calculi specimina afferendi esset occasio. In duobus denique postremis capitibus motus corporum curuilineos sum contemplatus, qui oriuntur, quando potentiarum sollicitantium directio cum corporis proiecti directione non congruit. Hoc enim casu corpus perpetuo a recto tramite retrahitur et in linea curua moueri cogitur. In quinto quidem capite motum huiusmodi curuilineum in vacuo exposui, in sexto vero capite medii resistentiam simul consideraui. Primaria ergo problemata, quae in his capitibus continentur, in hoc versantur, vt corporis vtcunque proiecti et a quibuscunque potentiis sollicitati curua, in qua moueatur, determinetur, atque simul corporis celeritas in singulis curuae punctis indicetur, hocque tam in vacuo, quam in medio resistente. Ex his vero primariis propositionibus tunc aliae sunt natae, in quibus vel ex data curua a corpore descripta, vel ex data motus quadam indole tum potentiae sollicitantes tum resistentia quaeruntur. In quo negotio in id imprimis incubui, vt omnia tam a Newtono *quam ab aliis tractata hucque spectantia problemata complecterer, atque solutiones genuinas methodo analytica traderem. His igitur Tomus iste primus absoluitur, quem pariter ac sequentem ita conscripsi, vt qui in analysi tam finitorum quam infinitorum satis fuerit exercitatus, is mira facilitate omnia intelligere, atque sine vlla manuductione integrum hoc opus perlegere queat.*

)o(

postre- qui ori- oris pro- tuo a re- In quinto posui, in Primaria versan- tiis solli- ul corpo- m in va- propositio- a corpo- tiae solli- imprimis ta hucque as metho- absoluitur, si tam fi- ira facili- egrum hoc
APUT

CAPUT PRMUM
DE MOTU IN GENERE.

DEFINITIO I.

1.

Motus est translatio corporis ex loco, quem occupabat, in alium. Quies vero est permansio corporis in eodem loco.

Corollarium I.

2. Motus igitur et quietis ideae in alias res cadere non possunt, nisi quae locum occupant. Quare cum hoc sit corporum proprium, locum occupare, de solo corpore dici potest, quod moueatur vel quiescat.

Corollarium 2.

3. Atque haec motus quietisque idea ita est propria corpori, vt ad omnia prorsus corpora pertineat. Nullum enim existere potest corpus, quod non vel moueatur vel quiescat.

DEFINITIO 2.

4. Locus est pars spatii immensi seu infiniti, in quo vniuersus mundus consistit. Vocari hoc sen-

su acceptus locus solet absolutus, vt distinguatur a loco relatiuo, cuius mox fiet mentio.

Corollarium 1.

5. Quando igitur corpus successiue aliam atque aliam huius immensi spatii partem occupat, mouetur: at si perpetuo in eadem sede perseuerat, tum quiescit.

Corollarium 2.

6. Concipi autem animo solent huius spatii termini fixi ad quos corpora referuntur. Atque ista relatio est id, quod situs appellatur. Quae igitur corpora eundem seruant situm respectu horum terminorum ea quiescere dicuntur. Contra vero, quae situm suum mutant, moueri dicuntur.

Scholion 1.

7. Si hac significatione expositae voces accipiantur, vocari solent motus absolutus, quiesque absoluta. Atque hae sunt verae et genuinae istarum vocum definitiones, sunt enim accommodatae ad leges motus, quae in sequentibus explicabuntur. Quoniam autem immensi illius spatii eiusque terminorum, quorum in datis definitionibus mentio est facta, nullam nobis certam formare possumus ideam; loco huius immensi spatii eiusque terminorum considerare solemus spatium finitum, limitesque corporeos, ex quibus de corporum motu et quiete iudicamus. Sic dicere solemus, corpus, quod respectu horum limitum situm eundem conseruat, quiescere, id vero, quod situm eodem respectu mutat, moueri.

Scholion 2.

