CAPUT TERTIUM
DE
MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI A POTENTIIS ABSOLUTIS SOLLICITATI.

PROPOSITIO 24.
Theorema.
189.

Quando potentiae et motus directiones in eadem ſitae ſunt recta, motus erit rectilineus.

Demonſtratio.

Omne corpus vi inſita conatur motum ſuum in directum continuare, id quod ſemper praeſtat, niſi impediatur (65.). Potentiae vero in corpus motum duplicem eſſe oſtendimus effectum, alterum quo eius directio immutatur, alterum quo celeritas eius. At diratio manet immutata, ſi potentiae directio cum ea in directum iacet (128.). Hoc igitur caſu punctum in linea recta progredi perget. Q. E. D

Corollarium 1.

190. In hoc igitur capite alios non conſiderabimus caſus, niſi in quibus motus et potentiae directiones in eadem recta ſunt poſitae.

Corollarium 2.

191. Vidimus autem duobus modis hanc congruentiam euenire poſſe, prout ſcilicet ambae hae

di-

direc tendu in hoc I A PO- ATI.
1 deran ctum quam adiun ſpatii comp deter tam c celeri in eadem um ſuum praeſtat, n corpus alterum o celeri- ſi poten-). Hoc i perget. recta eadem quon
A et que c celer tur e crem ment confide- ntiae di- anc con- mbae hae

directiones vel in eandem plagam vel in oppoſitas tendunt. In quorum illo puncti celeritas augetur, in hoc vero diminuitur (128.).

Scholion.

192. In motu hoc rectilineo duo ſunt conſideranda, quorum primum eſt potentia, a qua punctum vbiuis ſollicitatur, alterum vero celeritas, quam habet in quolibet ſpatii loco. His praeterea adiungimus tertium, quod eſt tempus, quo quaeuis ſpatii portio percurritur. Tria vero illa ita ſunt comparata, vt dato vno reliqua duo ſemper poſſint determinari. Primo igitur potentiam tanquam datam conſiderabimus: deinde vero eam ex data vel celeritatum vel temporum ratione inueſtigabimus.

PROPOSITIO 25.
Problema.

193. *Protrahatur punctum in A quieſcens in recta AP, a potentia uniformi ſeu quae vbique punctum eadem vi ſollicitat, determinare celeritatem puncti in quouis loco P.*

Solutio.

Exponatur maſſa ſeu vis inertiae puncti litera A et potentia litera g, quae erit conſtans ſeu vbique eiuſdem quantitatis. Sit ſpatium $AP = x$, et celeritas in P, quae quaeritur, ponatur $= c$. Sumatur elementum ſpatii Pp, quod erit $= dx$; atque incrementum celeritatis, quod punctum, dum elementum Pp abſoluitur, a potentia g accepit, erit d.

 I...

His positis erit $cdc = \frac{ngdx}{A}$ (157.), quia potentiam perpetuo deorsum trahere, et propterea motum accelerare ponimus. Ex hac aequatione, si integretur, oritur $cc = \frac{2ngx}{A} +$ Const., quae constans ex eo debet determinari, quod celeritas in A euanescat. Factis igitur $c = o$, et $x = o$, prodibit Const. $= o$, quamobrem habebitur $cc = \frac{2ngx}{A}$, seu $c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}$. Q. E. I.

Corollarium I.

194. Punctum A igitur perpetuo in recta AP descendet, et celeritas in quouis loco erit vt radix quadrata ex spatio iam percurso.

Corollarium 2.

195. Ex his etiam plurium punctorum a potentiis vniformibus seu constantibus descensus poterunt comparari, erunt enim celeritates in ratione subduplicata composita ex directis potentiarum et spatiorum percursorum et inuersa massarum.

Scholion I.

196. Casus hic apprime conuenit cum lapsu corporum super terra: grauitas enim, quae potentiae vices sustinet, est vniformis in non nimis magnis a terrae superficie distantiis. Namque idem pondus cuiusuis corporis reperitur in altissimis montibus et profundissimis vallibus; ex pondere autem grauitas innotescit. In descensu igitur grauium libero celeritates sunt vt radices quadratae ex altitudinibus percursis. Haecque est ipsa Galilaei propo-
si-

sitio ... potentiam ... motum ... ne, si inte- ... constans ex ... in A euanes- ... odibit Const. ... seu $c = \sqrt{\frac{2ngx}{A}}$. ... o in recta AP ... erit vt radix ... ctorum a po- ... census pote- ... es in ratione ... tentiarum et ... rum. ... it cum lapsu ... quae poten- ... n nimis ma- ... nque idem ... tissimis mon- ... dere autem ... grauium li- ... tae ex altitu- ... ilaei propo- ... si-

sitio, quam primus tum ex experimentis tum ex ratione detexit. Descensus autem in spatio ab aere vacuo fieri debet, quia aer motui resistit, hancque regulam euertit.

Scholion 2.

197. In spatio ab aere vacuo, quod ope antliae pneumaticae efficitur, plurimis experimentis est demonstratum, corpora quaecunque aequaliter descendere. Ex quo consequitur, si nullus esset aer, omnia corpora ex aequalibus altitudinibus delapsa aequales adipisci celeritates. Hanc ob rem si g designet vim grauitatis, qua quoduis corpus A sicetur, erit $\frac{g}{A}$ quantitas semper constans. Vis igitur grauitatis proportionalis est quantitati materiae corporis, in quod agit. Illa autem vis nil aliud est nisi pondus corporis; quare pondera corporum sunt quantitati materiae proportionalia. *Neutonus* hanc propositionem in Princ. Phil. quoque affirmat, eamque praeterea ex experimentis pendulorum probat.

Corollarium 3.

198. Corpus igitur quodcunque in superficie terrae ex data altitudine delapsum datum acquiret celeritatis gradum. Cognita ergo altitudine ex qua corpus descendit, innotescet simul celeritas eius hoc descensu acquisita.

Scholion 3.

199. Ad celeritates igitur mensurandas poterimus has altitudines adhibere, ex quibus graue
in

in terrae superficie descendens aequalem acquirit celeritatem. Haec quidem altitudo non potest loco ipsius celeritatis substitui, quia celeritates sunt in altitudinum ratione subduplicata. Verum tamen altitudine commode quadratum celeritatis denotari poterit.

DEFINITIO 15.

200. Altitudinem celeritati cuidam debitam vocabimus posthac eam altitudinem, ex qua graue in superficie terrae descendens eandem illam acquirit celeritatem.

Corollarium 1.

201. Haec igitur altitudo debita est vt quadratum celeritatis ad quam refertur. Celeritate ergo existente c et ipsi debita altitudine v, erit v vt c^2.

Scholion 1.

202. Hactenus celeritatem expressimus linea recta, quae dato tempore ea celeritate percurri potest. In posterum autem commodius erit altitudinem debitam eius loco introducere. Hanc ob rem ponemus $v=cc$ et $c=\sqrt{v}$. Habebimus ergo in problemate praecedente hanc aequationem $v=\frac{2ngx}{A}$.

Corollarium 2.

203. In posterum igitur semper loco celeritatis c ponere licebit $\sqrt{v}$, seu radicem quadratam ex altitudine celeritati debita.

Co-

Corollarium 3.

204. Si potentia g denotet ipsam vim grauitatis, erit x ipsa altitudo celeritati c debita, adeoque $v=x$. Est vero $v=\frac{2ngx}{A}$, ex quo igitur erit $n=\frac{A}{2g}$. Hoc igitur iam assecuti sumus commodum, vt literam n determinauerimus, quae in omnibus casibus tenet eundem valorem (155.).

Scholion 2.

205. Quia hic g vim grauitatis significat erit $\frac{g}{A}$ quantitas constans (197.). Hanc ergo ponemus 1, id quod licebit, cum potentiae ad corpora definitam rationem habere nequeant. Atque hinc facile erit in aliis casibus valorem ipsius $\frac{g}{A}$ seu potentiae applicatae ad corpus exhibere. Erit nempe $\frac{g}{A}$ ad 1, seu $g : A$ vt vis g, qua corpus A sollicitatur, ad pondus, quod idem corpus haberet in nostris regionibus. Litera igitur A non amplius materiae quantitatem denotabit, sed ipsum corporis A pondus, si super terra esset positum. Hoc igitur modo omnes potentias cum ponderibus comparabimus, id quod in potentiis mensurandis ingentem lucem foenerabitur.

Corollarium 4.

206. Cum in $n=\frac{A}{2g}$, g denotet vim grauitatis, positumque sit $\frac{g}{A}=1$, erit $n=\frac{1}{2}$. Quem valorem semper retinebit, si modo celeritates per radices quadratas altitudinum ipsis debitarum exprimantur. Ideoque erit in nostro casu $dv=\frac{g\,dx}{A}$ et $v=\frac{gx}{A}$.

 Co-

Corollarium 5.

207. Propterea in hac lege generali $cdc = \frac{npds}{A}$ (157.), si sit altitudo celeritati c debita v, erit $cdc = \frac{dv}{2}$, adeoque ob $n = \frac{1}{2}$, habebitur haec lex $dv = \frac{pds}{A}$, vbi gp est ad A, vt vis p ad pondus corporis A.

Corollarium 6.

208. Simili modo, quae in §. §. 161, et 163 tradita sunt, nempe aequationes $Acdc = npdy$ et $nprdx = Ac^2ds$, substituendo v loco c^2 et $\frac{1}{2}$ loco n, transmutantur in has $Adv = pdy$ et $prdx = 2Avds$, vbi p ad A habet rationem modo dictam.

Corollarium 7.

209. Atque in §. 165. habebitur $r = \frac{2Av}{p}$ seu $pr = 2Av$. Item in §. 166. habebitur $Adv = pds$, et in casu §. 167. habebitur $Adv = -pds$. Hocque modo ante vsitatas quantitates vagas n et c ad determinatos valores reduximus.

PROPOSITIO 26.

Theorema.

210. *In diuersis potentiarum vniformium hypothesibus altitudines, ex quibus aequalia corpuscula descendentia aequales acquirunt celeritates, sunt reciproce vt potentiae.*

Demonstratio.

Sit vniuscuiusque corpusculi massa, seu pondus in superficie terrae A, potentia quaevis vniformis g, et altitudo celeritati acquisitae debita v. Altitudo

tudo citat fit x fit v uersi aequa gx. qua c rit c. Q. E

generali $cdc = \frac{npds}{A}$ c debita v, erit ebitur haec lex ndus corporis A.

§. §. 161, et es $Acdc = npdy$ et c^2 et $\frac{1}{2}$ loco n, $dx = 2Avds$, vbi

super nisur tatur tudir lis, les $\frac{1}{525}$

itur $r = \frac{2Av}{p}$ seu ir $Adv = pds$, et Hocque mo- n et c ad de-

6.

vniformium hypo- ia corpuscula des- es, sunt recipro-

por riter est l aequ $\frac{1}{835}$ turn eun

assa, seu pondus uaevis vniformis debita v. Alti- tu-

tudo vero, ex qua corpusculum A a potentia g sollicitatum aequalem acquirit descendendo celeritatem, sit x, erit $v = \frac{2ngx}{A}$(202.). At est $n = \frac{1}{2}$(206.). Ergo fit $v = \frac{gx}{A}$ seu $Av = gx$. Quare cum celeritates a diuersis potentiis productae et corpuscula ponantur aequalia, erit Av quantitas constans, ideoque etiam gx. Propterea erit x reciproce vt g, i. e. altitudo, ex qua corpusculum A a potentia g sollicitatum acquirit celeritatem $\sqrt{v}$, erit reciproce vt potentia g. Q. E. D.

Corollarium 1.

211. Ostendit *Newtonus* eiusdem corporis in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae positi nisum seu potentiam, qua ad eorum centra sollicitatur esse vt 10000, 835, 525, et 410. Altitudines igitur, ex quibus corpus in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et terrae descendens aequales acquirit celeritates sunt inter se vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$.

Corollarium 2.

212. Statuit autem idem *Newtonus* omnia corpora in his superficiebus aequaliter descendere, pariter vt in superficie terrae. Non igitur opus est hanc adiicere conditionem, quod corpora sint aequalia, sed ex altitudinibus, quae sunt vt $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{835}$, $\frac{1}{525}$ et $\frac{1}{410}$, in superficiebus Solis, Iouis, Saturni et Terrae, quaecunque corpora delabentia eundem acquirunt celeritatis gradum.

 Scho-

Scholion I.

213. Intelligitur ex his duplicem cuiusuis potentiae esse effectum in corpora, alterum quo certum nisum seu conatum corporibus imprimit, alterum quo ea reipsa mouet. Ille in statica potissimum consideratur, et mensurandus est pondere, quod aequalem habet conatum deorsum, poteritque vocari vis potentiae absoluta. Posterior vero effectus mensurari debet acceleratione, seu celeritatis incremento, quod corpori dato tempore imprimit: proportionalis igitur est illi conatui diuiso per corporis massam (159.). Vocatur hic effectus a *Neutono* vis accelerans, et propterea vis potentiae accelerans proportionalis est vi eius absolutae ad massam corporis seu pondus applicatae. Quapropter cum sit $dv = \frac{pdx}{A}$ (207) et $\frac{p}{A}$ denotet vim accelerantem, erit dv aequale facto ex vi accelerante in elementum spatii percursi. Ita vis grauitatis absoluta est massae corporum, in quae agit, proportionalis, nisum enim eorum deorsum causatur, seu pondus, quod massae proportionale esse ostendimus. Vis autem accelerans grauitatis in omnibus corporibus est aequalis, cum omnia aequaliter descendant, aequalibusque temporibus aequales adipiscantur celeritates.

Corollarium 3.

214. Vires ergo potentiarum acceleratrices sunt inter se vt vires absolutae, si corpora sint aequalia. Quare cum vis acceleratrix grauitatis sit

1 vt

em cuiusuis po-
terum quo cer-
imprimit, alte-
statica potissi-
s est pondere,
sum, poterit-
Posterior vero
, seu celeritatis
pore imprimit:
iuiso per cor-
effectus a Neu-
potentiae ac-
olutae ad mas-
Quapropter
vim acceleran-
lerante in ele-
itatis absoluta
proportiona-
tur, seu pon-
se ostendimus.
nnibus corpo-
er descendant,
lipiscantur ce-
acceleratrices
corpora sint
grauitatis sit
1 vt

1 vt ante posuimus (205), erit vis acceleratrix grauitatis solaris $= 24, 390$; vis acceleratrix grauitatis in superficie Iouis $= 2, 036$; Vis acceleratrix grauitatis, quae est in superficie Saturni $= 1, 280$. Atque grauitatis vim acceleratricem in superficie lunae statuit *Neutonus* $= \frac{1}{3}$.

Corollarium 4.

215. Quare si Propositio 25. ad lapsum corporum in superficie terrae accommodari debeat, erit $\frac{g}{A} = 1$, quemadmodum fecimus §. 205. Sin vero ad lapsum corporum in superficie solis, erit $\frac{g}{A} = 24, 390$; sin ad lapsum corporum in superficie Iouis, erit $\frac{g}{A} = 2, 036$; sin ad lapsum corporum in superficie Saturni, erit $\frac{g}{A} = 1, 280$, sin denique ad lapsum corporum in superficie Lunae erit $\frac{g}{A} = \frac{1}{3}$.

Scholion 2.

216. Assumimus hic cum *Neutono* omnia corpora coelestia terrae nostrae esse similia, atque corpora in eorum superficiebus posita vim habere ad eorum centra tendentem, quae similis sit grauitati corporum terrestrium. Ex traditis igitur *Neutonianis* apparet, corpus, cuius hic pondus sit 1 librae, in superficie Solis positum ponderare 24, 39 libras; in superficie Iouis vero 2, 036 libras; in superficie Saturni 1, 280 libras, et in superficie lunae tertiam librae partem.

 Scho-

Scholion 3.

217. Quo autem facilius grauitatis similiumque potentiarum in corporibus coelestibus natura perspiciatur, singula corporum elementa aequalia aequaliter a grauitate affici concipienda sunt. Ex quo sequitur, quod iam experientia constat, vires grauitatis, quibus quaeque corpora sollicitantur, esse ipsorum massis seu quantitatibus materiae proportionales. Ante vero iam est demonstratum, si potentiae sint massis corporum, quae sollicitant, proportionales, effectus earum in corporibus mouendis esse aequales (136). Quamobrem ex his manifestum est omnia corpora in superficie terrae aequaliter descendere debere, atque etiam pariter in omnibus corporibus coelestibus.

PROPOSITIO 27.

Problema.

Tab. II. Fig. 10. 218. *Puncto* A *a potentia vniformi per spatium* AP *promoto, definire tempus, quo spatium* AP *absoluitur.*

Solutio.

