\frac{x\sqrt{(\beta-\alpha^2)}}{u+\alpha x} - \frac{\sqrt{(\beta-\alpha^2)}}{\alpha}$ $l\sqrt{\frac{u^2-2\alpha ux+\beta x^2}{c}}$. Vnde initium acceſſus A inuenitur ponendo $u = 0$, prodit autem arcus cuius tangens eſt $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} - \frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}\, l\frac{\sqrt{2fc}}{x}$. Pro receſſu vero ſimiliter inuenitur arcus cuius tangens eſt $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}\, l\frac{\sqrt{2fc}}{x}$.

Scholion 1.

534. Hinc ſequi videtur diſtantiam BC ſemper aequalem eſſe diſtantiae AC, quia hae duae aequationes inter ſe congruunt. At cum, ſi $8k < f$ nullus omnino detur receſſus, fieri non poteſt, vt, ſi $8k$ aliquantulum tantum maius fuerit quam f, ſpatium receſſus aequale fiat ſpatio acceſſus. Difficultas haec autem tollitur, ſi attendamus innumerabiles arcus eidem tangenti $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}}$ reſpondere, quorum

rum alius pro accessu alius pro recessu accipi debet. Ponatur $\frac{\sqrt{(8k-f)}}{\sqrt{f}} = \tau$, et minimus arcus tangenti τ respondens sit γ; et semiperipheria circuli π, erit τ tangens omnium horum arcuum γ, $\pi+\gamma$, $2\pi+\gamma$, $3\pi+\gamma$ etc. nec non horum $-\pi+\gamma$, $-2\pi+\gamma$ etc. Pro recessu nunc BC sumi debet arcus γ, eritque $\frac{\gamma}{\tau} = l\frac{\sqrt{2fc}}{BC}$, atque $BC = e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque pro accessu sumi debet arcus $-\pi+\gamma$ fitque $AC = e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Reliqui arcus dant puncta, in quibus corpus circa C oscillando successiue habet celeritatem $= o$. Cum igitur in prima oscillatione sit spatium accessus $= e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$; erit spatium accessus secundae oscillationis aequale spatio recessus in prima oscillatione atque ideo $= e^{\frac{-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. In tertia oscillatione erit spatium accessus $= e^{\frac{-\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Atque in oscillatione, quae numero n indicatur est spatium accessus $e^{\frac{-(n-2)\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. Hacque ratione cuiuscunque oscillationis tam spatium accessus, quam spatium recessus poterit determinari.

Corollarium 6.

535. Quando igitur corpus oscillationes absoluit circa centrum C, constituent spatia accessus progressionem geometricam, cuius denominator est

PUNCTI TU RECTIL.
est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$. S. spatia recef oscillationit
su accipi debet. s tangenti τ re- rculi π, erit τ $+\gamma$, $2\pi+\gamma$, $-2\pi+\gamma$ etc. cus γ, eritque
que pro acces- $AC = e^{\frac{\pi-\gamma}{\tau}}\sqrt{2fc}$. corpus circa C m $= o$. Cum tium accessus ecundae oscil- ima oscillatio- a oscillatione tque in oscil- t spatium ac- ne cuiuscun- is, quam spa-
536. $+\frac{udx}{b}$ pro pro ascensi $=$ function notante a aut BC. (nulla ineri omnia tem erunt intei erit functi haecque e tati consta suum temp tis inter se corpus m onalis est tro C (5
illationes ab- patia accessus denominator est
537. tantiae a

est $e^{\frac{-\pi}{\tau}}$. Similemque progressionem constituunt spatia recessus, atque etiam integra spatia singulis oscillationibus percursa.

Scholion 3.

536. Quia aequatio differentialis $2udu = \frac{-xdx}{f} + \frac{udx}{b}$ pro descensu, et aequatio $2udu = \frac{-xdx}{f} - \frac{udx}{b}$ pro ascensu est homogenea: erit in vtroque casu u = functioni ipsarum x et a vnius dimensionis, denotante a maximam a centro C elongationem AC aut BC. Quamobrem in temporis expressione $\int\frac{dx}{u}$ nulla inerit dimensio ipsarum a et x, et ideo omnia tempora tam ascensuum, quam descensuum erunt inter se aequalia. Integrale enim ipsius $\frac{dx}{u}$, erit functio ipsarum a et x nullius dimensionis, haecque expressio posito $x = a$ erit aequalis quantitati constanti. Simili modo erunt omnium descensuum tempora vsque ad punctum maximae celeritatis inter se aequalia. Distantia enim puncti, in quo corpus maximam habet celeritatem, proportionalis est ipsi a seu maximae elongationi a centro C (528).

PROPOSITIO 69.
Theorema.

537. *Si fuerit vis centripeta vt potestas distantiae a centro C, cuius exponens est* n; *et medi-* Tabula IV. Fig. 7.

um

um resistat in ratione 2m multiplicata celeritatum; exponens vero resistentiae sit proportionalis distantiarum a centro C potestati exponentis $\frac{mn+m-n}{m}$: Erunt plurium descensuum vel ascensuum tempora in spatiorum totorum descriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata.

Demonstratio.