8. Quae hic de immenso et infinito spatio eiusque terminis dicta sunt, considerari debent vt conceptus pure mathematici. Qui, quanquam metaphysicis speculationibus videntur contrarii, nihilo tamen minus ad institutum nostrum recte adhibentur. Namque non asserimus, dare huiusmodi spatium infinitum, quod habeat limites fixos et immobiles; sed siue sit, siue non sit, non curantes, postulamus tantum, vt motum absolutum et absolutam quietem contemplaturus sibi tale spatium repraesentet, ex eoque de corporum statu vel quietis vel motus iudicet. Ratiocinium enim commodissime hoc modo instituetur, vt animum a mundo abstrahentes imaginemur nobis spatium infinitum atque vacuum, et in eo corpora collocata esse concipiamus, quae si in hoc spatio situm suum retinent, absolute quiescere, sin autem ex alia huius spatii parte in aliam transeunt, absolute moueri iudicanda sunt.

DEFINITIO 3.

9. Motus relatiuus est situs mutatio respectu cuiusdam spatii pro lubitu assumti. Atque quies relatiua est permansio in eodem situ respectu eiusdem spatii. *Ita terram pro hoc spatio accipientes, ea quiescere dicimus, quae in terra situm suum immutatum tenent; ea vero moueri, quae ex alio situ respectu terrae*

rae in alium progrediuntur, hocque ſenſu ſolem moueri dicimus. Simili modo in naui propulſa relatiue quieſcunt, quae eundem in naui tenent locum, et relatiue mouentur, quae in naui locum ſuum mutant.

Corollarium I.

10. Conueniunt motus relatiuus et quies relatiua cum abſolutis, quando ſpatium corpusue, cuius reſpectu motus et quies iudicantur, reuera quieſcit reſpectu ſpatii illius immenſi et infiniti. Si enim terra reuera quieſcit, quae huius reſpectu mouentur et quieſcunt, etiam abſolute mouentur et quieſcunt.

Corollarium 2.

11. Diſcrepant autem relatiuus motus et quies ab abſolutis, ſi ſpatium illud mouetur. Nam ſi terra reſpectu ſpatii infiniti non quieſcit, neque quae eius reſpectu quieſcunt, abſolute quieſcunt; atque etiam motus abſolutus differet a relatiuo. Quin imo fieri poteſt, vt corpus, quod relatiue mouetur, idem abſolute quieſcat.

Scholion.

12. Perſpicuum eſt ſtatum hunc corporum relatiuum vel motus vel quietis innumerabilibus modis poſſe eſſe diuerſum: prout enim aliud atque aliud aſſumitur ſpatium, cuius reſpectu motus et quies diiudicantur, alii prodibunt motus relatiui aliaque quies. Sic ſtellae fixae reſpectu telluris mouentur, quaelibet vero reſpectu reliquarum quieſcit. Atque planetae tam reſpectu terrae, quam ſtellarum fixarum mouentur. In ſequentibus autem ſemper et motum et quietem abſolutam intelligi volo, niſi expreſſe monuero etiam ad relatiua pertinere, quae afferentur.

PROPOSITIO I.
Theorema.

13. *Omne corpus, quod ſiue motu abſoluto ſiue relatiuo in alium locum transfertur, per omnia loca media tranſit, neque ſubito ex primo in vltimum poteſt peruenire.*

Demonſtratio.

Pro motu abſoluto ſi corpus ſubito ex loco primo in extremum perueniret, neceſſe eſſet, vt in primo fuiſſet annihilatum, ſtatimque in vltimo de nouo productum, id quod per leges naturae, niſi accedat miraculum, fieri non poteſt. Procedet igitur ex primo in proximum quendam, ex hocque in ſequentem, donec tandem in extremum perueniat. *Pro motu relatiuo* ſi corpus, quod in locum ſpatii infiniti ſubſtituitur, re vera quieſcit, ſuperius valet ratiocinium (10). At ſi moueatur, ipſum quoque per ſingula loca media tranſire debet, et propterea etiam motus relatiuus erit ſucceſſiuus, fietque per ſingula media loca. Q. E. D.

Corollarium I.

14. Sequitur ex his etiam motum non poſſe fieri in inſtanti, ſed tempore opus eſſe, quo ex alio

alio loco in alium perueniat corpus. Quia enim per ſingula loca media debet tranſire, hoc cum motu inſtantaneo conſiſtere non poteſt.

Corollarium 2.

15. Poterit igitur etiam via aſſignari, per quam corpus tranſiit, atque ea cognita, nullum in ea erit punctum, quod corpus ex primo loco in vltimum progreſſum non attigerit. Vocari autem ſolet haec via ſpatium percurſum.