Sit vt ante potentia sollicitans g, spatium $AP = x$, et altitudo celeritati, quam in P habet debita v; erit ob $n = \frac{1}{2}$, $v = \frac{gx}{A}$. Ipsa igitur celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{gx}{A}}$. Habebitur ergo tempus, quo elementum $Pp = dx$, percurritur, vt $\frac{dx\sqrt{A}}{\sqrt{gx}}$. Sit tempus, quo spatium AP absoluitur $= t$, ponaturque $dt = \frac{m\,dx\sqrt{A}}{\sqrt{g\,x}}$ oportebit ex vnico experimento determinare li-

itatis similium-
lestibus natura
menta aequalia
nda sunt. Ex
constat, vires
llicitantur, es-
teriae propor-
tratum, si po-
ollicitant, pro-
oribus mouen-
ex his mani-
terrae aequa-
am pariter in
7.
mi per spatium
tium AP absol-
patium $AP = x$,
ibet debita v;
eritas in P erit
quo elemen-
Sit tempus,
naturque $dt =$
determinare
li-

teram m, quo tempus in data mensura puta in minutis secundis reperiatur. Ex illa vero aequatione prodit integrando $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$, ad quod constantem quantitatem adiicere non est opus, quia posito $x = o$ etiam t euanescit, prout debet. Determinato igitur m ex experimento, habebitur $t = 2m\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. sec. Quo autem huiusmodi mensura temporis absoluta resultet, oportet vt x quoque secundum constantem mensuram exhibeatur: determinabimus igitur semper spatium x in scrupulis i. e. partibus millesimis pedis Rhenani; fractio enim $\frac{A}{g}$ in numeris absolutis exprimetur, ita vt non opus sit ad eam certam mensuram adhibere. Definita ergo litera m, id quod mox faciemus, habebitur plena problematis solutio. Q. E. I.

Corollarium 1.

219. Si g designet grauitatem, erit $\frac{A}{g} = 1$, (205.), hanc ob rem tempus, quo corpus terrestre ex altitudine x scrup. pedis rhenani delabitur, erit $2m\sqrt{x}$ minutorum secundorum.

Corollarium 2.

220. Experimentis autem compertum est corpus minuto secundo altitudinem 15625 scrup. pedis Rhenani descendendo absoluere. Quam ob rem, si ponatur $x = 15625$, debet prodire $t = 1$. Cum autem sit $t = 2m\sqrt{x}$, erit $1 = 2m\sqrt{15625}$ i. e. $= 250m$. Reperitur ergo valor literae $m = \frac{1}{250}$.

Co-

Corollarium 3.

221. Quoniam vero litera m in omnibus casibus eundem retinet valorem, erit in casu problematis $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ minut. sec. Expresso igitur spatio percurso x in scrupulis pedis Rhenani dabit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ numerum minutorum secundorum, quibus hoc spatium percurritur.

Corollarium 4.

222. Atque ad omnes prorsus casus hic valor ipsius m inuentus accommodari potest. Sit enim elementum spatii descripti ds, altitudo celeritati, qua hoc percurritur, debita v, erit temporis elementum $dt = \frac{mds}{\sqrt{v}}$ et $t = m\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$. Ex qua aequatione, si v et s in scrup. pedis Rhenani exprimantur et ponatur $m = \frac{1}{250}$, prodibit tempus t in minutis secundis, $t = \frac{1}{250}\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ min. sec.

Scholion I.

223. Ex hoc igitur, quod celeritates per radices quadratas altitudinum debitarum denotamus, istud porro assecuti sumus commodum, quod temporum absolutam mensuram semper inueniamus. Vsi vero sumus experimento, quo definitur altitudo, ex qua graue minuto secundo delabitur, quam *Hugenius* per experimenta pendulorum inuenit 15 ped. Paris. 1 dig. $2\frac{1}{18}$ lineas, i. e. in fractionibus decimalibus 15, 0976 ped. Parisinos. Rationem autem pedis Rhenani ad Parisinum adhibemus 1000 ad 1035, ex qua altitudo minuto secundo cadendo per-

perc
156
ram
num
radic
$\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ (
uidi
250
n omnibus casu proble-
o igitur spatio
dabit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$
uibus hoc spa-
casus hic valor
st. Sit enim
udo celeritati,
temporis ele-
aequatione, si
intur et pona-
inutis secundis,
rant
cunq
tion
ct rc
altit
c vt
Con
posi
tum
pot
eritates per ra-
m denotamus,
n, quod tem-
r inueniamus.
efinitur altitu-
labitur, quam
um inuenit 15
ractionibus de-
Rationem au-
hibemus 1000
cundo cadendo
ribu
cita
per-

percursa prouenit 15, 625 ped. Rhenanos, seu 15625 scrupula eiusdem pedis; Hancque mensuram malumus adhibere quam Parisinam, quia hic numerus est quadratus, eoque euitamus frequentes radicis extractiones. Numerus praeterea, per quem $\int\frac{ds}{\sqrt{v}}$ (s et v in scrupulis pedis Rhenani expressi) diuidi debet, vt tempus in minutis sec. reperiatur, est 250, qui facillime memoria teneri potest.

Corollarium 5.

224. Cum $\frac{g}{A}$ denotet potentiae vim accelerantem (213) erunt tempora, quibus spatia quaecunque a potentiis vniformibus percurruntur, in ratione subduplicata composita ex directa spatiorum et reciproca virium accelerantium.

Corollarium 6.

225. Posita celeritate, quam punctum A ex altitudine x a potentia g sollicitatum acquirit, c, est c vt $\sqrt{\frac{gx}{A}}$ (193). Ergo ct erit vt x, quia t est vt $\sqrt{\frac{Ax}{g}}$. Consequenter spatia percursa sunt in ratione composita temporum quibus describuntur, et celeritatum, quas descensu adipiscuntur, quaecunque sint potentiae sollicitantes, modo sint vniformes.

Corollarium 7.

226. Atque spatia, quae aequalibus temporibus percurruntur, sunt vt vires potentiarum sollicitantium accelerantes.

Corollarium 8.

227. Spatia igitur, per quae corpora aequalibus temporibus in superficiebus Solis, Iouis, Saturni, Lunae et Terrae delabuntur, sunt inter se vt 24390, 2036, 1280, 333, 1000 (214).

Corollarium 9.

228. In eadem vis accelerantis hypothesi tempora, quibus spatia quaecunque percurruntur, sunt vt celeritates acquisitae, atque tam tempora quam celeritates sunt in ratione subduplicata spatiorum descriptorum.

Scholion 2.

229. Hic semper ponimus corpora descendentia descensum a quiete inchoare, seu eorum celeritatem in initio descensus esse nullam. In sequentibus vero inuestigabimus eos motus, qui oriuntur, quando corpora in ipso motus initio iam habent quandam celeritatem. In his autem tempora et spatia ea debent intelligi, quae initium suum habent in ipso celeritatis euanescentis puncto, et aequationes inuentae omnes ita sunt comparatae, vt euanescente c vel v, simul x et t euanescant.

PROPOSITIO 28.

Theorema.

Tab. II. Fig. 10. 230. *Corporis per* AP *descendentis vt hactenus posuimus, celeritas in* P *tanta erit, vt ea aequaliter progrediens eodem tempore, quo per* AP *est delapsum, spatium duplo maius quam* AP *absoluere possit.*

Demonstratio.

Manentibus, quae in praecedentibus posuimus, corpore A, potentia g, spatio descripto x, celeritate in P acquisita $\sqrt{v}$, et tempore descensus t, erit $t = \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ax}{g}}$ (221), et $v = \frac{gx}{A}$ (204). Hanc ob rem habetur $\frac{g}{A} = \frac{v}{x}$, ideoque $t = \frac{x}{125\sqrt{v}} = \frac{2x}{250\sqrt{v}}$. At haec expressio dat tempus quoque, quo spatium $2x$ celeritate vniformi $\sqrt{v}$ percurritur, quia $\frac{2x}{\sqrt{v}}$ est diuisum per 250, quem numerum inuenimus ad tempus in minutis sec. exprimendum (220). Consequenter spatium $2x$ eodem tempore celeritate $\sqrt{v}$ percurritur, quo spatium x descensu vniformiter accelerato. Q. E. D.

Corollarium 1.

231. Corpus igitur a potentia vniformi sollicitatum descendens tempore t per spatium x tantam acquirit celeritatem, qua aequabiliter progrediens idem spatium x dimidio tempore t percurrere poterit.

Corollarium 2.

232. Quia in superficie terrae corpora tempore minuti secundi per spatium 15625 scrup. pedis Rhenani delabuntur, tanta erit eorum celeritas hoc lapsu acquisita, qua vniformi motu spatium 31250 scrup. minuto secundo, seu 15625 scrup. semi minuto secundo percurrent.

Corollarium 3.

233. Cum celeritas per radices quadratas ex altitudinibus, ex quibus lapsu acquiruntur, exprimere instituerimus, erit celeritas $\sqrt{15625}$ seu 125 tanta, qua minuto secundo spatium 31250 scrup. absolui potest.

Corollarium 4.

234. Facile igitur erit spatium assignare, quod celeritate hoc modo expressa $\sqrt{v}$ minuto sec. percurritur. Fiat enim, quia spatia eodem tempore descripta sunt vt celeritates, vt 125 ad $\sqrt{v}$ ita 31250 scrup. ad $250\sqrt{v}$. Quo facto erit $250\sqrt{v}$ spatium in scrupulis expressum, siquidem altitudo v in talibus exhibeatur, quod celeritate $\sqrt{v}$ minuto secundo absolui potest, motu scilicet aequabili.

Exemplum I.

235. Delapsum sit corpus ex altitudine 1000 ped. erit in scrupulis $v=1000000$, quare ex hoc descensu tantam acquirit celeritatem, qua minuto secundo spatium 250000 scrup. i. e. 250 pedes absoluere posset.

Corollarium 5.

236. Et reciproce si celeritas per spatium, quod ea minuto secundo percurritur, exprimatur vt initio fecimus, reduci hinc ea poterit ad receptum nostrum modum per radices ex debitis altitudinibus. Sit enim spatium illud a scrup. et altitudo huic celeritati debita v scrup. erit $250\sqrt{v}=a$ atque $v=\frac{a^2}{62500}$ scrup.

Exem-

s quadratas ex untur, exprimere 15625 seu 125 31250 scrup.

ium assignare, v minuto sec. odem tempore $\sqrt{v}$ ita 31250 $50\sqrt{v}$ spatium tudo v in tali- inuto secundo li.

titudine 1000 quare ex hoc , qua minuto 50 pedes ab-

per spatium, , exprimatur erit ad recep- ebitis altitudi- p. et altitudo $\sqrt{v}=a$ atque

Exem-

Exemplum 2.

237. Habeat corpus tantam celeritatem qua minuto secundo spatium 1000 ped. seu 1000000 percurrere potest, erit altitudo huic celeritati debita $=\frac{1000000000000}{62500}$ scrup. seu 16000 pedes.

Scholion.

238. Perspicitur igitur, quomodo vtrumque celeritates exprimendi modum inuicem comparari, alterumque ad alterum reduci oporteat. Initio enim celeritates per spatia exprimebamus, quae minuto secundo seu alio dato tempore percurruntur. Postmodum vero celeritates per altitudines debitas exhibere magis congruum visum erat. Nunc vero monstratum, quomodo vterque exprimendi modus ad celeritates mensurandas accommodandus sit.

PROPOSITIO 29.

Problema.

239. *Potentia existente uniformi secundum rectam BP trahente habeat corpus in initio B iam celeritatem datam secundum eandem directionem BP, requiritur eius celeritas in quouis puncto P rectae BP.* Tab. II. Fig. II.

Solutio.

Sit vt ante potentia g, et corpus A. Celeritas vero, quam habet in initio B ponatur debita altitudini c. Vocetur $BP=x$, et celeritas in P, quam quaerimus, debita sit altitudini v. Erit vt ante (207) ob potentiam constantem g per elementum $Pp=dx$ sollicitantem $dv=\frac{g\,dx}{A}$. Integrando igitur

tur fit $v = \frac{gx}{A} +$ Conft. quae quantitas conftans ex eo eft determinanda, quod facto $x = o$, fiat $v = c$ (per hyp.) erit ergo Conft. $= c$. Confequenter habebimus $v = c + \frac{gx}{A}$, et ipfam celeritatem $\sqrt{v} = \sqrt{(c + \frac{gx}{A})}$. Q. E. I.

Corollarium I.

240. Ponatur vt fit in cafu grauitatis ordinariae $\frac{g}{A} = 1$, erit $v = c + x$. Altitudo igitur celeritati in P debita eft aggregatum altitudinis celeritati initiali in B debitae et fpatii percurfi.

Scholion.

241. Alia hic occurrit folutio problematis, poffumus enim motum per BP cum celeritate initiali $\sqrt{c}$ in B confiderari vt partem motus per lineam AP ex quiete, vt ante pofuimus factum, in quo corpus, cum ex A in B peruenerit, habeat celeritatem propofitam $\sqrt{c}$. Sit igitur hoc fpatium AB $= k$, erit $c = \frac{gk}{A}$ (206), et $v = \frac{g(k+x)}{A} = c + \frac{gx}{A}$, vt iam eft inuentum. Spatium autem AB erit $\frac{Ac}{g}$.

PROPOSITIO 30.

Problema.

242. *Iisdem quibus in praecedente propofitione pofitis, determinare tempus, quo fpatium BP percurritur.*

Solutio.

Sit tempus per fpatium BP $= t$, erit $dt = \frac{mdx}{\sqrt{(c + \frac{gx}{A})}}$ (218); eft enim celeritas, qua elementum Pp percurritur $\sqrt{(c + \frac{gx}{A})}$ vt in praecedente propofitione reperimus. Integrando igitur fiet $t = \frac{2mA}{g}\sqrt{(c + \frac{gx}{A})}$ + Conft. Conftans haec vero quantitas addenda ex hoc definietur, quod pofito $x = o$, fieri debeat $t = o$. Prodibit igitur Conft. $= -\frac{2mA}{g}\sqrt{c}$. Confequenter habetur $t = \frac{2mA}{g}\sqrt{(c + \frac{gx}{A})} - \frac{2mA}{g}\sqrt{c}$. Expreffis c et x in fcrupulis ped. Rhen. pofitoque $m = \frac{1}{250}$ (220), proueniet tempus in minutis fecundis expreffum. Q. E. I.

Corollarium.

243. Quia in noftris terreftribus regionibus eft $\frac{g}{A} = 1$, erit tempus quo fpatium BP cum celeritate in B initiali $\sqrt{c}$ abfoluitur $= \frac{1}{125}\sqrt{(c+x)} - \frac{1}{125}\sqrt{c}$ minut. fecund. fiquidem c et x in fcrupulis pedis Rhenani exprimantur.

Scholion.

244. Simili modo aliam huius problematis afferimus folutionem, quo praecedentis in fcholio annexo. Pofita enim recta AB $= k$, ex qua corpus A delabens in B adipifcitur celeritatem altitudini c debitam, erit tempus, quo hoc fpatium AB abfoluitur $= \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}$ et tempus, quo fpatium AP percurritur erit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}}$ (221). Tempus, quo hoc defcenfu fpatium BP abfoluitur erit $\frac{1}{125}\sqrt{\frac{A(k+x)}{g}} - \frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ak}{g}}$. Eft vero $k = \frac{Ac}{g}$ (241). Confequenter hoc tempus quaefitum per BP fiet $= \frac{A}{125g}\sqrt{(c + \frac{gx}{A})} - \frac{1}{125g}\sqrt{c}$, vt ante inuenimus, fi quidem ibi loco m ponatur $\frac{1}{250}$. Atque haec funt, quae de punctorum defcenfu rectilineo

neo in hypothesi potentiae vniformis exponenda erant. Pergo igitur ad ascensus rectilineos, in quibus celeritatis directio est directe contraria directioni potentiae, quam etiam nunc vniformem seu constantem ponam.

PROPOSITIO 31.

Problema.

Tab. II. Fig. 12. 245. *Potentia vniformi tendente deorsum, habeat corpus in* B *celeritatem datam sursus directum; requiritur eius celeritas in quouis puncto spatii* BA, *quod ascensu percurrit.*

Solutio.