Sit AC spatium totum vel ascensu vel descensu descriptum $=a$, eiusque portio quaecunque CP$=x$, et celeritas corporis in P$=\sqrt{v}$. Ponatur distantia f, in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis. His positis erit vis centripeta in P$=\frac{x^n}{f^n}$, et sumto pro resistentiae exponente $\lambda^{\frac{1}{m}} x^{\frac{mn+m-n}{m}}$ erit vis resistentiae $\frac{v^m}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Hinc pro descensu habebitur ista aequatio $dv = \frac{-x^n dx}{f^n} + \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$ pro ascensu vero $dv = \frac{-x^n dx}{f^n} - \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Quae aequationes inter se prorsus conueniunt nisi quod λ in altera negatiuum habeat valorem. Ponatur nunc $v = u^{n+1}$, et habebitur $(n+1)u^n du = \frac{x^n dx}{f^n} + \frac{u^{mn+m} dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$, in qua aequatione u et x eundem vbique dimensionum numerum constituunt. Haec vero aequatio ita debet integrari, vt, facto $x=a$, euanescat u. Quam ob rem aequatio integralis ita erit comparata vt a, x et u vbique eundem constituant dimensionum numerum. Ex ea igitur reperietur u aequalis functioni ipsarum a et x vnius dimensionis. Consequenter aequabitur v functioni ipsarum a et x dimensionum $n+1$. Quocirca tempus, quo spatium PC percurritur, nempe $\int \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit functio ipsarum a et x, quae habebit $\frac{1-n}{2}$ dimensiones. Facto deinde $x=a$, quo totum tempus per AC habeatur, prodibit functio ipsius tantum a dimensionum $\frac{1-n}{2}$. Totum ergo tempus vel ascensus vel descensus erit $= A a^{\frac{1-n}{2}}$, vbi A est quantitas constans ex literis f et λ, quae immutatae manent, vtcunque a varietur. Perspicuum igitur est omnes tam ascensus, quam descensus esse inter se in totorum spatiorum descriptorum ratione $\frac{1-n}{2}$ multiplicata. Q. E. D.

PUNCTI MOTU RECTIL.
vbique eun plicata celeritatum; Ex ea igit portionalis distantia- a et x vni tis $\frac{mn+m-n}{m}$: Erunt tur v funct tempora in spatio- Quocirca $\frac{1-n}{2}$ multiplicata. nempe $\int \frac{dx}{\sqrt{v}}$ io. bit $\frac{1-n}{2}$ dir ascensu vel descen- tum temp portio quaecunque us tantum in P$=\sqrt{v}$. Pona- tripeta aequalis est pus vel asc vis centripeta in est quantit tatae man entiae exponente igitur est inter se in $\frac{v^m}{\lambda x^{mn+m-n}}$. Hinc pro de- ne $\frac{1-n}{2}$ m $\frac{-x^n dx}{f^n} + \frac{v^m dx}{\lambda x^{mn+m-n}}$
538 oque mn+ ta vt dista ascensuum cursorum Quae s conueniunt nisi m habeat valo- , et habebitur , in qua aequatio- ensionum numerum o ita debet integra- . Quam ob rem arata vt a, x et u vbi-
539 tantiis a tempora

Corollarium 1.

538. Si medium resistens sit vniforme, ideoque $mn+m-n=0$, erit $n=\frac{m}{1-m}$, seu vis centripeta vt distantia eleuata ad $\frac{m}{1-m}$. Tempora vero vel ascensuum vel descensuum erunt in spatiorum percursorum ratione $\frac{1-2m}{2-2m}$ multiplicata.

Corollarium 2.

539. Si fuerit $n=1$, seu vis centripeta distantiis a centro C proportionalis, erunt omnia tempora tam ascensuum quam descensuum inter se aequa-

aequalia. Hoc vero casu cum resistentiae lex sit celeritatum potestas exponentis $2m$, erit resistentiae exponens vt distantia a centro C eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.

Corollarium 3.

540. Ex hoc patet, quod ex praecedente propositione inuenimus (536), si resistentia sit celeritatibus proportionalis, et hanc ob rem $m=\frac{1}{2}$, et medium vniforme, omnia tempora tam ascensuum quam descensuum fore inter se aequalia.

Corollarium 4.

541. Si vis centripeta fuerit constans seu $n=0$, erunt tempora vel ascensuum vel descensuum in subduplicata spatiorum percursorum ratione. Exponens vero resistentiae sit distantiis a centro C proportionalis. Eundem hunc casum iam exposuimus supra (495).

Scholion.

542. Hisce concludimus hoc Caput de motu puncti rectilineo in medio resistente; atque iuxta diuisionem factam progredimur ad motus curuilineos in vacuo corporum a quibuscunque potentiis absolutis sollicitatorum.

CA-

CAP. QU
MOTU
QUI
V is
cu
re
in quo co
544.
elementu
rit, nisi
det, pro
rectionem
545.
uetur; vi
mutat, e
exerit.
546
natura vi

TU RECT. &c.
lentiae lex sit ce-
, erit resistentiae
eleuata ad $\frac{2m-1}{m}$.
3.
ex praecedente
si resistentia sit
hanc ob rem $m=\frac{1}{2}$,
pora tam ascen-
se aequalia.
4.
erit constans seu
m vel descensuum
rsorum ratione.
antiis a centro C
sum iam exposui-
c Caput de motu
nte; atque iuxta
ad motus curuili-
scunque potentiis
CA-

CAPUT QUINTUM
DE MOTU PUNCTI CURVILINEO LIBERO A QUIBUSCUNQUE POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

DEFINITIO 21.

543.

Vis tangentialis est potentia corpus, quod lineam curuam AMB describit, sollicitans, cuius directio incidit in tangentem TMt puncti M, in quo corpus, cum sollicitatur, est versatur. Tabula IV. Fig. 11.

Corollarium 1.

544. Vis igitur tangentialis in corpus, dum elementum Mm percurrit, alium effectum non exerit, nisi quod motum eius vel acceleret vel retardet, prout scilicet corpus trahit vel secundum directionem MT vel Mt.

Corollarium 2.

545. Cum igitur corpus in linea curua mouetur; vis tangentialis directionem suam perpetuo mutat, et secundum aliam plagam effectum suum exerit.

Scholion.

546. Vis quidem tangentialis per se in rerum natura vix vnquam oriri potest; nihilo vero minus eius