Scholion.

16. Facile quoque eſt haec ad corpora circa axem rotata accommodare. Quoniam enim ipſum corpus ſitum ſuum non mutat: tamen motus ineſt in eius partibus, qui cognoſcetur, ſi ſingulae partes vt totidem diuerſa corpora ſeorſim conſiderantur. Singulae enim reſpectu ſpatii infiniti ſitum ſuum mutare deprehendentur, neque vllae quieſcent niſi quae in ipſo axe ſunt poſitae. Atque ſimili modo omnia corpora contemplari oportet, vt non ſolum ipſius totius, ſed ſingularum etiam partium ſitus eiusque mutatio inſpiciatur.

DEFINITIO 4.

17. Corpus aequabiliter vel vniformiter moueri dicitur, quod aequalibus temporibus per aequalia ſpatia currit. Motus vero inaequabilis eſt, qui aequalibus temporibus fit per ſpatia inaequalia, ſeu qui aequalia ſpatia inaequalibus temporis interuallis abſoluit.

Corol-

Corollarium 1.

18. Corpus igitur motu aequabili latum duplo tempore abſoluit ſpatium duplum, triplo triplum, atque in genere ſpatia percurſa ſunt temporibus proportionalia, temporaque ſpatiis viciſſim. Vt nauis ſuper mari aequabili motu incedens, ſi vna hora duo percurrit milliaria, eadem duabus horis quatuor abſoluet milliaria, tribus ſex, et n horis $2n$ milliaria.

Corollarium 2.

19. Quamobrem ſi datur motus aequabilis, habebitur ex eo accurata temporis menſura, quae niſi ex motu cognoſci non poteſt. Metiendis enim ſpatiis, quae corpus aequabiliter motum percurrit, innoteſcet ſimul temporum, quibus ea erant percurſa, ratio.

Scholion.

20. Neque vero aliunde habemus temporis in annos, dies, et horas diuiſionem, niſi ex motu, quem tanquam aequabilem ſpectamus. Poſita enim terra quieſcente crediderunt veteres ſolem motu aequabili ferri, tempusque, quo circa terram reuoluitur, diem appellauerunt. Porro ſumſerunt ſtellarum fixarum circa terram motum quoque eſſe aequabilem, atque tempus, quo ſol in eundem reſpectu ſtellarum fixarum locum, reuertitur, annum poſuerunt. Denique haec tempora in partes aequales diuiſerunt, hocque modo horas, et minuta ſunt

ade-

adepti. Facile autem patet, ſi motus iſti non ſint, vt creduntur, aequabiles, hanc quoque temporum menſuram eſſe erroneam. Atque re ipſa recentiores aſtronomi in his motibus inaequalitatem detexerunt, et inuenerunt dies omnes non eſſe aequales inter ſe, quamobrem correctionem etiam adhibere ſolent ex aliis magis aequabilibus motibus; quam temporis aequationem vocant, ex qua inaequalitas dierum cognoſcitur.

DEFINITIO 5.

21. Omne corpus, quod mouetur, celeritatem ſeu velocitatem habere dicitur, eaque menſuratur ſpatio, quod id corpus aequabiliter motum dato tempore percurrit. *Scilicet quando corpus* B *eodem tempore duplum ſpatium motu aequabili abſoluit, quo corpus* A *etiam aequabiliter motum ſimplum percurrit, corpus* B *duplo maiorem habere dicitur celeritatem, quam corpus* A.

Corollarium 1.

22. Quia igitur in motu aequabili corpus aequabilibus temporibus aequalia percurrit ſpatia (17.), habebit corpus aequabiliter motum perpetuo eandem celeritatem, ſeu velocitatem. In motu vero inaequabili corpus ſucceſſiue aliam atque aliam induit celeritatem.

Corollarium 2.

23. Celeritas autem, quam corpus inaequabiliter motum in quouis ſpatii percurſi puncto habet, menſuranda eſt ex ſpatio, quod ea celeritate aequabiliter motum dato tempore percurrere poſſet.

Corollarium 3.

23. Celeritas porro corporis aequabiliter moti abſolute menſurari poteſt ſpatio, quod dato tempore verbi gratia vno minuto ſecundo percurritur. Atque is celeritatem corporis cuiuspiam perfecte cognoſcere cenſendus eſt, qui ſpatium definire valet, quod corpus ea celeritate motum tempore minuti ſecundi percurrit.