Perspicuum est hoc casu corpus in linea recta esse progressurum motu retardato (191), quia eius directio motus directe est contraria potentiae sollicitantis directioni. Sit itaque celeritas in B debita altitudini c, et ponatur corpus iam peruenisse in P. Vocetur altitudo, cui celeritas hoc loco debetur, v, spatiumque ipsum iam percursum BP, x. Capiatur $Pp = dx$, erit in p altitudo celeritati debita $v+dv$. Quia autem potentia, quam pono $= g$, motui est contraria; tota in diminuendo motu consumitur. Quam ob rem dv aequale poni oportet ipsi $= \frac{gdx}{A}$ denotante A corporis massam. Cum itaque sit $-dv = \frac{gdx}{A}$; erit integrando $C - v = \frac{gx}{A}$. Ad constantem C definiendam ponatur $x = 0$, quo casu v in c transmutari debebit; eritque ideo $C = c$. Ex quo prodibit ista aequatio $c - v = \frac{gx}{A}$ seu $v = c - \frac{gx}{A}$, quae determinat ce-

cel exponenda
su c ∶os, in qui-
ria directio-
em seu con-
qua
ne
ind
se rsum, habeat
cit ctum; requi-
Co A, quod as-
ne
can
suu linea recta
, quia eius
itiae sollici-
BA B debita al-
qu enisse in P.
eni debetur, v,
ta Capiatur
ex bita $v+dv$.
motui est
les consumitur.
psi $= \frac{gdx}{A}$ de-
que sit $-dv$
nstantem C
de c transmu-
ler io prodibit
pr determinat
ae ce-

celeritatem corporis in quouis puncto spatii ascensu descripti. Q. E. I.

Corollarium 1.

246. Celeritas igitur corporis euanescet, quando fit $c = \frac{gx}{A}$, i. e. quando peruenit ad altitudinem $x = \frac{Ac}{g}$. Sit BA ista altitudo ideoque aequalis $\frac{Ac}{g}$, inde $c = \frac{BA.g}{A}$, ex quo intelligitur BA eam ipsam esse altitudinem, ex qua corpus A a potentia g sollicitatum descendendo acquirit celeritatem c (206). Corpus igitur ea celeritate, quam ex data altitudine delapsum est adeptum, sursum progrediens ad eam ipsam pertinget altitudinem, antequam motum suum amittit.

Corollarium 2.

247. Praeterea corpus ascendens per spatium BA in singulis punctis eas ipsas habet celeritates quas ibidem haberet, si ex A descendisset. Posita enim $AP = y$, erit celeritas in P descensu ex A nata $= \sqrt{\frac{gy}{A}}$; at est celeritas in eodem loco P ascensu ex B relicta $\sqrt{(c - \frac{gx}{A})}$. Quia autem est $x + y = BA = \frac{Ac}{g}$, patet has expressiones celeritatum esse aequales nempe $\frac{gy}{A} = c - \frac{gx}{A}$.

Corollarium 3.

248. Congruit igitur motus corporis ascendentis cum motu descendentis, atque vtriusque celeritates in iisdem locis, i. e. in iisdem a puncto supremo, quo celeritas euanescit, distantiis, erunt aequales.

Corollarium 4.

249. Ex his perſpicitur, tempus quoque aſcenſus per ſpatium BA aequale eſſe tempori deſcenſus per idem ſpatium; Quare cum dicto BA$=a$, tempus deſcenſus ſit $=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Aa}{g}}$ min. ſec. (221); eidem valori aequale eſſe debebit tempus aſcenſus per BA; ſeu poſito loco a eius valore $\frac{Ac}{g}$, erit tempus integri aſcenſus $=\frac{A}{125g}\sqrt{c}$.

Corollarium 5.

250. Simili modo tempus aſcenſus per quamuis portionem BP definietur, manente enim AP$=y$ erit tempus ſiue aſcenſus ſiue deſcenſus per AP $=\frac{1}{125}\sqrt{\frac{Ay}{g}}$, quod ablatum ab integro tempore aſcenſus $\frac{A}{125}\sqrt{c}$ relinquet tempus per portionem BP. Eſt vero $y=\frac{Ac}{g}-x$, quare tempus aſcenſus per BP habebitur $=\frac{A}{125g}\sqrt{c}-\frac{A}{125g}\sqrt{(c-\frac{gx}{A})}$.

Scholion 1.

251. Euidenter vero haec aequalitas aſcenſuum a priori oſtendi poteſt ex ipſa potentiarum actione. Cum enim in aſcenſu potentia tantum de celeritate auferat, quantum in deſcenſu ad eam addit, perſpicuum eſt perfectam aequalitatem inter vtrumque motum verſari debere, neque aliud eſſe diſcrimen, niſi temporis ordinem, qui cogitatione duntaxat inuerſus alterum caſum in alterum transformat. Similis vero eſt ratio etiam omnium motuum a potentiis abſolutis productorum: iisdem enim celeritatibus per eandem viam reuerti poterit cor-

quoque aſ- ri deſcen- to BA$=a$, 221); ei- cenſus per rit tempus per quam- uim AP$=y$ per AP ore aſcen- n BP. Eſt : BP habe- tas aſcen- tentiarum tantum de d eam ad- tem inter aliud eſſe ogitatione rum trans- nium mo- : iisdem rti poterit cor-

corpus, ſi quidem in reditu impreſſiones easdem, quas in itu, ſed contrarias patitur. Sic planetae in plagas contrarias circa ſolem eodem modo, quo nunc, in ellipſibus mouerentur, ſi initio motus ipſis fuiſſent his contrarii. Nam per idem ſpatii elementum effectus potentiae ad celeritatem immutandam idem eſt ſemper, atque ſit ratione corporis negatiuus, quando reuertitur. Effectus autem, qui ad directionem corporis immutandam impenditur, vtroque caſu manet, quo fit vt corpus in itu et reditu eandem percurrat ſemitam. Sed haec infra clarius patebunt, vbi de huius modi motibus ex inſtituto agetur. At vero, ſi adeſt reſiſtentia, haec inter aſcenſus et deſcenſus ſimilitudo euaneſcit: nam in vtroque caſu reſiſtentia motum corporis minuit, neque effectus eius in altero alterius eſt oppoſitus, quemadmodum vſu venit, ſi potentia ſollicitans eſt abſoluta.

Scholion 2.

252. Satis igitur expoſito motu rectilineo, qui a potentiis vniformibus oritur, pergendum eſt ad potentias difformes, quae aliis in locis alias exercent in corpora vires, atque exponendum, quomodo motus corporum, quatenus ſiunt in linea recta, ab iis varientur. Huiusmodi enim difformitati omnes potentiae, quas in mundo obſeruamus, ſunt obnoxiae, neque vlla potentia poteſt aſſignari, quae corpus, in quocunque loco ſit poſitum, aequaliter afficiat. Sic planetae, quo ſoli ſunt propiores, ve-

he-

hementius ad ſolem attrahuntur, et quo magis etiam corpus a ſuperficie terrae remouetur, minor in eo fit grauitas ſeu niſus deorſum. Simili haec fere accidunt modo, quo magnetem obſeruamus idem ferri fruſtum in minore diſtantia fortius, in maiore vero debilius attrahere. Quamcunque igitur potentiae diſtantiarum ſeu poſitionum corporis teneant rationem, leges eruemus, ſecundum quas motus corporis ſollicitati immutatur. Et primo quidem potentias poteſtati cuidam diſtantiarum corporis a puncto fixo proportionales contemplabimur.

DEFINITIO 16.

253. Centrum virium vocatur punctum illud fixum, ad quod corpora attrahuntur vi, quae pendet a diſtantia ab hoc puncto, ſeu quae eſt vt functio diſtantiae quaecunque.

Corollarium 1.

254. Datur igitur diſtantia ab hoc centro virium, in qua corpus poſitum tanta vi ad centrum trahitur quanta foret vis eius grauitatis, ſi in ſuperficie terrae verſaretur.

Corollarium 2.

255. Cognita ergo hac diſtantia, et lege attractionis ſcilicet functione diſtantiae, cui attractio eſt proportionalis; innoteſcet ratio, quem habet corporis vbicunque poſiti conatus accedendi ad centrum virium, ad eiusdem corporis vim grauitatis, ſi eſſet in terrae ſuperficie.

Co-

magis etiam
minor in eo
haec fere ac-
va uamus idem
hu us, in maio-
et que igitur po-
corporis te-
cundum quas
. Et primo
un diſtantiarum
co s contempla-
punctum illud
vi, quae pen-
eſt vt functio
hoc centro vi-
d centrum tra-
ſi in ſuperficie
a, et lege at-
cui attractio
, quem habet
dendi ad cen-
im grauitatis,
Co-

Corollarium 3.

256. Cum itaque hoc modo vires vtcunque variabiles cum vi grauitatis comparare liceat, quia huius in corpora effectus eſt cognitus; cuiuscunque etiam vis in corpora effectus poterit determinari.

Scholion 1.

257. Pono hic attractionem centrorum virium ſimilem vi grauitatis, ita vt quoque diuerſorum corporum in eadem diſtantia poſitorum conatus ad centrum ſint vt maſſae ipſorum, ideoque vires acceleratrices omnium aequales (212). In his igitur pertractandis maſſam corporis moti non opus eſt in computum vocare, ſed vim acceleratricem duntaxat, quae conatui accedendi ad centrum diuiſo per maſſam eſt proportionalis. Comparabitur ea autem cum vi grauitatis acceleratrice, quam ponimus $=1$, atque ad hanc vnitatem reuocabimus omnes vires potentiarum acceleratrices, quippe quantitates homogeneas.

Corollarium 4.

258. Quando itaque dicemus vires eſſe diſtantiis a centro virium ſeu cuidam functioni earum proportionales, id non de ſolis niſibus, quos corpora habent ad centrum, ſed de viribus acceleratricibus, i. e. de niſibus ad maſſas corporum applicatis intelligi debebit.

Corollarium 5.

259. Quoniam igitur potentiae directio, qua corpus vrgetur, ſemper tendit ad centrum virium;

 perſpicuum eſt, ſi corpus vel quieſcit, vel motum habet, cuius directio per centrum virium tranſit, tum corpus in hac linea recta per centrum virium tranſeunte perpetuo moueri debere. (189).

DEFINITIO 17.

260. Potentia, quae corpora ad huiusmodi virium centrum vrget, vocatur vis centripeta. Haecque, ſi ſit negatiua, vt corpora ab hoc centro repellat, vocatur vis centrifuga.

Corollarium 1.

261. Cum hic de motu ſit quaeſtio, vis centripeta nobis erit vis acceleratrix ſeu conatus corporis ad centrum tendentis diuiſus per corporis maſſam.

Corollarium 2.

262. Conatus igitur ſeu niſus, quem habet corpus ad centrum virium, exprimitur vi centripeta in corporis maſſam ducta. Quamobrem erit ad pondus eiusdem corporis, ſi in ſuperficie terrae eſſet poſitum, vt vis centripeta ſeu vis acceleratrix ad vnitatem. (257.)

Scholion.

263. *Neutonus*, qui voce vis centripetae potiſſimum vtitur, triplici modo eandem menſurari poſſe animaduertit. Primo quantitate eius abſoluta, qua efficaciam ipſius centri virium metitur, ſine reſpectu habito ad corpora attracta; ſic dicit in maiore magnete maiorem ineſſe vis centripetae quantitatem

l motum ha-
tranſit, tum
virium tran-
d huiusmodi
centripeta.
b hoc centro
aeſtio, vis
ſeu conatus
per corporis
quem habet
vi centripeta
em erit ad
ie terrae eſ-
celeratrix ad
tripetae po-
m menſurari
eius abſoluta,
ur, ſine re-
icit in maio-
tae quantita-
tem

tem abſolutam, in minore minorem. Et ſimili modo ſecundum eius theoriam in ſole quantitas abſoluta maior eſt quam in terra. Haec comparatio autem intelligenda eſt de centris virium ſimiliter i. e. ſecundum eandem diſtantiae functionem attrahentibus, in diſſimilibus enim huiusmodi comparatio locum non habet. Haec ergo quantitas abſoluta menſuranda eſt ex conatu, quem datum corpus in data diſtantia habet verſus virium centrum. Loco huius autem conſiderationis hic adhibeo diſtantiam in qua corpus poſitum vi aequali ponderi eius nititur ad centrum (254). Secundo habet vis centripetae quantitatem accelerantem, quae apud ipſum eodem accipitur ſenſu, quo hic ipſa vis centripeta (261), menſuratur enim conatu ad maſſam applicato. Tertio inducit vis centripetae quantitatem motricem qua nihil aliud denotat niſi ipſum conatum, quem corpora habent ad centrum virium accedendi; quantitas motus enim, quam menſurare ſoliti ſunt celeritate ducta in maſſam, quaeque dato tempore generatur, proportionalis eſt ipſi conatui. Poſito namque conatu hoc p, maſſa A, eſt celeritatis incrementum dato tempuſculo vt $\frac{p}{A}$ (154), quod ductum in maſſam A dat incrementum quantitatis motus, quod itaque ipſi p erit proportionale.

PROPOSITIO 32.

Problema.

264. *Sit centrum virium* C, *quod attrahat ad ſe in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum; ad* Tab. II. Fig. 13.

boc-

hocque trahatur corpus in A *quiescens: quaeritur eius celeritas in quouis puncto spatii* AC.

Solutio.

Sit AC$=a$; AP$=x$; et celeritas quam in P habebit sit debita altitudini v. Fiat attractio in ratione n cuplicata distantiarum, et designet f eam distantiam a C, in qua corporis conatus ad C aequalis est ponderi corporis, si esset in terrae superficie positum. Vis igitur acceleratrix, qua corpus in P vrgetur ad C erit ad vim grauitatis, quam pono $=1$, vt CP^n i. e. vt $(a-x)^n$ ad f^n; quamobrem ea exprimetur per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$. Sumto ergo P$p=dx$, erit $dv = \frac{(a-x)^n dx}{f^n}$. Est enim dv aequale dx multiplicato per vim acceleratricem (213). Integrata hac aequatione prodibit $v = C - \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ad constantem C definiendam ponatur $x=0$, quo casu fieri debet per hypothesin $v=0$, fiet ergo $C = \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Habebitur ergo $v = \frac{a^{n+1}-(a-x)^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Seu posito $a-x$ $=$BP$=y$; erit $v = \frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua aequatione celeritas corporis in quouis loco spatii AC cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

265. Si $n+1$ est numerus positiuus, euanescet y^{n+1} facto $y=0$. Hoc igitur casu altitudo celeritati, quam corpus in C perueniens habebit debita erit $= \frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$. At si $n+1$ est numerus negatiuus, fiet y^{n+1}, facto $y=0$, infinite magnum: hoc ergo casu corporis in C peruenientis celeritas erit infinite magna.

ritati, quam erit $= \frac{a^{n+1}}{(n+1}$ uus, fiet y^{n+1} ergo casu co infinite mag
266. S aequatione v ratorem et d obrem hunc oportebit rep gralis est $v=C$ quocirca prod ipsius v quand tripeta est rec
267. H pus perueneri finite magna; gradus est infir tumuis enim to celeritas in
268. C matiuus, quia $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, eru
L ...aeritur eius ...iam in P ha- ...tio in ratio- ...cam distan- ...aequalis est ...erficie posi- ...pus in P vr- ...i pono $=1$, ...n ea expri- ...dx, erit dv ...tiplicato per ...hac aequati- ...onstantem C ...eri debet per ...f^n. Habe- ...posito $a-x$ ...ia aequatione ...i AC cognos- ...iuus, euanes- ...altitudo cele- ...rita-

Corollarium 2.

266. Sed si est $n+1=0$ seu $n=-1$, ex inuenta aequatione valor ipsius v non cognoscitur ob numeratorem et denominatorem euanescentes. Quamobrem hunc casum ex ipsa aequatione differentiali oportebit repetere. Erit autem $dv = \frac{f\,dx}{a-x}$, cuius integralis est $v = C - fl(a-x)$. Debebit autem esse $C = fla$, quocirca prodibit $v = fl\frac{a}{a-x} = fl\frac{a}{y}$. Qui est verus valor ipsius v quando habetur $n=-1$, i. e. quando vis centripeta est reciproce vt distantia a centro virium.

Corollarium 3.

267. Hoc igitur casu, quo $n=-1$, cum corpus peruenerit in centrum C, celeritas eius erit infinite magna; fit enim $v = fl\infty$. Qui infinitorum gradus est infimus et quasi proximus finito; quantumuis enim parum $n+1$ cyphram excedat, subito celeritas in C fit finita.

Corollarium 4.

268. Cum autem fuerit $n+1$ numerus affirmatiuus, quia tum altitudo celeritatis in c debita est $\frac{a^{n+1}}{(n+1)f^n}$, erunt ipsae celeritates plurium corporum

ad centrum C delabentium, quas in C habebunt, vt $a^{\frac{n+1}{2}}$ i. e. in ratione $\frac{n+1}{2}$ plicata diſtantiarum ex quibus lapſum inchoauerunt.

Scholion I.