Scholion.

24. Maxime etiam eſt in vſu haec celeritatis metiendae ratio. Nautas enim nauis celeritatem exploraturos videmus ſpatium menſurare, quod nauis dato tempore percurrit. Vulgo autem accipiunt interuallum quatuor horarum, et inueſtigant, quot milliaria nauis hoc tempore abſoluat. Ex quo ſimul intelligitur, quot pedes nauis tempore minuti ſecundi percurrat, ſiquidem motu aequabili progrediatur.

PROPOSITIO 2.

Theorema.

25. *Duorum corporum aequabili motu progredientium celeritates ſunt directe vt ſpatia quaecunque percurſa et inuerſe vt tempora, quibus ea ſpatia erant percurſa.*

Demonſtratio.

Sint duo corpora A et a, eorumque celeritates C et c; percurrat illud A ſpatium S tempore T, hoc vero a ſpatium s tempore t. Iam quia in motu aequabili ſpatia ſunt temporibus proportionalia (18.), determinabitur ſpatium, quod corpus a tempore T abſoluit, ex hac proportione $t:T = s:\frac{sT}{t}$: mouebitur ergo corpus a tempore T per ſpatium $\frac{sT}{t}$. At corpus A mouetur eodem tempore T per ſpatium S. Celeritates vero corporum menſurari debent ſpatiis eodem tempore percurſis (18). Quocirca erit $C:c = S:\frac{sT}{t}$ ſeu $C:c = \frac{S}{T}:\frac{s}{t}$. Ex quo ſequitur celeritates eſſe directe vt ſpatia et inuerſe vt tempora, quibus ea ſunt percurſa. Q. E. D.

Corollarium 1.

26. Ex vltima analogia prodit haec aequatio $\frac{CT}{S} = \frac{ct}{s}$. In quouis igitur motu aequabili factum ex celeritate in tempus, ſi diuidatur per ſpatium eo tempore percurſum, dabit ſemper eundem quotum.

Corollarium 2.

27. Erit etiam $T:t = \frac{S}{C}:\frac{s}{c}$. Ex quo ſequitur tempora eſſe in ratione compoſita ex directa ſpatiorum et inuerſa celeritatum, ſeu eſſe vt ſpatia per celeritates diuiſa.

Corollarium 3.

28. Deinde inuenta proportio transmutatur etiam in hanc $S:s = CT:ct$. Ex qua colligitur ſpatia motu aequabili percurſa eſſe in ratione compoſita ex ratione celeritatum et ratione temporum.

Co-

Corollarium 4.

29. Data igitur celeritate corporis aequabiliter moti vna cum ſpatio quouis deſcripto, innotescet tempus, quo hoc ſpatium eſt percurſum; diuidendo ſcilicet ſpatium per celeritatem. Cum enim hunc quotum tempori ſemper proportionalem eſſe oſtenderimus, poterimus eundem pro temporis menſura vſurpare.

Corollarium 5.

30. Similiter celeritas poterit exprimi per ſpatium percurſum diuiſum per tempus, atque ſpatium etiam ipſum per factum ex tempore in celeritatem.

Scholion 1.

31. Si enim celeritas tanta ſit, vt corpus ea motum tempore minuti ſecundi abſoluat ſpatium trium pedum, et propterea celeritatem exponamus numero 3; poterimus inuenire tempus, quo 60 pedes v. gr. eodem motu abſoluuntur. Diuidatur enim 60 per 3 quotus 20 indicabit hos 60 pedes 20 minutis ſecundis percurri. Et ſi quaeratur ſpatium tempore 12 minutis ſecundis percurſum, prodibit id 36 pedum. Atque etiam corporis 6 minutis ſecundis 48 ped. percurrentis proueniet celeritas 8, quae indicat hoc corpus minuto ſecundo 8 ped. percurrere.

Scholion 2.

32. Atque hinc tempora, ſpatia et celeritates menſurandi rationem in ſequentibus ſemper adhibe-

bi-

bimus. Tempora nempe in minutis fecundis perpetuo exprimemus, et fpatia pedibus, iisque Rhenanis. Celeritates vero, vt iam eft factum, denotabimus numero pedum, qui minuto fecundo percurrunt. Infra quidem commodior celeritates determinandi ratio occurret, qua deinceps fumus vfuri, fed ea tamen ex hac nafcitur, ad eamque facile reuocatur,

PROPOSITIO 3.

Theorema.

33. *In motu quantum vis inaequabili, minima fpatii elementa motu aequabili percurri concipi poffunt.*

Demonftratio.

Quemadmodum enim in geometria curuarum linearum elementa vt lineolae rectae confiderantur, ita etiam fimili modo in mechanica motus inaequabilis in infinitos aequabiles refoluitur. Vel enim reuera elementa aequabili motu percurruntur, vel mutatio celeritatis per huiusmodi elementa eft tantilla, vt incrementum aut decrementum fine errore negligi poffit. In vtroque cafu ergo apparet propofitionis veritas. Q. E. D.

Corollarium 1.

34. Omnis ergo celeritatis mutatio in motu inaequabili in fingulorum elementorum initiis fieri concipienda eft, quia integra elementa aequabili motu percurri ponuntur.

Co-

Corollarium 2.

35. Quare fecundum notandi modum analyfeos infinite paruorum, fi celeritas in primo elemento fuerit c, erit celeritas in fecundo $c+dc$, in tertio $c+2dc+ddc$, et ita porro.

Scholion.

36. Demonftrationis datae vis hoc nititur fundamento, quod celeritatis mutatio, quae fieri poteft, dum elementum infinite paruum percurritur, debeat effe infinite exigua et euanefcere prae celeritate, quam corpus iam habet, hoc enim nifi effet, generaretur motus finitus in inftanti, quod effet abfurdum. Interim tamen videtur haec propofitio admitti non poffe, fi ipfe motus et celeritas eft infinite parua, quo cafu incrementum vel decrementum momentaneum habere poteft rationem finitam ad illam. Sed de hoc infra videbimus, vbi motus generatio confiderabitur.

PROPOSITIO 4.

Theorema.

37. *Moueatur corpus motu vtcunque inaequabili per lineam* AM, *data vero fit celeritas corporis in quouis loco: oportet determinare tempus, quo arcus* AM *abfoluitur.* Tab. I. Fig. 2.

Solutio.

Sit fpatium AM, fiue fit linea recta fiue curua, $=s$, et celeritas, quam corpus habet in M fit c, quae erit functio quaedam ipfius s. Ab M accipiatur elementum Mm, quod igitur motu aequabili idque celerileritate c percurri concipiendum eſt. Vocato elemento Mm, ds; erit tempus, quo hoc elementum pecurritur $= \frac{ds}{c}$ (29.). Integrando ergo habebitur tempus, quo totus arcus AM abſoluitur $= \int \frac{ds}{c}$. Ad integrale vero talis adiici debebit conſtans, quae reddat hoc tempus $= 0$, ſi ponitur $s = 0$, ſecundum notas integrationis regulas. Q. E. I.

Exemplum 1.

38. Sit celeritas in M vt poteſtas quaecunque ſpatii iam deſcripti AM, ſcilicet $c = s^n$; erit $\int \frac{ds}{c} = \frac{s^{1-n}}{1-n}$. Ad quod conſtantem non opus eſt adiicere ſi $n < 1$, vel negatiuum habeat valorem: dabit enim ipſum $\frac{s^{1-n}}{1-n}$ tempus, quo arcus AM percurritur. At ſi fuerit $1-n$ numerus negatiuus habebitur $\int \frac{ds}{c} = \frac{-1}{(n-1)s^{n-1}}$. Ad quod conſtans $\frac{1}{(n-1)0^{n-1}}$ i. e. infinita quantitas debet addi, quo totum habeatur tempus per AM. Tempore ergo in his caſibus opus eſt infinito, quo corpus ex A in alium quemuis locum M perueniat. Quamobrem perpetuo in A perſiſtet, neque vnquam inde egredietur. Fit hoc vero, quoties eſt n numerus poſitiuus vnitate maior. Si vero eſt $n = 1$, tempus nequidem algebraice poteſt exhiberi, prouenit enim $\int \frac{ds}{s} = ls$, ad quod etiam quantitatem infinitam addi oporteret, quo tempus per AM haberetur.