269. Poſtquam autem corpus ex A in C peruenit, quo tum promoueatur, non tam facile poteſt definiri. Videtur quidem, ſi in expreſſione inuenta y ponatur negatiuum, proditura eſſe altitudo celeritati in Q debita, quae ſi eſt affirmatiua, corpus reuera in Q perueniet; ſin vero ſit negatiua, indicio hoc eſt corpus nunquam vltra C in plagam CQ eſſe peruenturum. Verum hic motum proſequendi modus non ſemper adhiberi poteſt; ſaepe enim ipſi hypotheſi, qua ponitur vis attractiua cis et vltra C verſus centrum eadem, eſt contrarius. Namque corpus in P exiſtens, quia trahitur deorſum, cum in Q peruenerit, ſurſum vrgebitur aequali vi, ſi eſt CQ=CP. Hanc ob rem vis, qua corpus in Q ſollicitatur, fit negatiua ratione prioris, atque idcirco quantitate negatiua eſt exprimenda. Vis igitur in P per $\frac{(a-x)^n}{f^n}$ ſeu $\frac{y^n}{f^n}$ expreſſa ſui fieri debet negatiua, cum $-y$ ponitur loco y, id quod nunquam euenit, niſi ſit n vel numerus impar vel fractio, cuius numerator et denominator ſunt numeri impares. His igitur in caſibus prodibit verus valor ipſius v, cum corpus in Q peruenerit; in reliquis ſemper, quia in calculo vis ſollicitans corpus in Q cum vero eius valore non congruit, veritati non conſentanea lit-

litterae v quantitas elicitur. Si enim eſt n numerus par vis attrahens in Q facto n negatiuo aequalis erit vi in P et tendet in eandem plagam deorſum ſcilicet; Ex quo fit, vt corpus transgreſſum centrum C in recta CQ in infinitum deberet deſcendere, id quod etiam calculus declarat. Quod cum pugnet cum hypotheſi perſpicuum eſt his caſibus motum corporis, poſtquam in C peruenit, ex inuenta formula definiri non poſſe. Abſurdum autem magis elucet quando eſt $n=\frac{1}{2}$ vel alia huiusmodi fractio, quae y^n transmutat in quantitatem imaginariam, poſito $-y$ loco y; id quod indicaret corpus vltra C progreſſum nonſolum non ad C attrahi, ſed vim attrahentem etiam fieri imaginariam, quod quid ſit nequidem intelligi poteſt.

Corollarium 5.

270. Si igitur n eſt numerus impar, valor ipſius v, qui eſt $\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ non mutatur poſito $-y$ loco $+y$, quia $n+1$ exponens ipſius y euadit numerus par. Ex quo apparet celeritatem corporis in Q aequalem fore ei, quam habet in P, ſi quidem eſt CQ=CP. Pari ergo modo corpus in directione CQ recedit, qua ante per AC acceſſerat; pertingetque in B vsque, ita vt ſit AB=AC, vbi celeritatem ſuam perdet omnem. Reuertetur itaque ſimili modo ad C, et tum rurſus in A perueniet. Quos motus reciprocos, niſi adeſt reſiſtentia, perpetuo perficiet.

 Co-

Corollarium 6.

271. Excipiendus eſt tamen caſus, quo $n = -1$, quanquam -1 eſt numerus impar. Facto enim y negatiuo fit $v = \int l \frac{a}{y}$, quae eſt quantitas imaginaria. Ex quo perſpicitur corpus nunquam vltra C eſſe transgreſſurum. Aliud ergo iudicium ferendum eſſe videtur, quando n eſt numerus negatiuus, etiamſi impar. Huiusmodi enim ſimile exemplum infra occurret ſi $n = -3$. (335).

Scholion 2.

272. Hoc quidem veritati minus videtur conſentaneum; vix enim apparet ratio, cur corpus celeritate ſua infinite magna, quam in C acquiſiuit, in aliam potius plagam, quam in CB, ſit progreſſurum; praeſertim cum huius celeritatis infinitae directio ſit ſecundum hanc plagam. Quicquid autem ſit hic calculo potius, quam noſtro iudicio eſt fidendum, atque ſtatuendum, nos ſaltum, ſi fit ex infinito in finitum, penitus non comprehendere. Eo autem magis in hac ſententia confirmamur ſimili exemplo, quod infra plene explanatum occurret, (655) ſi eſt $n = -2$; hoc enim caſu corporis in C peruenientis celeritas quoque eſt infinita, et ſecundum CB directa, nihilo vero minus corpus non vltra C progreditur, ſed ſubito ex C verſus A reuertitur pariter ac acceſſerat. Ex quo perſpicitur, quoties celeritas in C exiſtat infinita, iudicium de vlteriori corporis motu eſſe ſuſpendendum. Tam diu autem hoc tantum fiat, quoad ad motus curuilineos perueniamus; ex iisque enim qui ſint rectilinei, euidentius colligetur (762). Neque enim calculus, qui tum inſtituetur, obnoxius eſt huic incommodo, vt a hypotheſi diſſentiat; ſed quaqua verſus vis centripeta aequalis ponetur non refragante calculo.

Scholion 3.

273. Semper autem, quando celeritas in C non eſt infinite magna, id quod accidit, quoties eſt $n+1$ numerus affirmatiuus, motum corporis integrum iudicio noſtro poterimus cognoſcere, etiamſi calculus ſit inſufficiens. Si enim celeritas in C eſt finita, habensque directionem ſecundum CB, quam neceſſario habere debebit; fieri non poteſt, vt non in CB motum continuet. Simili autem modo hunc motum continuans a C recedet, quo ante in AC acceſſerat, atque in puncto quocunque Q eandem habebit celeritatem, quam ante in P puncto aeque diſſito a C habebat; ſicut ex (251) intelligi poteſt. Perpetuo igitur motus reciprocos ex A in B et viciſſim rediens corpus perficiet.

PROPOSITIO 33.

Problema.

274. *Centro C attrahente in ratione quacunque multiplicata diſtantiarum, habeat corpus in D iam celeritatem datam; Requiritur punctum A in recta CD producta, ex quo corpus deſcenſum ad C inchoans cum in D peruenerit, hanc ipſam acquirat celeritatem.* Tab. II. Fig. 34.

 So-

Solutio.

Denotante vt supra n exponentem rationis multiplicatae in qua fit vis centripeta, et f distantiam in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis; sit $CD=b$, celeritas in D debita altitudini b, et quaesita distantia CA ponatur $=q$. Cum igitur hic q idem denotet quod supra a, et b idem quod y, et b idem quod ibi v, habebitur ista aequatio $b=\frac{q^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Ex qua fit $q^{n+1}=b^{n+1}+(n+1)bf^n$, atque $q=(b^{n+1}+(n+1)bf^n)^{\frac{1}{n+1}}$. Particulari autem casu quo $n=-1$ habebitur $b=fl\frac{q}{b}$, hincque $q=e^{\frac{b}{f}}b$, vbi e est numerus cuius logarithmus est vnitas. Q. E. I.

Corollarium 1.

275. Si vis centripeta est directe vt distantia sit $n=1$, eritque $q=\sqrt{(b^2+2fb)}$. Quae quantitas semper est finita, si modo b, f et b sunt tales. Simile euenit semper dummodo $n+1$ est numerus affirmatiuus. Atque etiam in casu $n=-1$, distantia q nunquam fit infinita.

Corollarium 2.

276. Sit autem $n+1$ numerus negatiuus puta $-m$, vt sit $n=-m-1$, erit $q=b\sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1}-mb^m b}}$ quae altitudo toties est infinita, quoties est $b=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$, et, si b est quantitas adhuc maior, fit q ne-

tem rationis et f distanti- grauitatis; udini b, et igitur hic q d y, et b idem $\frac{q^{n+1}-b^{n+1}}{(n+1)f^n}$. atque $q=$ autem casu $q=e^{\frac{b}{f}}b$, vbi as. Q. E. I. vt distantia ae quantitas t tales. Si- numerus af- , distantia q negatiuus pu- $\sqrt[m]{\frac{f^{m+1}}{f^{m+1}-mb^m b}}$ ties est $b=$ ior, fit q ne- ga-

gatiua, seu potius infinito maior, vel etiam imaginaria. Ex quo intelligitur his casibus, ne ex infinita quidem distantia corpus delapsum tantam in D acquirere posse celeritatem.

Corollarium 3.

277. Manente $n+1$ numero negatiuo $-m$, et distante puncto A in infinitum; erit $b=\frac{f^{m+1}}{mb^m}$. Atque distantia a centro C, in qua corpus, ex spatio infinito delapsum, celeritatem habet $\sqrt{b}$, erit $=f\sqrt[m]{\frac{f}{mb}}$.

Corollarium 4.

278. Si vis centripeta reciproce proportionalis est distantiarum quadratis, erit $m=1$. Quapropter fit $q=\frac{bf^2}{f^2-bb}$. Quando ergo est $b=\frac{f^2}{b}$, distantia AC i. e. q fit infinite magna.

Corollarium 5.

279. Si hoc problema cum praecedente coniungatur, facile determinabitur motus corporis, quod ex D descensum ad C inchoat celeritate $\sqrt{b}$: Ex praecedente enim innotescit descensus corporis ex A factus, cuius cum sit descensus ex D celeritate $\sqrt{b}$ inceptus pars, vocetur $CP=y$, et celeritas quam corpus in P habet, debita sit altitudini v, erit $v=\frac{q^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$ (266). Est autem $q^{n+1}=b^{n+1}+$

(n+1)

$(n+1)bf^n$. Vnde fit $v = \frac{b^{n+1}+(n+1)bf^n - y^{n+1}}{(n+1)f^n}$
$= \frac{b^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n} + b$.

Corollarium 6.

280. Expressio haec ipsius v, quando descensus ex D incipitur celeritate altitudini b debita, non differt ab ea, quae prodit, si descensus ex quiete fieret, nisi hoc, quod sit hac ipsa quantitate b vbique maior.

Scholion.

Tab. II. Fig. 13. 281. Quod ad tempora attinet quibus in quauis hypothesi vis centripetae spatium AC eiusque partes absoluuntur, ea facile ex cognitis celeritatibus cognoscentur. Pro generali quidem valore litterae n tempus non potest in terminis finitis exhiberi, quippe tempus per AP inuenitur $= \int \frac{dx\sqrt{(n+1)f^n}}{\sqrt{(a^{n+1}-(a-x)^{n+1})}}$ quae quantitas vniuersaliter neque integrari neque ad cognitarum curuarum quadraturas potest reduci. Attamen in variis ipsius n casibus [illegible] concinne exprimi potest, quamobrem missis generalibus praecipuos casus speciales sequentibus propositionibus sumus complexuri.

PROPOSITIO 34.
Problema.

Tab. II. Fig. 15. 282. *Si fuerit vis centripeta distantiis a centro C proportionalis, et corpus ex A in C vsque delabatur; determinari oporteat tempus, quo corpus quamque huius spatii partem absoluat.*

$-1\ bf^n - y^{n+1}$ $-1)f^n$ quando desdini b debita, entius ex quiia quantitate uibus in qua- AC eiusque celeritatibus ore litterae n hiberi, quip- $(n+1)f^n$ $-(a-x)^{n+1})$ rari neque ad otest reduci. concinne exalibus praecisitionibus su- ntiis a centro vsque delabatur;

Solutio.

Positis AC$=a$, et distantia a centro C in qua vis centripeta aequalis est vi grauitatis $=f$, sit spatii quaeuis portio CP$=y$, et celeritas in P debita altitudini v. Erit ergo tempus, quo spatium CP absoluitur $\int \frac{dy}{\sqrt{v}}$, negligo hic fractionem $\frac{1}{250}$, quia haec tempori in minutis secundis cognoscendo inseruit, et cum libuerit, potest adiungi. Est vero ex prop. 32 facto $n=1$, $v = \frac{a^2-y^2}{2f}$, ergo $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2f}}$. Ex quo fit tempus per PC$= \int \frac{dy\sqrt{2f}}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \frac{\sqrt{2f}}{a}\int \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Super AC construatur circuli quadrans AME, in eoque ducantur applicatae CE, PM. Quo facto erit, vt constat, arcus EM$= \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Quamobrem tempus per PC fiet $= \frac{EM.\sqrt{2f}}{a}$. Tempus igitur totius descensus per AC erit $= \frac{AME.\sqrt{2f}}{a}$. Hinc erit tempus descensus per AP$= \frac{AM.\sqrt{2f}}{a}$. Ex his igitur tempus descensus per quamuis spatii percursi portionem innotescit, idque in minutis secundis, si hae expressiones per 250 diuidantur, et longitudo f in partibus millesimis pedis Rhenani exhibeatur. Q. E. I.

Corollarium I.

283. Denotet $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $2AME : a = \pi : 1$, et $\frac{AME}{a} = \frac{\pi}{2}$. Hanc ob rem erit tempus descensus per AC$= \frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$. Id

Id quod non pendet ab altitudine lapſu percurſa a, ſed quantacunque haec ſit, eundem valorem retinet. Omnia igitur corpora, quae ad hoc centrum delabuntur aequalibus temporibus eo peruenient.

Scholion.

284. Sequitur haec temporum aequalitas ex ipſa celeritatis expreſſione $\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{\sqrt{2y}}$ in qua a et y vnam dimenſionem habere cenſenda ſunt. Quoties enim hoc euenit tempora, quibus quaecunque ſpatia a percurruntur, debebunt inter ſe eſſe aequalia. (46.)

Corollarium 2.

285. Si praeterea aliud ſit huiusmodi centrum virium, ſed diuerſa praeditum efficacia, ita vt diſtantia, in qua centripeta vis aequalis eſt grauitati, ſit F, erunt tempora deſcenſum ad vtrumque centrum inter ſe vt $\sqrt{f}$ ad $\sqrt{F}$. Sed efficaciae ipſae hoc caſu tenent inuerſam rationem diſtantiarum $f : F$, ſunt enim vt vires, quas haec centra exercent in aequalibus diſtantiis. Quapropter tempora deſcenſuum ad diuerſa huiusmodi virium centra ſunt in ratione reciproca ſubduplicata efficaciarum. Quae quidem ratio in omnibus ſimilibus centris virium locum tenet, ſi ſpatia percurſa ſunt inter ſe aequalia, vt in ſequenti docebitur.

PROPOSITIO 35.

Problema.

Tab. III. Fig. 1.

286. *Si fuerit vis centripeta quadratis diſtantiarum a centro* C *reciproce proportionalis, et corpus ex* A *in* C *vsque delabatur: inueniendum eſt tempus, quo corpus quamuis huius ſpatii* AC *portionem percurrat.*

Solutio.

Manente $AC = a$, et diſtantia in qua vis centripeta grauitati aequalis eſt f; ſit $CP = y$, et celeritas in P debita altitudini v. Erit ergo ob $n = -2$, ex prop. 32, $v = f^2\left(\frac{a-y}{ay}\right)$ et $\sqrt{v} = f\sqrt{\frac{a-y}{ay}}$. Elementum igitur temporis $\frac{dy}{\sqrt{v}}$ fit $= \frac{dy\sqrt{ay}}{f\sqrt{(a-y)}} = \frac{\sqrt{a}}{f} \cdot \frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Conſequenter tempus per PC eſt $\frac{\sqrt{a}}{f}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Eſt vero $\int\frac{y\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}} = -\sqrt{(ay-y^2)} + \int\frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$. Quare deſcripto ſuper AC ſemicirculo AMC ductaque ordinata PM erit $CM = \int\frac{\frac{1}{2}a\,dy}{\sqrt{(ay-y^2)}}$ et $PM = \sqrt{(ay-y^2)}$. Propterea prodibit tempus per $CP = \frac{\sqrt{a}}{f}(CM - PM)$, atque ex hoc tempus totius deſcenſus per $AC = \frac{AMC.\sqrt{a}}{f}$. Tempus ergo, quo portio AP abſoluitur, eſt $\frac{\sqrt{a}}{f}(AM + PM)$. Q. E. I.

Corollarium I.

287. Denotante igitur $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam, erit $AMC = \frac{1}{2}a\pi$. Ideoque erit tempus deſcenſus per $AC = \frac{\pi a\sqrt{a}}{2f}$. Ex quo intelligitur plurium corporum ad C delabentium tempora deſcenſuum eſſe in ſesquiplicata ratione diſtantiarum.

Corollarium 2.

288. Atque ad diuerſa huiusmodi centra virium corpora accedent temporibus, quae ſint in ratione compoſita ex directa ſeſquiplicata diſtantiarum et inuerſa ſubduplicata efficaciarum. Eſt enim efficacia directe vt diſtantiae f quadratum.

Scholion.