Co-

Corollarium 1.

39. In mundo ergo alii caſus ſubſiſtere nequeunt, niſi in quibus celeritates motus ſaltem principio ſint vt ſpatiorum percurſorum poteſtates exponentis minoris, quam eſt vnitas.

Corollarium 2.

40. Progrediatur corpus in recta AM, ſitque in quouis loco celeritas eius vt applicata MN curuae AN, quae cum recta AM in A concurrat, ita vt celeritas corporis in principio A ſit nulla. Perſpicuum eſt ex praecedentibus, quo tempus per AM fiat finitum, oportere tangentem AB in A eſſe ad AM perpendicularem. Coincidente enim M in A debet MN fieri $= AM^n$, et n numerus vnitate minor ſcilicet fractio ex quo normalitas tangentis ſequitur. Sin vero tangens AB angulum conſtituat acutum vel infinite paruum cum AM, tempus per AM fiet infinitum. Tab. I. Fig. 2.

Exemplum 2.

41. Moueatur corpus per rectam AB ita, vt deſcripto ſuper ea ſemicirculo ANB celeritas in quouis puncto M ſit vt applicata circuli in eo loco MN. Id quod ita poteſt intelligi, celeritatem in M tantam eſſe, qua corpus minuto ſecundo poſſit percurrere ſpatium $= m. MN$. Ponatur huius ſemicirculi radius $AC = a$, ſpatium iam percurſum $AM = s$; erit $MN = \sqrt{(2as - ss)}$. Celeritas ergo in M, quam poſuimus c, erit hoc caſu $= m\sqrt{2as-ss}$. Tab. I. Fig. 3.

Id

Idcirco tempus, quo ſpatium AM percurritur, erit $=\int\frac{ds}{m\surd(2as-ss)}=\frac{1}{ma}\int\frac{ads}{\surd(2as-ss)}$. At $\int\frac{ads}{\surd(2as-ss)}$ denotat ipſum circuli arcum AN. Quamobrem tempus, quo ſpatium AM percurritur erit $=\frac{AN}{m.AC}$ minut. ſecundis. Atque tempus, quo corpus ab A ad B mouetur erit $=\frac{ANB}{m.AC}$ min. ſec. Eſt vero quam proxime $\frac{ANB}{AC}=\frac{22}{7}$. Ergo tempus hoc erit $=\frac{22}{7.m}$ minutis ſecundis. Ex quo intelligitur quantacunque ſit linea AB, eam perpetuo eodem tempore percurri.

Corollarium 3.

Tab. I. Fig. 1. 42. Ex ſolutione problematis apparet etiam eodem tempore, quo corpus ex A in M peruenit, idem motu retrogrado ex M in A peruenturum, ſi modo in vtroque motu in iisdem locis aequales habeat celeritates.

Corollarium 4.

Tab. I. Fig. 4. 43. Repraeſentent curuae AN applicatae MN celeritates, quas corpus in recta AN motum habet in ſingulis punctis M, conſtituat autem curua in A cum recta AM angulum recto minorem. His poſitis iam eſt oſtenſum, tempus, quo corpus ex A in M perueniet, fore infinite magnum. Quare etiam motu retrogrado corpus ex M verſus A latum poſt tempus demum infinitum i. e. nunquam in A pertingit, quamuis vbique, niſi in A habeat celeritatem finitam.

PRO-

r, erit
enotat
mpus,
ut. ſe-
B mo-
oxime
tis ſe-
t lines
ri.
: etiam
ruenit,
um, ſi
ales ha-
ae MN
n habet
na in A
is poſi-
A in M
am mo-
m poſt
A per-
celerita-
PRO-

PROPOSITIO 5.
Theorema.

44. *Moueantur duo corpora in rectis* AM *et* am *exprimanturque eorum celeritates applicatis curuarum* AN *et* an *ſimilium. Dico haec corpora percurſura ſpatia homologa* AM *et* am *eodem tempore.* Tab. I. Fig. 5

Demonſtratio.