289. Si ſit vis centripeta reciproce vt cubus diſtantiae, prodit $n = -3$ et $v = \frac{f^3}{2}\left(\frac{a^2 - y^2}{a^2 y^2}\right)$. Eſt igitur $\sqrt{v} = \frac{f}{ay}\sqrt{f\frac{(a^2-y^2)}{2}}$, et tempus per CP $= \frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}(a - \sqrt{(a^2-y^2)})$. In circuli autem quadrante eſt PM $= \sqrt{(a^2-y^2)}$; tempus ergo, quo CP abſoluitur et $= \frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}(\mathrm{AC} - \mathrm{PM})$, et tempus, quo totum ſpatium AC percurritur eſt $\frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ AC ſeu $\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. Conſequenter tempus, quo portio AP percurritur erit $= \frac{\mathrm{AC}.\mathrm{PM}\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$. In hoc igitur caſu tempus algebraice poteſt exhiberi, id quod etiam fit in hiſce caſibus quibus n eſt terminus huius ſeriei $-\frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, -\frac{9}{7}, -\frac{11}{9}$, etc. Quae autem ſint ipſa tempora ſaltem integra deſcenſuum per AC ſumus inueſtigaturi.

PROPOSITIO 36.

Problema.

290. *Determinare tempus deſcenſus per AC ad centrum virium C, ſi vis centripeta proportionalis*

lis ej … ponen … mutiu … di centra vi- … uae ſint in ra- … ata diſtantia- … m. Eſt enim … um.
pra, … roce vt cubus
2m— … 2 …). Eſt igitur
V— … ſ ydy … aV2 … 1Vf
(2 … uadrante eſt
gral … CP abſoluitur
Quc … otum ſpatium
des … Conſequenter
et … rit = AC.PMV2 / fVf.
… poteſt exhi-
… s quibus n eſt
qui … , etc. Quae
… a deſcenſuum
Ad
z=
(b-
b^m
b^m … ſus per AC … proportiona- … lis

lis eſt reciproce huic diſtantiarum dignitati cuius exponens eſt $\frac{2m+1}{2m-1}$ denotante m *numerum integrum affirmatiuum.*

Solutio.

Retinentibus a, f, y et v eosdem, quos ſupra, valores erit $n = \frac{-2m-1}{2m-1}$. Quo circa fit $v = \frac{2m-1}{2} f^{\frac{2m+1}{2m-1}}\left(\frac{a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}}}{a^{\frac{2}{2m-1}} y^{\frac{2}{2m-1}}}\right)$, adeoque $\int\frac{dy}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{2a^{\frac{2}{2m-1}}}{(2m-1)f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}}\int\frac{y^{\frac{1}{2m-1}}\,dy}{\sqrt{(a^{\frac{2}{2m-1}} - y^{\frac{2}{2m-1}})}}$, quod integrale ita debet accipi, vt euaneſcat poſito $y = 0$. Quo facto ſi ponatur $y = a$, prodibit tempus totius deſcenſus per AC quaeſitum. Ponatur $y^{\frac{2}{2m-1}} = z$, et $a^{\frac{2}{2m-1}} = b$, erit $y^{\frac{1}{2m-1}} = \sqrt{z}$ et $dy = \frac{2m-1}{2} z^{\frac{2m-3}{2}}\,dz$, quibus ſubſtitutis fiet $\int\frac{dy}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{(2m-1)a^{\frac{2}{2m-1}}}{2f^{\frac{2m+1}{2m-1}}}}\int\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{(b-z)}}$.

Ad $\int\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{(b-z)}}$, inueniendum pono $b - z = u^2$, erit $z = b - u^2$ et $dz = -2u\,du$, ideoque $\frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{(b-z)}} = -2\,du\,(b-u^2)^{m-1} = -2\,du\left(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1} b^{m-2}u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2} b^{m-3}u^4 - \text{etc.}\right)$ cuius integrale eſt $C - 2u\left(b^{m-1} - \frac{(m-1)}{1.3} b^{m-2}u^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 5} b^{m-3}u^4 - \text{etc.}\right)$, quae quantitas

titas cum debeat euanescere facto y seu $z=0$, i. e. $u^2=b$, erit $C=2b^{m-\frac{1}{2}}(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\text{etc.})$ Quia autem integrum tempus prouenit facto $y=a$ seu $z=b$, i. e. $u=0$, remanebit pro integrali ipsius $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$ sola quantitas C, quae loco $b^{m-\frac{1}{2}}$ restituto a est $=2a(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc.). Totum ergo descensus tempus per AC aequabitur facto ex $\frac{a^{\frac{2m}{2m-1}}}{f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$ in hanc seriem $1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc. quae toties abrumpitur, quoties m est numerus integer affirmatiuus. His igitur in casibus tempus algebraice potest exhiberi. Q. E. I.

Corollarium 1.

291. Sit $m=1$, quo casu est $n=-3$, erit series $=1$; tempus ergo descensus per AC prodibit $=\frac{a^2}{f^2}\sqrt{2f}=\frac{a^2\sqrt{2}}{f\sqrt{f}}$ vt supra (289) est inuentum.

Corollarium 2.

292. Si sit $m=2$, quo casu fit $n=\frac{-5}{3}$, erit seriei valor $=\frac{2}{3}$, atque tempus totius descensus $=\frac{2}{3}$. $\frac{a^{\frac{4}{3}}}{f^{\frac{4}{3}}}\sqrt{6f}$. Sin est $m=3$, erit $n=\frac{-7}{5}$, et series $=\frac{2.4}{3.5}$ tempusque $\frac{2.4\,a^{\frac{6}{5}}}{3.5.f^{\frac{6}{5}}}\sqrt{10f}$. Simili modo si est $m=4$, fit $n=\frac{-9}{7}$, atque tempus prodibit $=\frac{2.4.6.a^{\frac{8}{7}}}{3.5.7.f^{\frac{8}{7}}}\sqrt{14f}$.

Corollarium 3.

293. Colligitur ex his seriei valor generalis $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots(2m-2)}{3.5.7.\ldots\ldots(2m-1)}$. Generatim igitur tempus descensus erit $=\frac{2.4.6.\ldots\ldots(2m-2).a^{\frac{2m}{2m-1}}}{3.5.7.\ldots\ldots(2m-1)f^{\frac{2m}{2m-1}}}\sqrt{2(2m-1)f}$. Si quidem est $n=\frac{-2m-1}{2m-1}$ seu $m=\frac{n-1}{2n+2}$.

Corollarium 4.

294. Successiue ergo loco m positis valoribus 1, 2, 3, 4, etc. seriei valores sequentem constituent progressionem $1, \frac{2}{3}, \frac{2.4}{3.5}, \frac{2.4.6}{3.5.7}$, etc. in qua concessa circuli quadratura, termini intermedii possunt exhiberi. Si enim est $m=\frac{1}{2}$ terminus respondens inuenitur $\frac{\pi}{2}$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam; si $m=\frac{3}{2}$, erit respondens terminus $\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}$, et ita porro si m denotet $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ etc. prouenient hi termini $\frac{1.3.\pi}{2.4.2}, \frac{1.3.5.\pi}{2.4.6.2}, \frac{1.3.5.7.\pi}{2.4.6.8.2}$, etc.

Corollarium 5.

295. Innotescit ergo etiam in his casibus tempus descensus per AC. Nam si est $m=\frac{1}{2}$ fit $n=-\infty$, quo casu tempus semper est infinite paruum. Sit

Sit ergo $m=\frac{3}{2}$, fiet $n=-2$, et tempus descensus $=\frac{1.\pi}{2.2}.\frac{a^{\frac{3}{2}}}{f^{\frac{3}{2}}}\sqrt{4f}=\frac{\pi.a\sqrt{a}}{2.f}$ prorsus vt iam inuenimus (287). Sit $m=\frac{5}{2}$, erit $n=-\frac{3}{2}$ et tempus descensus $=\frac{1.3\pi a^{\frac{5}{4}}}{2.4 f^{\frac{5}{4}}}\sqrt{2f}$. Atque si $m=\frac{7}{2}$, fit $n=-\frac{4}{3}$ et tempus descensus $=\frac{1.3.5\,\pi a^{\frac{7}{6}}}{2.4.6\, f^{\frac{7}{6}}}\sqrt{3f}$.

Corollarium 6.

296. Generaliter igitur si fuerit $m=\frac{2k+1}{2}$, quo casu fit $n=\frac{-k-1}{k}$, erit tempus descensus $=$
$$\frac{1.3.5\ldots\ldots(2k-1)}{2.4.6\ldots\ldots\;2k}.\frac{\pi a^{\frac{2k+1}{2k}}}{f^{\frac{2k+1}{2k}}}\sqrt{kf}.$$

PROPOSITIO 37.
Problema.

297. *Determinare tempus descensus per* AC *ad virium centrum* C, *si vis centripeta proportionalis est reciproce huic distantiarum dignitati, cuius exponens est* $\frac{m-1}{m}$, *denotante* m *numerum quemcunque integrum affirmatiuum.*

So-

pus descensus
m inuenimus
pus descensus
$=n$ $=-\frac{4}{3}$ et tem-
quo
ipsi
et y
PC
eod rit $m=\frac{2k+1}{2}$,
$2b$ descensus $=$
Qua
posi
duc
teg
tem
sus per AC ad
proportionalis est
uius exponens
cen nque integrum
Ser
$=2$
neg So-

Solutio.

Est itaque $n=\frac{1-m}{m}$, et propterea $v=\frac{a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{m}f^{\frac{1-m}{m}}}$ $=mf^{\frac{m-1}{m}}(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})$. Elementum igitur temporis, quod est $\frac{dy}{\sqrt{v}}$, erit $=dy:\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})}$, et tempus ipsum per PC$=\frac{1}{\sqrt{mf^{\frac{m-1}{m}}}}\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{\frac{1}{m}}-y^{\frac{1}{m}})}}$. Ponatur $a^{\frac{1}{m}}=b$ et $y^{\frac{1}{m}}=z$; erit $dy=mz^{m-1}dz$, fit igitur tempus per PC$=\sqrt{mf^{\frac{1-m}{m}}}\int\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$. At integrale ipsius $\frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{(b-z)}}$ eodem modo, quo in praecedente prop. sumtum, est $2b^{\frac{2m-1}{2}}(1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.7}+$ etc.). Quamobrem integrum tempus descensus per AC posito $a^{\frac{2m-1}{2m}}$ loco $b^{\frac{2m-1}{2}}$ erit $=2\sqrt{ma^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}}$ ducto in hanc seriem $1-\frac{(m-1)}{1.3}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.5}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.7}+$ etc. Quoties igitur m est numerus integer affirmatiuus, toties series abrumpitur, ita vt tempus quaesitum algebraice exprimatur. Q. E. I.

Corollarium I.

298. Sit $m=1$, quo casu fit $n=0$, et vis centripeta propterea vniformis ac grauitati aequalis; Series ergo erit $=1$, et tempus descensus per AC $=2\sqrt{a}$ omnino vt iam §. 219 est inuentum modo neglecta littera m.

Q Co-

Corollarium 2.

299. Sit $m=2$, vt fit $n=\frac{-1}{2}$; erit tempus totius descensus $=\frac{2}{3}\cdot 2a^{\frac{3}{4}}f^{\frac{-1}{4}}\sqrt{2}$. Sit $m=3$, erit $n=\frac{-2}{3}$; totumque tempus descensus $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}2a^{\frac{5}{6}}f^{\frac{-1}{3}}\sqrt{3}$. Simili modo si $m=4$, et propterea $n=\frac{-3}{4}$ prodit tempus descensus $=\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}2a^{\frac{7}{8}}f^{\frac{-3}{8}}\sqrt{4}$ etc.

Corollarium 3.

300. Generaliter igitur quicquid sit m, ideoque $n=\frac{1-m}{m}$, erit tempus descensus totius per AC $=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots\ldots(2m-2)}{3\cdot5\cdot7\ldots\ldots(2m-1)}2a^{\frac{2m-1}{2m}}f^{\frac{1-m}{2m}}\sqrt{m}$.

Corollarium 4.

301. Iisdem quibus supra (294) interpolationibus adhibitis, poterunt tempora descensuum assignari, si m est numerus quicunque integer affirmatiuus $+\frac{1}{2}$. Sit nimirum $m=\frac{1}{2}$, quo casu fit $n=1$, erit tempus descensus $=\frac{\pi}{2}\sqrt{2f}$, prorsus vt §. 253, vbi idem casus, quo $n=1$ seu vis centripeta distantiis proportionalis, est pertractatus.

Corollarium 5.

302. Si $m=\frac{3}{4}$ seu $n=\frac{-1}{3}$ fit tempus descensus $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{6}a^{\frac{4}{3}}f^{\frac{-1}{3}}$, si $m=\frac{5}{2}$ seu $n=\frac{-3}{5}$ prodit tempus descensus $=\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{10}a^{\frac{8}{5}}f^{\frac{-3}{5}}$. Atque generaliter casu quo $n=\frac{1-m}{m}$ reperitur tempus descensus $=\frac{1\cdot3\ldots\ldots(2m-2)}{2\cdot4\ldots\ldots(2m-1)2}\pi\sqrt{4m}a^{\frac{2m-1}{m}}f^{\frac{1-m}{m}}$.

Scho-

; erit tempus
$m=3$, erit
$2a^{\frac{5}{6}}f^{\frac{-1}{3}}\sqrt{3}$. Si-
$n=\frac{-3}{4}$ prodit
tc.
d sit m, ideo-
tius per AC=
4) interpolati-
a descensuum
e integer affir-
quo casu fit
f, prorsus vt
seu vis centri-
tractatus.
pus descensus
rodit tempus
e generaliter
ous descensus
Scho-

Scholion.

303. Intelligitur ex hisce, quibus casibus tempora descensuum algebraice possint exprimi, videlicet, quando est $n=\frac{-2m-1}{2m-1}$ vel $n=\frac{1-m}{m}$ et m significat numerum affirmatiuum integrum quemcunque. Atque praeter hos casus, dubito, an quisquam alius detur. Deinde etiam apparent casus, quibus temporis definitio a circuli quadratura pendet, hique habentur si fuerit vel $n=\frac{-m-1}{m}$, vel $n=\frac{1-2m}{1+2m}$, denotante m vt supra numerum quemcunque integrum affirmatiuum. Neque vero hi sunt omnes casus, qui ad circuli quadraturam deducuntur; namque singularis casus si $n=-1$ quoque a circuli quadratura pendet, vt sequenti propositione demonstrabimus. At vero hoc differt iste casus ab illis, quod hic in temporis expressione non π, sed $\sqrt{\pi}$ occurrat; et praeterea etiam totum duntaxat descensus tempus $\sqrt{\pi}$ inuoluat, dum tempus per quoduis spatium indefinitum nonnisi quadraturis transcendentium curuarum potest exhiberi.

PROPOSITIO 38.

Theorema.

304. *Existente vi centripeta reciproce distantiis a centro virium* C *proportionali, erit tempus descensus integri per* AC $=\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$, *denotantibus* a *spatium* AC, f *distantiam in qua vis centripeta est grauitati aequalis, et* $\pi:1$ *rationem peripheriae ad diametrum.*

 De-

Demonstratio.

Quia in quouis puncto P altitudo celeritati debita est $f\,l\frac{a}{y}$, (266); erit ipsa celeritas $=\sqrt{f\,l\frac{a}{y}}$ et tempus per spatium PC $=\frac{1}{\sqrt{f}}\int\frac{dy}{\sqrt{l\frac{a}{y}}}$. Huius ergo integrale ita acceptum vt euanescat facto $y=0$, dabit verum tempus per PC. Quare si in hac expressione tum ponatur $y=a$, prodibit totum descensus tempus per AC. Ponatur autem $y=az$; et habebitur $\frac{a}{\sqrt{f}}\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$. Demonstraui vero in Commentariis Academiae Scientiarum Petropol. Anno 1730. hanc quantitatem $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$, si ponatur $z=1$, seu $y=a$, definire in hac progressione 1, 2, 6, 24 etc., eum terminum, cuius index sit $-\frac{1}{2}$, quem alia methodo ibidem ostendi esse $=\sqrt{\pi}$. Ex quo intelligitur tempus totius descensus per AC esse $\frac{a\sqrt{\pi}}{\sqrt{f}}$. Q. E. D.

Corollarium.

305. Si ergo plura corpora ad idem centrum C ex diuersis distantiis delabantur, erunt eorum tempora descensuum ipsis distantiis proportionalia.

Scholion I.

306. Neglexi in hac propositione fractionem $\frac{1}{250}$, quae in temporis expressionem, integratione spatii elementi per radicem quadratam altitudinis celeritati debitae diuisi erutam, est multiplicanda (221), quippe quae ad tempus in minutis secundis inueniendum inseruit, si longitudines in scrupulis pedis rhenani exponuntur. Simili modo etiam in sequen-

quentibus t
rentur, sur
cile enim a
dorum inue
huiusmodi
tur, atque
exhibeantu
307.
quod integ
Nullo enim
monstrare;
steriori cog
tatione vide
res haec du
integration
sunt inter
possunt con
308.
nentis n dista
stantiis ad i
te..pora pote
$\frac{1-n}{2}$, propo
Sit co
$=a$, et $\int$ c
eritati de-
$=\sqrt{f\,l\frac{a}{y}}$ et
ergo inte-
$=0$, dabit
expressio-
descensus
et habebi-
nmentariis
10 1730.
seu $y=a$,
etc., eum
a methodo
intelligitur
Q. E. D.
m centrum
unt eorum
ortionalia.
ne fractio-
m, integra-
atam altitu-
ultiplicanda
itis secundis
crupulis pe-
etiam in se-
quen-

quentibus tempora, nisi in minutis secundis desiderentur, sum definiturus, ad ambages vitandas. Facile enim apparet ad numerum minutorum secundorum inueniendum nil aliud esse faciendum, nisi vt huiusmodi temporis expressiones per 250 diuidantur, atque longitudines in scrupulis pedis Rhenani exhibeantur, vti iam saepius est inculcatum.

Scholion 2.

307. Omnino paradoxon hoc videbitur, quod integrale ipsius $\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ posito $z=1$, fiat $=\sqrt{\pi}$. Nullo enim modo quisquam hoc directe poterit demonstrare; neque ego hanc aequalitatem nisi a posteriori cognoui, quemadmodum ex citata dissertatione videre licet. Eosdem igitur reddunt valores haec duo integralia $\int\frac{dz}{\sqrt{-lz}}$ et $2\sqrt{\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}}$, si post integrationem ponatur $z=1$, neque tamen ipsa sunt inter se aequalia; immo nequidem inter se possunt comparari.

PROPOSITIO 39.

Theorema.

308. *Si vis centripeta fuerit vt potestas exponentis n distantiarum, et plura corpora ex diuersis distantiis ad idem centrum delabantur, erunt descensuum tempora potestatibus distantiarum, quarum exponens est $\frac{1-n}{2}$, proportionalia.*

Demonstratio.

Sit corporis cuiusuis a centro C distantia AC $=a$, et f distantia, in qua vis centripeta grauitati aequa-

aequalis eſt. Deinde cum peruenerit corpus in P, ponatur CP$=y$, et altitudo celeritati in hoc loco debita $=v$, erit $v=\frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)f^n}$. Tempus ergo, quo CP abſoluitur eſt $=\sqrt{(n+1)}f^n\int\frac{dy}{\sqrt{(a^{n+1}-y^{n+1})}}$. Quod integrale quanquam exhiberi non poteſt, tamen ita erit comparatum, vt a et y in ſingulis terminis $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones conſtituant, quia in differentiali eundem dimenſionum numerum efficiunt, conſiderato dy tanquam vna dimenſione. Quamobrem ſi poſt integrationem ponatur $y=a$, quo caſu tempus totius deſcenſus prouenit, habebit ſolum a totidem videlicet $\frac{1-n}{2}$ dimenſiones, ſeu erit multiplum ipſius $a^{\frac{1-n}{2}}$. Quare, cum alter factor non complectatur niſi f et numeros, ideoque eundem valorem retineat, vtcunque a varietur, erunt diuerſorum deſcenſuum tempora vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ i. e. vt poteſtates diſtantiarum, quarum exponens eſt $\frac{1-n}{2}$. Q. E. D.

Corollarium 1.

309. Quo igitur omnia deſcenſuum tempora ſint inter ſe aequalia, oportet vt $a^{\frac{1-n}{2}}$ ſit quantitas conſtans, vtcunque a mutetur, id quod accidit ſi $n=1$, ſeu vis centripeta diſtantiis directe proportionalis, vti iam obſeruauimus (283).

Co-

rpus in P, hoc loco
vis ce ... us ergo,
ſeu n= ...
eſſe in ...
ſeu in ... oteſt, ta-
ngulis ter-
3 ... in diffe-
centr ... efficiunt,
aequa ... Quam-
ter ſe ... quo ca-
conſic ... bit ſolum
in dat ... erit mul-
efficac ... actor non
ſubdu ... e eundem
erunt di-
centr ... e. vt po-
tur, ... s eſt $\frac{1-n}{2}$.
comp
recipr
tempora
cta ſu ... quantitas
porun ... accidit ſi
vis ce ... proporti-
atur.
niſi q
Co-

Corollarium 2.

310. Simili modo ex his ſtatim apparet, ſi vis centripeta eſt reciproce vt quadratum diſtantiae, ſeu $n=-2$, tempora deſcenſuum ad hoc centrum eſſe inter ſe vt diſtantiae eleuatae ad exponentem $\frac{3}{2}$, ſeu in ſeſquiplicata diſtantiarum ratione (287).

Corollarium 3.

311. Si fuerint plura ſimiliter attrahentia virium centra, ſed efficacia differentia, et ad ea corpora ex aequalibus diſtantiis delabantur, erunt tempora inter ſe vt $f^{\frac{n}{2}}$ quia a vt conſtans, f vero vt variabilis conſideratur. Eſt vero efficacia vt vis centripeta in data diſtantia puta 1, erit ergo f^n reciproce vt efficacia, atque tempora illa inter ſe in reciproca ſubduplicata efficaciarum ratione (285).

Corollarium 4.

312. Et, ſi ad diuerſa huiusmodi virium centra corpora ex quibuscunque diſtantiis delabantur, erunt eorum tempora deſcenſuum in ratione compoſita ex directa $\frac{1-n}{2}$ plicata diſtantiarum, et reciproca ſubduplicata efficaciarum.

Scholion.

313. Ex his, quae de viribus centripetis dicta ſunt, abunde perſpicitur, quomodo motus corporum inueniri oporteat, ſi loco vis centripetae vis centrifuga ſeu pellens corpus de centro ſubſtituatur. Omnia enim manent, vt in praecedentibus, niſi quod loco formulae vim centripetam exprimentis,

tis, quae erat $\frac{y^n}{f^n}$ (264), eius negatiua debeat adhiberi. Neque tamen superfluum iudico de his casibus quaedam afferre; cognoscentur enim ex his generales quaedam regulae ad motus generationem a potentiis pertinentes, quae ex solo calculo non possunt deduci. Respiciunt ea autem actionem potentiarum in corpora quiescentia, ad quae calculus noster, quippe quo ponitur celeritatis incrementum respectu prioris infinite paruum, minus recte accommod..ur, et reipsa absurdi quid praebet, nisi primum spatii elementum tempusculo infinite paruo percurritur. Ad hoc autem dilucidandum hoc vtor axiomate, quod corpus in ipso centro virium repellente positum perpetuo ibi sit permansurum, si vis centrifuga in ipso illo puncto fuerit infinite parua seu nulla; id quod euenit, quando exponens dignitatis distantiarum, cui vis centrifuga est proportionalis, est numerus nihilo maior seu positiuus.

PROPOSITIO 40.
Problema.

Tab. III. Fig. 2. 314. *E centro virium C a se repellente in ratione* n *plicata distantiarum, egrediatur corpus in recta* CP, *requiritur eius celeritas in loco quouis P et tempus, quo spatium* CP *percurritur.*

Solutio.

Sit f distantia, in qua vis centrifuga aequalis est grauitati, et vocetur CP, y, atque altitudo celeritati in P debita v. Erit ergo vis, qua corpus in P vrgetur $=\frac{y^n}{f^n}$, et propterea $dv=\frac{y^n dy}{f^n}$ (213), quia corpus motu accelerato propellitur. Quare, cum corpus in C celeritatem nullam habere ponatur, erit $v=\frac{y^{n+1}}{(n+1)f^n}$, si fuerit $n+1$ numerus positiuus, sin autem negatiuus, fiet v infinitum. Ex hoc prodit tempus, quo spatium CP percurritur, $=\sqrt{(n+1)f^n}\int dy : y^{\frac{n+1}{2}} = \frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)f^n y^{1-n}}$ si quidem y^{1-n} fit $=o$, posito $y=o$. Nam si fuerit infinitum, tempus quoque prodiret infinitum, ob addendam constantem infinite magnam; id quod indicio esset corpus nunquam ex C egressurum. Tempus igitur erit $=\frac{2}{1-n}\sqrt{(n+1)f^n y^{1-n}}$, quoties et $1-n$ et $n+1$ fuerint numeri positiui. Q. E. I.

Corollarium 1.

315. Sunt vero hi ambo numeri $1-n$, et $1+n$ affirmatiui, si n contineatur intra hos limites -1 et $+1$. Atque si n illum terminum -1 transcendit celeritas vbique erit infinita; et si hunc $+1$ transgreditur, tempus erit infinitum.

Corollarium 2.

316. Constat autem ex ipsa rei natura, si n fuerit numerus nihilo maior, corpus nunquam ex C esse egressurum (313). Hanc ob rem necesse est, etsi n contineatur intra o et $+1$, calculum hic adhibitum, quippe qui tempus indicat finitum, fallere.

Corollarium 3.

317. Tempora haec autem ſequuntur ex celeritatibus, ergo et in his ipſis abſurdum ineſſe debebit, quoties n comprehenditur intra o et $+1$. Neque enim hae celeritates generari poterunt, cum corpus nunquam ex C egrediatur.

Scholion 1.

318. Sit curua AM talis, vt denotantibus abſciſſis AP$=y$, applicata PM ſit $=v$. Haec curua contento n intra hos limites o et $+1$, hanc habebit proprietatem, vt ipſa in A cum axe confundatur, hocque loco curuedinem habeat infiniter magnam nempe radium oſculi euaneſcentem.

Corollarium 4.

319. Quoties igitur accidit, vt ſcala celeritatum, ſeu potius altitudinum celeritatibus debitarum huiusmodi habeat formam, toties indicandum eſt, eam a nulla potentia generari potuiſſe, etiamſi calculus aliter oſtendat, ſed eſſe caſum penitus imaginarium ac in rerum natura non exiſtentem.

Scholion 2.

320. Ratio huius aberrationis calculi a natura in ipſo principio motus ſine dubio eſt ſita, atque hoc loco lex alias vniuerſalis de celeritatis incremento a potentiis producto perperam adhibetur. Quoniam enim, vt iam animaduertimus (313) haec lex locum habet tantum, quando corpus finitam iam habet celeritatem, ſemper in principio motus

tus ter primo nite p vero i ſpatii enim confid hoc, tus ſol finitae mum poten eſt infi tum el etiam eſcens exced nonſo error mum 1 con hocqu tentia in A proxi mens eſt in percu agit, getur
quuntur ex ce- um ineſſe de- tra o et $+1$. rari poterunt, r. t denotantibus . Haec curua 1, hanc habe- axe confunda- it infiniter ma- tem. vt ſcala celeri- itatibus debita- ies indicandum tuiſſe, etiamſi m penitus ima- ſtentem. calculi a natu- eſt ſita, atque leritatis incre- ram adhibetur. nus (313) haec corpus finitam principio mo- tus

tus temere vſurpatur. Cum autem iſte error in ipſo primo tantum elemento inſit, plerumque eſt infinite paruus et hanc ob rem non eſt reſpiciendus. Eſt vero infinite paruus, quoties primum elementum ſpatii tempuſculo infinite paruo percurritur, tum enim neque in celeritatibus neque in temporibus conſiderabile diſcrimen poterit producere. Euenit hoc, ſi potentia, qua corpus in ipſo principio motus ſollicitatur eſt finitae magnitudinis vel etiam infinitae magnae; perſpicuum enim eſt hoc caſu, primum elementum temporis puncto percurri. At ſi potentia, vt in noſtro caſu vſu venit, in principio eſt infinite parua ſeu potius nulla, ad primum tantum elementum abſoluendum non modo finito, ſed etiam infinito opus eſt tempore, quia corpus quieſcens a nulla potentia pulſum de loco ſuo nunquam excedet. In reliquis quidem caſibus, quibus n eſt nonſolum nihilo, ſed etiam vnitate maior, tantus eſt error, vt etiam calculus infinitum tempus per primum elementum oſtendat. Verum, ſi n intra o et 1 comprehenditur, vitium calculi animaduertitur; Tab. III. Fig. 4.
hocque ideo, vti videtur, quia his caſibus ſcala potentiarum formam habet curuae AM, quae axi AP in A ad angulos rectos occurrit. Statim enim in proximo ipſi A puncto a linea ab potentiam exprimens infinite maior eſt ſagitta Aa; perinde autem eſt in motus computatione, ſiue corpus elementum percurrens conſideretur a potentia, quae initio agit, ſollicitatum ſiue ea, qua in fine elementi vrgetur. In hoc autem caſu euidens eſt, errorem naſci

nasci oportere, ſi corpus per totum elementum Aa a potentia ab ſollicitatum conſideretur.

PROPOSITIO 41.
Problema.

Tab. III. Fig. 5. 321. *Si fuerit vis centripeta functioni cuicunque diſtantiarum a centro C proportionalis, corpusque ex A ad id delabatur; requiritur celeritas eius in puncto quocunque P atque tempus, quo ſpatium AP percurritur.*

Solutio.

Repraeſentet curua BMD ſcalam potentiarum ſeu legem vis centripetae, ita vt corpus in P trahatur ad C a potentia PM, quae ſit ad vim grauitatis vt haec PM ad rectam conſtantem AE, qua vis grauitatis exprimitur. Sit nunc $AP=x$; $PM=p$; $AE=1$, et altitudo celeritati in P debita $=v$. Vis igitur accelerans eſt p, et propterea ſumto elemento $Pp=dx$, erit $dv=pdx$ (213). Ex qua prodit integrando $v=\int pdx$. At $\int pdx$ exprimit aream ABMP, hanc ob rem habebitur $v=\frac{ABMP}{AE}$, completa homogeneitate recta $AE=1$. Cognita nunc altitudine v erit tempus, quo ſpatium AP percurritur $=\int\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, quod, quia p per x dari ponitur, per quadraturas innoteſcit. Q. E. I.

Corollarium 1.

322. Perſpicitur ex his, ſi corpus ea celeritate, quam in C acquiſiuit, retro moueatur ſurſum, motum eius aſcenſus ſimilem fore deſcenſui, atque in puncto P eandem habiturum eſſe celeritatem, quam habuit ante, et proinde tempus quoque aſcenſus per CP aequale eſſe debere, tempori deſcenſus per idem ſpatium.

Corollarium 2.

323. Poſuimus hic corpus in A celeritatem habere nullam, atque ex quiete motum inchoare. Sed non difficilior euadit calculus, ſi ei in A celeritas quaecunque tribuatur; hoc enim caſu differentiale pdx ita debet integrari, vt facto $x=0$, ipſum $\int pdx$ praebeat altitudinem celeritati initiali debitam. Tempus vero ex $\int pdx$ hac ratione accepto inuenietur ſimiliter vt ſupra.

Scholion 1.

324. Aſſumſimus quidem p eſſe functionem ipſius x, et propterea non reſpicere centrum virium C, ſed tantum motus initium A. Nihilo tamen minus caſus propoſitionis in ſolutione continetur; ſi enim p eſt functio ipſius diſtantiae CP a centro virium C, quam vocemus y, erit $y=a-x$, poſito toto ſpatio $AC=a$, et hanc ob rem p denotabit functionem ipſius $a-x$, i. e. functionem ipſius x et conſtantium vt aſſumſimus. Noſtra vero ſolutio latius patet, determinat enim motum corporis a quacunque potentia ſollicitati, nullo reſpectu ad certum aliquod punctum fixum habito, dummodo hae potentiae vbiuis eandem directionem teneant. Niſi enim hoc fiat, corpus ceſſabit in linea recta moueri, ſed in curua incedet, de quo motu in ſequentibus tractabimus.

Scholion 2.

325. Determinauimus hactenus motus corporis rectilineos ex data potentia, nunc vero pertractanda restat altera huius capitis pars, qua ex data motus conditione potentiarum legem definiri oportet. Sit vero hoc vel ex datis celeritatibus vel temporibus, vtrumque autem duplici modo est pertractandum. Vel enim respicitur ad vnicum descensum seu ascensum, in cuius singulis punctis datae ponuntur vel celeritates vel tempora, quibus quaeque spatii portiones percurruntur. Vel considerantur infiniti descensus ad punctum fixum ex diuersis altitudinibus facti, in quibus dantur vel celeritates vltimae, vel tempora, quibus singuli descensus integri absoluuntur. Ex his igitur quatuor oriuntur problemata primaria, quorum solutiones hic exhiberi oportet. Praeter haec vero aliae afferuntur quaestiones, in quibus neque solae celeritates neque sola tempora dantur, sed aliud quiddam, quod ex vtrisque sit compositum, cuiusmodi vero quaestiones, cum innumerabiles possent excogitari, aliquas tantum magis insignes, et ex quarum solutionibus simul reliquorum solutiones possint intelligi, in medium proferemus.

PROPOSITIO 42.

Problema.

Tab. II. Fig. 10. 326. *Data corporis rectam* AP *percurrentis in singulis punctis celeritate; requiritur potentiae lex, quae hunc motum corpus sollicitando efficere valet.*

So-

Percur otus cor- fit altitudo ero per- bita $=v$, q ia ex da- tium functic definiri in P agens, atibus vel ex corporis est per- $Pp=dx$ perc cum des- $dv=pdx$ (2 ctis datae se habebit a ius quae- tudinis cel confide- quod intere ex di- vel cele- guli des- 327. quatuor ea ipsa alti olutiones $p=1$, id aliae affe- producente celerita- aequalem. quiddam, odi vero 328. xcogitari, percursis p m soluti- constantem intelligi, Quamobrem tionalis. urrentis in 329. lex, quae casum existe motus initi So-

Solutio.

Percurso quouis spatio AP, quod ponimus $=x$, sit altitudo celeritati, quam corpus in P habet, debita $=v$, quae proinde data et ipsius x et constantium functio quaedam esse ponitur. Potentia vero in P agens, quam quaerimus, sit $=p$, quae ergo ex corporis acceleratione dv, dum elementum $Pp=dx$ percurrit, inueniri poterit. Cum enim sit $dv=pdx$ (213), erit $p=\frac{dv}{dx}$ seu ista potentia quaesita se habebit ad vim grauitatis, vt incrementum altitudinis celeritati debitae, ad spatii elementum, quod interea percurritur. Q. E. I.

Corollarium 1.

327. Si fuerit $v=x$, seu spatium descriptum ea ipsa altitudo celeritati debita; fiet $dv=dx$ et $p=1$, id quod indicat potentiam hunc motum producentem esse vniformen, et ipsi grauitati aequalem.

Corollarium 2.

328. Si ipsae celeritates ponantur spatiis percursis proportionales; erit $v=\frac{x^2}{f}$, denotante f constantem requisitam, fit ergo $dv=\frac{2xdx}{f}$ et $p=\frac{2x}{f}$. Quamobrem potentia erit spatiis percursis proportionalis.

Scholion 1.

329. Constat autem ex superioribus, hunc casum existere non posse; nam quia potentia in ipso motus initio A est nulla, corpus ex hoc puncto num-

nunquam egreditur, ſed ibi perpetuo quieſcet. Idem commonſtrat temporis per AP computatio, quod erit $=\int\frac{dx}{x}\sqrt{f}$, quae quantitas eſt infinita, ſi quidem integrale ita accipitur, vt euaneſcat poſito $x=o$.

Corollarium 3.

330. Quo igitur hoc non eueniat, oportet vt $\frac{dv}{dx}$ ſit eiusmodi quantitas, quae facto $v=o$ non euaneſcat, ſed quae vel fiat finita vel infinita. Ex quo Tab. III. Fig. 2. perſpicitur ſcalam altitudinum celeritatibus debitarum AM, in qua ſumtis $AP=v$, applicatae PM repraeſentent has altitudines v, non debere in A in axem incidere, ſed angulum cum eo finitum conſtituere oportere.

Scholion 2.

331. Haec intelligenda ſunt tantum de iis caſibus, quibus corporis celeritas in A euaneſcens ponitur, et ſcala AM cum axe in A concurrit. Aliter enim ſe res habet, ſi corpus in A celeritatem iam habet, qua, etiamſi potentia ſit nulla, tamen ex A progredi, potentiaeque actionem ſubire poteſt, ita vt non opus ſit tempore infinito ad ſpatium AP abſoluendum.

PROPOSITIO 43.

Problema.

Tab. III. Fig. 5. 332. *Dato tempore, quo corpus in recta* AC *progrediens, percurrit ſingula ſpatia* AP; *oportet definire legem potentiarum, qua efficitur, vt corpus hoc motu feratur.*

So-

o quieſcet. I omputatio, $=\sqrt{t}$ infinita, ſi habet ueſcat poſi- titud ad in , oportet vt beat. o non eua- Tem a. Ex quo diffe ibus debita- ius ſi itae PM re- ſtant re in A in nitum con- m de iis ca- hom neſcens po- $-2dx$ rit. Aliter dT itatem iam et fa amen ex A poteſt, ita patium AP prop ſtans. catur tinua n recta AC oportet de- t corpus hoc cipi poſi So-

Solutio.

Dicto ſpatio AP, x; et tempore, quo percurritur $=\sqrt{t}$, quia expreſſionis temporis quadratum vnicam habet dimenſionem; ſit potentia quaeſita $=p$, et altitudo celeritati in P debita $=v$, hac enim opus eſt ad inueniendum p, quamuis ex calculo exire debeat. His poſitis erit vt ante $dv=pdx$, et $v=\int pdx$. Tempus igitur $\sqrt{t}=\int\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, ex qua aequatione ſumtis differentialibus prodit $\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$ et $\int pdx=\frac{4tdx^2}{dt^2}$, cuius ſi denuo ſumatur differentialis poſito dx conſtante, habebitur $p=\frac{4dx}{dt}-\frac{4tdxddt}{dt^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

333. Si ponatur tempus ipſum $=T$ neglecta homogeneitate, erit $t=T^2$; atque prodibit $p=\frac{-2dxddT}{dT^2}$. Quae expreſſio ſimplicior eſt ſuperiore, et facilius ad caſus ſpeciales accommodatur.

Corollarium 2.

334. Si tempora ponantur ſpatiis deſcriptis proportionalia, erit $T=x$ et $ddT=o$, ob dx conſtans. Conſequenter potentia erit nulla, qua indicatur corpus vi inſita hunc motum aequabilem continuare.

Scholion.

335. Notandum hic eſt pro T eiusmodi accipi debere functionem ipſius x, quae cum fiat $=o$, poſito $x=o$, tum creſcentibus x creſcat quoque.

 Fie-

Fieri enim omnino non potest, vt corpusmoueri pergat, tempus vero diminuatur. Ponamus v. g. $T = \sqrt{(2ax-x^2)}$ quae quantitas ad certum tantum terminum crescit, crescente x, tum vero decrescit. Erit ergo $dT = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$ et $ddT = \frac{-a^2 dx^2}{(2ax-x^2)^{3:2}}$. Ex his fit $p = \frac{2a^2}{(a-x)^3}$, seu posita $AC = a$, sollicitabitur corpus in P ad C vi cubo distantiae a C reciproce proportionali. Tempus vero $\sqrt{(2ax-x^2)}$ vlterius non valet, quam vsque ad C quo $x = a$. Sed de hoc casu iam est actum (289). Quare ex hoc concludi videtur corpus cum in C peruenerit ex eo nunquam esse egressurum, quod autem quomodo fieri possit, cum celeritas eius in C sit infinite magna, nullo modo concipi potest. Accedit quod, cum sit $\sqrt{v} = \frac{dx}{dT} = \frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a-x}$, celeritas corporis cum vltra C progrediatur, deberet esse negatiua, ideoque corpus a C non recederet, sed ad C accederet, quae ita pugnant, vt etiam nunc conciliari nequeant.

Corollarium 3.

336. Cum sit elementum temporis $dT = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ erit celeritas corporis in quouis loco $\sqrt{v} = \frac{dx}{dT}$, ex data ergo temporum lege, simul celeritas corporis in singulis locis innotescit; quod quidem ex ipso nexu inter celeritates et tempore consequitur, nullo respectu habito ad potentiam (37).

PRO-

PROPOSITIO 44.
Problema.

337. *Si corpus in recta* AP *ita descendat, vt ea celeritate, quam in* P *habet, eodem tempore, quo spatium* AP *percurrit, progredi possit motu vniformi per spatium* PM, *applicatam curuae* AM *datae: determinari oportet legem potentiae sollicitantis, qua talis motus generatur.* Tab. III. Fig. 6.

Solutio.

Posito $AP = x$ et $PM = s$, erit s ob datam curuam AM functio ipsius x. Sit porro potentia in P corpus sollicitans $= p$, altitudo celeritati in P debita $= v$, et tempus, quo spatium AP absoluitur $= T$, Quia iam spatium s tempore T celeritate $\sqrt{v}$ absoluitur motu aequabili, erit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$ (30). Est vero $v = \int pdx$ et $T = \int \frac{dx}{\sqrt{\int pdx}}$, quocirca habebitur $\int \frac{dx}{\sqrt{\int pdx}} = \frac{s}{\sqrt{\int pdx}}$, vel relicto v loco $\int pdx$, quo calculus concinnior reddatur, erit $\int \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{s}{\sqrt{v}}$. Quae differentiata dat $\frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{v}} - \frac{sdv}{2v\sqrt{v}}$, ex qua deducitur haec aequatio $\frac{dv}{v} = \frac{2ds}{s} - \frac{2dx}{s}$; cuius integralis est $lv = 2ls - 2\int \frac{dx}{s}$, seu $v = e^{-2\int \frac{dx}{s}} s^2$ denotante e numerum, cuius logarithmus est 1. Sumantur iterum differentialia, prodibit $dv = pdx = 2e^{-2\int \frac{dx}{s}} (sds - sdx)$. Ex qua tandem elicitur $p = 2se^{-2\int \frac{dx}{s}} \left(\frac{ds - dx}{dx}\right)$. Innotescet igitur potentia quaesita p ex ista aequatione, quia s in x dari ponitur. Q. E. I.

 Co-

Corollarium 1.

338. Quia est $v = e^{-2\int \frac{dx}{s}} s^2$, habebitur hinc ipsa corporis, quam in P habet, celeritas $\sqrt{v} = e^{-\int \frac{dx}{s}} s$. Quam autem constantem in integratione ipsius $\frac{dx}{s}$ addi oporteat, mox docebitur.

Corollarium 2.

339. Tempus quoque T, quo spatium AP percurritur, facile ex hisce deducitur. Nam cum sit $T = \frac{s}{\sqrt{v}}$, habebitur $T = e^{\int \frac{dx}{s}}$. Cum igitur debeat T euanescere facto $x = o$, oportet ipsum $\frac{dx}{s}$ ita integrari, vt $e^{\int \frac{dx}{s}}$ euanescat, facto $x = o$. Quamobrem necesse est vt fiat $\int \frac{dx}{s} = -\infty$, si ponatur $x = o$.

Corollarium 3.

340. Sit $s = nx$, erit $\int \frac{dx}{s} = \frac{1}{n} lx + lc$. Quicquid igitur c denotet, semper $\int \frac{dx}{s}$ fit $= -\infty$ posito $x = o$. Quare erit $e^{\int \frac{dx}{s}} = cx^{\frac{1}{n}} = T$. Consequenter prodibit $p = \frac{2n(n-1)x^{\frac{n-2}{n}}}{c^2}$, atque $\sqrt{v} = \frac{n}{c} x^{\frac{n-1}{n}}$.

Corollarium 4.

341. Si ponatur $s = x$, perspicuum est motum in AP vniformem esse debere, id quod etiam calculus ostendit. Fit enim $n = 1$, adeoque $p = o$ et $\sqrt{v} = \frac{n}{c}$ seu constanti.

Co-

Corollarium 5.

342. Si n est vnitate minor, celeritas in ipso puncto A fit infinite magna, atque etiam potentia p, erit enim reciproce vt potestas exponentis $\frac{2-n}{n}$ spatiorum percursorum.

Corollarium 6.

343. Si n est vnitate maior, attamen binario minor, fit quidem celeritas in $A = o$, sed potentia manet in A infinite magna, decrescitque in ratione quadam multiplicata spatiorum percursorum.

Corollarium 7.

344. Si $n = 2$, habemus casum potentiae vniformis. Fit enim $p = \frac{4}{c^2}$, et $\sqrt{v} = \frac{2}{c}\sqrt{x}$. Hancque proprietatem iam demonstrauimus propositione 28, (230) vbi ostendimus corpus in hac potentiae vniformis hypothesi ex quiete descendens tantam quouis spatio percurso acquirere celeritatem, qua eodem tempore vniformiter posset duplum spatium percurrere.

Corollarium 8.

345. Sin vero n binarium excedat, prodeunt ii casus, quos diximus (316) in rerum natura locum obtinere non posse, quamuis calculus aliter ostendat. Fit enim celeritas in A nulla, ibidemque potentia sollicitans euanescit, quamobrem corpus nunquam ex A exire poterit, non obstante calculo, qui tempus T per spatium quoduis AP, exhibet finitum.

Scho-

Scholion.

346. Huius propositionis casus est ergo eiusmodi, vt data motus conditio sit ex celeritate et tempore permixta, ex qua legem potentiarum erui oporteat. Plura vero huiusmodi exempla afferre superuacaneum foret, cum ex hoc vno omnium reliquorum soluendorum modus perspiciatur.

PROPOSITIO 45.

Problema.

Tab. III. Fig. 7. 347. *Datis celeritatibus, quas corpus ex quibuscunque distantiis ad centrum virium C accedens in ipso centro C acquirit, definire legem vis centripetae huiusmodi descensus producentis, posito quod corpus singulos descensus ex quiete incipiat.*

Solutio.

Repraesentet CM scalam altitudinum celeritatibus, quas corpus in puncto C acquirit, debitarum, ita vt PM sit ipsa altitudo debita celeritati, quam corpus ex P descensum inchoans in C adipiscitur. Curua vero DN sit scala potentiarum quaesita, cuius scilicet applicatae PN exhibeant vim centripetam corpus in punctis P sollicitantem; linea vero CB designet vim centripetam vi grauitatis aequalem. His positis atque corpore ex P in C descendente erit altitudo celeritati eius in C debita aequalis areae CDNP applicatae ad BC (321). Quamobrem erit $PM = \frac{CDNP}{BC}$. Vocentur nunc CP, y; PM, v; et PN, p; positoque $BC = 1$; erit $v = \int p dy$, et differentiando $dv = p dy$. Quare cum detur v in y erit $p = \frac{dv}{dy}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

348. Sint celeritates in C acquisitae, vt spatia percursa erit $\sqrt{v}$ vt y, et consequenter p vt y. Vis centripeta igitur proportionalis est distantiis a centro C.

Corollarium 2.

349. Si celeritates in C acquisitae dignitati exponentis n distantiarum a centro C proportionales ponantur, erit v vt y^{2n}; ergo p vt y^{2n-1}. Potentia igitur seu vis centripeta distantiarum dignitati $2n-1$ est proportionalis.

Corollarium 3.

350. Quia celeritas in C acquisita, cum fuerit $y = o$, debet esse quoque $= o$, et praeterea maiori distantiae y maior celeritas respondere debeat; non poterit non n numerum affirmatiuum significare.

Corollarium 4.

351. Potentia autem p erit constans, cum sit $n = \frac{1}{2}$; quo numero si n fuerit minor, erit vis centripeta reciproce vt dignitas quaedam distantiarum a centro C. Sin n fuerit $> \frac{1}{2}$ erit p directe vt huiusmodi dignitas quaedam. In illo casu ergo vis centripeta in C erit infinite magna, et decrescet crescentibus distantiis; hoc vero casu erit in $C = o$, crescetque crescentibus distantiis.

Co-

Corollarium 5.

352. Cum fit $PM = \frac{CDNP}{CB}$, perfpicuum eft curuam CM effe etiam fcalam altitudinum celeritatibus debitarum, cum corpus ex C egrediatur in recta CP, vi centripeta in centrifugam mutata, atque motum a quiete incipiat (321).

Scholion.

353. Quanquam autem hoc modo problema reductum fit ad prop. 42 (326), transmutata vi centripeta in centrifugam; tempus tamen afcenfus per CP in cafu vis centrifugae non erit aequale tempori defcenfus per PC in cafu vis centripetae. Neque enim aequalitas celeritatum, quae in vtroque cafu per aequalia fpatia generantur, temporum aequalitatem inducit; fed ex ipfo etiam intuitu contrarium apparet. Nam quoties vis centripeta in C eft $=o$, etiam vis centrifuga in C euanefcit; quamobrem tempus afcenfus per CP erit infinitum (313), cum tamen defcenfus abfoluatur tempore finito. Nullum igitur adminiculum ex ifta fimilitudine celeritatum ad folutionem fequentis problematis fuppeditatur. In fequenti autem propofitione dari ponuntur tempora, quibus finguli defcenfus abfoluuntur, eaque nonfolum eft difficillima folutu, fed ex fcala temporum nequidem fcala potentiarum vllo modo poteft conftrui. Quocirca non nifi cafus particulares in hac propofitione complectemur, quorum folutio vires noftras non fuperat.

PRO-

:uum eft cur- celeritatibus 35 quibuscun tur in recta uenit, it tata, atque definire l. Sin exponen do problema quaefita utata vi cen- qua corp afcenfus per tante C ıale tempori corpus e tae. Neque PC=a, vtroque cafu quamobr um aequali- tatem co contrarium ctum P va in C eft =o, nerit nun quamobrem Cπ=x, 313), cum bita = inito. Nul- CPND= ine celerita- ergo alt is fuppedita- ipfa celer ari ponuntur X effe fu untur, eaque in qua n fcala tem- puncto P modo po- accipiatu particulares neat ead orum folutio talis eti PRO-

PROPOSITIO 46.

Problema.

354. *Si fuerint tempora, quibus corpus ex quibuscunque diftantiis* PC *ad centrum virium* C *peruenit, in ratione quacunque multiplicata diftantiarum; definire legem vis centripetae.* Tab. III. Fig. 8.

Solutio.

Sint ifta tempora vt poteftates diftantiarum exponentis n, fitque curua DN fcala vis centripetae quaefita, ita vt applicata $\pi\nu$ exponat potentiam, qua corpus in π exiftens ad C vrgetur, repraefentante CB vim grauitatis. His pofitis defcendat corpus ex puncto quocunque P et ponatur diftantia $PC = a$, erit ergo tempus defcenfus per PC vt a^n, quamobrem id ponamus $= Ca^n$, denotante C quantitatem conftantem, in qua a non infit, quia a ob punctum P variabile reipfa eft quantitas variabilis. Peruenerit nunc corpus in locum quemcunque π et vocetur $C\pi = x$, erit altitudo celeritati eius in hoc loco debita $= \frac{PN\nu\pi}{BC} = \frac{CPND - C\pi\nu D}{BC}$ (321). Ponatur autem area $CPND = A$, et area $C\pi\nu D = X$, atque $BC = 1$; erit ergo altitudo celeritatis in π debita $= A - X$, et ipfa celeritas $= \sqrt{(A-X)}$. Notandum hic autem eft, X effe functionem quandam ipfius x et conftantium in qua non fit a, area enim $C\pi\nu D$ non pendet a puncto P, fed retinet eundem valorem vbicunque accipiatur punctum P, dummodo diftantia $C\pi$ maneat eadem. Qualis autem X eft functio ipfius x, talis etiam effe debebit A functio ipfius a, abeunte

 enim

enim x in a, functio X transmutabitur in A. Iam tempus, quo hoc descensu spatium $C\pi$ percurritur erit $=\int\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$, quod integrale ita debet esse sumtum vt facto $x=o$, ipsum euanescat. Ex hac igitur expressione habebitur integrum tempus descensus per PC si ponatur $x=a$, quo casu X quoque transmutatur in A. Quia autem haec resultans quantitas ita debet esse comparata, vt in ea a habeat n dimensiones; (oportet enim eam aequalem esse ipsi Ca^n), in indefinito integrali $\int\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ a et x simul habeant necesse est vbique n dimensiones. Quamobrem etiam formula differentialis $\frac{dx}{\sqrt{(A-X)}}$ n habebit dimensiones, dimensionemque vnam constituere existimanda sunt tam a et x quam dx. Perspicuum igitur est in $\sqrt{(A-X)}$ $1-n$ inesse debere dimensiones, atque in A–X, $2-2n$ dimensiones ipsarum a et x. Sed quia in X non inest a, debebit X functio esse $2-2n$ dimensionum solius x, aliud ergo X esse non poterit nisi bx^{2-2n}, et propterea erit $A=ba^{2-2n}$. Constans quidem quantitas ad bx^{2-2n} adiici potest, cum ea, quia ad ba^{2-2n} pariter est addenda, ex A–X iterum excedat. Nam si ponatur $X=bx^{2-2n}+bc^{2-2n}$, erit $A=ba^{2-2n}+bc^{2-2n}$ et idcirco $A-X=b(a^{2-2n}-x^{2-2n})$. Sed quia X denotat aream $C\pi\nu D$, euanescere debet facto $x=o$, quamobrem, si sit $2-2n$ numerus positiuus, semper debet esse $bc^{2-2n}=o$, at si $2-2n$ euadet numerus negatiuus quantitas bc^{2-2n} designabit quantitatem infinitam negatiuam. Quicquid igitur sit bc^{2-2n} debet esse $-bo^{2-2n}$, hoc enim si $2-2n$ seu $1-n$ est numerus affir-

firmati praebe tum le ue haec que po $C\pi\nu D=$ bc^{2-2n} bit $p=$ ta debe Q. E.
35 C sint poribus centrip quidem ad cent
35 suum si vis cent
35 plicata stans, q Si ergo crescet

ur in A. Iam $C\pi$ percurritur et esse sumtum hac igitur ex- descensus per que transmuta- s quantitas ita eat n dimensi- esse ipsi Ca^n), simul habeant Quamobrem abebit dimen- stituere existi- erspicuum igi- dimensiones, psarum a et x. X functio esse go X esse non it $A=ba^{2-2n}$. adiici potest, addenda, ex ur $X=bx^{2-2n}$ t idcirco A–X enotat aream quamobrem, er debet esse erus negatiuus tem infinitam $^{-2n}$ debet esse st numerus af- fir-

firmatiuus sponte euanescit, et si $1-n$ est negatiuum praebet infinitum requisitum. Sed cum sit propositum legem vis centripetae inuenire, nihil refert siue haec quantitas constans sit $=o$ siue infinita. Namque posita vi centripeta in $\pi=p=\pi\nu$, erit area $C\pi\nu D=\int pdx$. Quamobrem habebitur $bx^{2-2n}+bc^{2-2n}=\int pdx$, et sumtis differentialibus prodibit $p=(2-2n)bx^{1-2n}$. Consequenter vis centripeta debet esse in $1-2n$ *plicata* ratione distantiarum. Q. E. I.

Corollarium 1.

355. Quo igitur omnes descensus ad centrum C sint isochroni, seu absoluantur aequalibus temporibus, poni debet $n=o$, quo facto prouenit vis centripeta distantiis directe proportionalis. Iam quidem animaduertimus hoc casu omnes descensus ad centrum esse isochronos (283).

Corollarium 2.

356. Si ponatur $n=1$, vt tempora descensuum sint spatiis percursis proportionalia; inuenitur vis centripeta distantiis reciproce proportionalis.

Corollarium 3.

357. Si $n=\frac{1}{2}$ seu tempora in ratione subduplicata distantiarum, vis centripeta habetur constans, quam proprietatem iam supra eruimus (217). Si ergo $n>\frac{1}{2}$ vis centripeta crescente distantia decrescet, sin $n<\frac{1}{2}$ crescet crescente distantia.

 Scho-

Scholion.

358. Hae quidem proprietates omnes consequuntur ex propositione 39, (308), vbi demonstrauimus, si vis centripeta fuerit vt potestas exponentis n distantiarum, tempora descensuum fore in ratione $\frac{1-n}{2}$ *plicata* distantiarum. Quae propositio egregie cum hac nostra conspirat, posito enim n loco $\frac{1-n}{2}$ prodibit $1-2n$ loco n. Neque tamen me hac propositione acta egisse putandum est, nam hic a priori modo analytico ex data temporum conditione legem vis centripetae erui, cum ibi inuerso ordine, ad idem fuerim perductus. Neque praeterea ante certum erat, praeter has inuentas virium centripetarum leges alias non satisfacere. Ipsa vero solutio incredibilem in posterum praestat vtilitatem. Nam quia mere est analytica et peculiarem a nemine adhuc adhibitam methodum complectitur, ad plurima alia problemata soluenda deducere potest, quae aliis methodis frustra tentantur. Ita cum huiusmodi methodus adhuc incognitus esset, neque hi isochroni descensus, neque curua tautochrona a priori sunt inuenta, sed examinantes vel vim centripetam distantiis proportionalem vel curuam cycloidem inopinato in istas proprietates inciderunt Geometrae.

PROPOSITIO 47.

Problema.

Tab. III. Fig. 9. 359. *Data scala potentiarum* BND, *quibus corpus per spatium* AC *descendens sollicitatur, inuenire in-*

innum C ean in A
omnes confe- vbi demon- orestas expo- ssium fore in ie propositio osito enim n ie tamen me est, nam hic oorum condi- m ibi inuerso Neque prae- ientas virium Ipsa vero at vtilitatem. irem a nemi- lectitur, ad icere potest, ta cum huius- neque hi iso- rona a priori centripetam ycloidem in- Geometrae.
ND, quibus tur, inuenire in-

innumerabiles alias vt βνδ, quibus corpus sollicitatum in C *eandem acquirit celeritatem, posito corpore semper in* A *motum ex quiete inchoante.*

Solutio.

Cum pro scala potentiarum BND altitudo celeritati, quam corpus in C habebit, aequalis sit areae $\frac{ABCD}{CE}$ exponente CE vim grauitatis (321) et pro scala βνδ ista altitudo $= \frac{A\beta\delta C}{CE}$ (cit.); debebit esse ALDC $=$ AβδC, quam proprietatem vtique infinitae curuae habere possunt. In quocunque quidem spatii AC puncto P haec proprietas locum habere nequit, vt esset AENP$=$AβνP, nisi curua βνδ incidat in alteram BND. Erit ergo discrimen quoddam inter has areas quod vocemus Z ita vt sit AβνP$=$ABNP$-$Z, quae differentia Z ita debet esse comparata vt euanescat puncto P tam in A incidente quam in C. Hanc ob rem constructa super axe AC curua quacunque AMC, quae in punctis A et C cum axe occurrat, poterit eius applicata PM loco huius Z vsurpari; euanescit enim puncto P et in A et C translato. Quo autem ex eadem curua AMC innumerabiles curuae βνδ deduci queant, expedit functionem quandam ipsius applicatae PM loco D adhibere quam ipsam. Haec vero functio hanc habere debebit proprietatem, vt fiat $=o$, si euanescit PM. His iam ita institutis ponatur AC$=a$, AP$=x$, PN$=y$, Pν$=$Y, et PM$=z$, quarum quantitatum a, x, y et z, nec non Z functio ipsius z tanquam datae considerari possunt, incognita vero quantitas erit Y, quae ex hac

hac aequatione $\int Ydx = \int ydx - Z$ definietur. Sumtis enim differentialibus prodit $Y = y - \frac{dZ}{dx}$, ex qua aequatione curua ℭ𝔳𝔡 construi poterit. Q. E. I.

Corollarium I.

360. Sit $Z = nz^2$, erit $dZ = 2nzdz$ et $Y = y - \frac{2nzdz}{dx}$. At $\frac{zdz}{dx}$ denotat subnormalem in curua AMC ducta normali MR in puncto M. Si itaque accipiatur $N\nu$, quae linea est $= y - Y$, aequalis cuicunque multiplo subnormalis PR, curua ℭ𝔳𝔡 quaesito satisfaciet.

Corollarium 2.

361. Possumus etiam ponere $dZ = pzdz$ denotante p functionem quamcunque ipsius z. Hic enim non opus habemus ad hoc respicere quod Z euanescere debeat, posito $z = o$. Nam quaecunque functio loco p accipiatur, integrale ipsius $pzdz$ semper ita potest accipi vt fiat $= o$ posito $z = o$. Hanc ob rem habebimus $Y = y - \frac{pzdz}{dx} = y - p.$PR. seu $N\nu = p.$PR. quae constructio latissime patet.

Scholion.

362. Notandum hic est non necesse esse, vt loco curuarum BND et AMC curuae regulares, quae aequationibus certis contineantur, adhibeantur. Sed ad construendas curuas ℭ𝔳𝔡 sufficit curuas etiam vel maxime irregulares nulla aequatione contentas accipere. Pariter enim constructio determinandis subnormalibus succedit.

PRO-

M
finietur. Sumtis $\frac{dZ}{dx}$, ex qua aequa- Q. E. I.
3 corpus innume eodem t
$2nzdz$ et $Y = y-$ n in curua AMC si itaque accipiaqualis cuicunque 𝔡 quaesito satis-
S hoc ab $=t$ et absolui quantit C trans onem axe A PM $=$ et erit habebi Y dete bitur $= \frac{dx\sqrt{}}{dx+d}$ ista qua natur e nitur Y
$dZ = pzdz$ de- ipsius z. Hic espicere quod Z Nam quaecunque ipsius $pzdz$ semito $z = o$. Hanc .PR. seu $N\nu = p$,
necesse esse, vt curuae regulares, tur, adhibeantur. cit curuas etiam tione contentas o determinandis
PRO-

PROPOSITIO 48.

Problema.

363. *Data scala potentiarum* BND, *quibus corpus spatium* AC *percurrens sollicitatur, inuenire innumerabiles alias vt* ℭ𝔳𝔡, *quibus efficiatur vt corpus eodem tempore spatium* AC *absoluat.*

Solutio.

Sumto quocunque spatio AP, sit tempus, quo hoc absoluitur vrgente scala potentiarum BND, $= t$ et tempus, quo idem spatium agente scala ℭ𝔳𝔡 absoluitur, sit $= T$, ponaturque $T = t + Z$, quae quantitas Z euanescat, puncto P tam in A quam in C translato. Hanc ob rem vt ante facio Z functionem applicatae PM curuae AMC in A et C cum axe AC occurrentis, talem, vt euanescat facto $PM = z = o$. Dicantur nunc AP, x, PN, y et Pν, Y, et erit $t = \int \frac{dx}{\sqrt{\int ydx}}$; atque $T = \int \frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}}$, quocirca hanc habebimus aequationem $\int \frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\int ydx}} + Z$, ex qua Y determinari poterit. Nam differentiando habebitur $\frac{dx}{\sqrt{\int Ydx}} = \frac{dx}{\sqrt{\int ydx}} + dZ$, ex qua prodit $\sqrt{\int Ydx} = \frac{dx\sqrt{\int ydx}}{dx + dZ\sqrt{\int ydx}}$ atque $\int Ydx = \frac{dx^2 \int ydx}{(dx + dZ\sqrt{\int ydx})^2}$. Quia vero ista quantitas ob datas x, y et Z construi potest, ponatur ea $= P$, eritque $Ydx = dP$ consequenter inuenitur $Y = \frac{dP}{dx}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

364. Sit $dZ = pzdz$ vt ante denotante p functionem quamcunque ipſius z, erit $\frac{zdz}{dp} =$ ſubnormali PR, quam ponamus $= r$. Quo facto habebitur $P = \frac{\int ydx}{(1+rp\sqrt{\int ydx})^2}$ atque $Y = \frac{dP}{dx}$.

Corollarium 2.

365. Sit curua data BND linea recta parallela axi AC, ita vt potentia ſit vniformis, ſemper enim potentia vniformis datur, quae efficiat vt corpus dato tempore ſpatium AC abſoluat. Ponatur $AB = PN = b$; erit $\int ydx = bx$. Vnde habebitur $P = \frac{bx}{(1+rp\sqrt{bx})^2}$ hacque differentiata obtinetur $Y = \frac{dP}{dx}$.

Scholion.

Duas has poſteriores propoſitiones inter ſe fere ſimiles ideo innexi, quia peculiarem etiam ſoluendi modum requirunt, cuius vtilitas in ſequentibus reddetur conſpicua. Ceterum vero ipſae propoſitiones non ſunt inelegantes et huic capiti, in quo omnes caſus motum rectilineum a potentiis productum reſpicientes exponere conſtituimus, neceſſario erant inferendae. Neque vero eas ad caſus ſpeciales accommodare idoneum viſum eſt, ob nimis prolixum calculum, ad quem fuiſſet perueniendum. His igitur relictis pergimus ad motus rectilineos in medio reſiſtente.

CA ſ
MOT enotante p func- $\frac{zdz}{dp} =$ ſubnormali facto habebitur
L ea recta paralle- is, ſemper enim iat vt corpus da- Ponatur AB= quadr. itur $P = \frac{bx}{(1+rp\sqrt{bx})^2}$ quadr. $\frac{P}{x}$.
ſi plu itiones inter ſe bus, arem etiam ſol- ter ſ itas in ſequenti- punct vero ipſae pro- ta in huic capiti, in eum a potentiis nſtituimus, ne- vero eas ad caſus tur ra iſum eſt, ob ni- bus al uiſſet peruenien- vim g ad motus recti- que e inuen
CA-

CAPUT QUARTUM
DE
MOTU RECTILINEO PUNCTI LIBERI IN MEDIO RESISTENTE.

DEFINITIO 18.

367.

Lex reſiſtentiae eſt poteſtas ſeu functio celeritatis corporis, cui ipſa reſiſtentia eſt proportionalis. *Sic ſi reſiſtentia eſt celeritatis quadrato proportionalis, lex reſiſtentiae eſt celeritatis quadratum.*

Corollarium 1.

368. Cognoſcitur igitur ex lege reſiſtentiae, ſi plura puncta aequalia diuerſis ferantur celeritatibus, quomodo ſe habeant motus diminutiones inter ſe. Atque dato celeritatis decremento vnius puncti, reliquorum quoque celeritatis decrementa inueniuntur.

Corollarium 2.

369. Si ergo pro vno celeritatis gradu datur ratio reſiſtentiae ad vim grauitatis, pro omnibus aliis quoque gradibus ratio inter reſiſtentiam et vim grauitatis ex lege reſiſtentiae innoteſcet. Atque ex hoc effectus reſiſtentiae in corpus motum inuenietur.