Sint igitur AM et *am* ſpatia homologa, habebunt ea eandem rationem, quam applicatae MN et *mn*, ſit iſta ratio $m:n$; erit, poſitis AM$=s$, et MN $=c$, $am=\frac{ns}{m}$ et $mn=\frac{nc}{m}$. Eſt vero tempus per AM $=\int\frac{ds}{c}$ (37.), tempus autem per *am* habebitur ponendo $\frac{nds}{m}$ loco ds, et $\frac{nc}{m}$ loco c, in $\int\frac{ds}{c}$. Hoc vero facto iterum prodit $\int\frac{ds}{c}$: quare vtrumque tempus per AM et *am* erit $\int\frac{ds}{c}$, ſunt igitur ea aequalia. Q. E. D.

Corollarium 1.

45. Intelligitur hinc quoque ratio eius, quod §. 41. eſt dictum, ſunt enim circuli omnes curuae ſimiles et diametri ſpatia homologa.

Corollarium 2.

46. Sit curuae AN parameter a, quae ſiue maior ſiue minor accipiatur, curua AN mutetur in aliam ſui ſimilem. Hoc vero vt eueniat, huiusmodi debet eſſe aequatio pro curua AN, vt applicata c aequetur functioni ipſarum a et s vnius tantum dimenſionis. Pro variis autem valoribus ipſius a, s exprimet ſpatia homologa, ſi accipiatur $=a$ vel

 na.

na. Quoties igitur c huiusmodi definitur aequatione, ſpatia na, ſiue magnum ſiue paruum ponatur a, aequalibus percurruntur temporibus.

Scholion.

47. Quemadmodum, ſi c aequatur functioni ipſarum a et s vnius dimenſionis, tempora per a vel na ſunt omnia aequalia, quicquid ſit a: Ita etiam ſi fuerit c aequale functioni ipſarum a et s, quae habeat m dimenſiones, tempora per a vel na, quicquid ſit a, tenebunt rationem a^{1-m}. Nam $\frac{c}{a^{m-1}}$, erit functio vnius dimenſionis ipſarum a et s, quae ponatur k. Erit ergo $c=a^{m-1}k$, et $\int\frac{ds}{c}=a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$. At $\int\frac{ds}{k}$ dabit, poſito $s=a$ vel na, quantitatem conſtantem, vtcunque varietur a (46.). Quamobrem $a^{1-m}\int\frac{ds}{k}$, dabit multiplum quoddam poteſtatis a^{1-m}. Erit conſequenter tempus per na vt a^{1-m}.

DEFINITIO 6.

48. Scala celeritatum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant celeritates, quas corpus motum habet in locis reſpondentibus ſpatii, quod percurrit.
Tab. I. *Ita corporis in recta* AM *moti ſcala celeritatum eſt cur-*
Fig. 6. *ua* AN, *cuius applicatae* MN *exponunt celeritatem corporis in ſingulis punctis* M.

DEFINITIO 7.

49. Scala temporum eſt curua, cuius applicatae repraeſentant tempora, quibus partes ſpatii percurſi reſpondentes abſoluuntur. *Ita ſi curua* AT *fuerit eiusmodi, vt eius applicata quaeuis* MT *exhibeat tempus, quo ſpatium* AM *percurritur, curua* AT *erit ſcala temporum.*

Corollarium.

50. Quemadmodum ex data ſcala celeritatum AN inueniri debeat ſcala temporum, iam ex praecedente problemate (37.) apparet. Scilicet ſi dicatur ſpatium AM$=s$, celeritas in M i. e. MN$=c$, et tempus, quo AM percurritur i. e. MT$=t$, erit $t=\int\frac{ds}{c}$. Ex data igitur curua AN conceſſis quadraturis conſtrui poteſt curua AT.

PROPOSITIO 6.

Problema.

51. *Data ſcala temporum* AT *inuenire et conſtruere ſcalam celeritatum* AN.

Solutio.

Ponantur vt ante AM$=s$, MN$=c$, et MT$=t$ oportebit ex data aequatione inter s et t inueniri aequationem inter s et c. Facile vero hoc efficietur ex ſupra inuento canone $t=\int\frac{ds}{c}$. Fit enim differentiando $dt=\frac{ds}{c}$, atque $c=\frac{ds}{dt}$. Ducatur ergo ad curuam AT in T normalis TO erit $\frac{ds}{dt}=\frac{MT}{MO}$. Fiat ergo vt MO ad MT, ita linea quaedam vnitate expreſſa, qua minunutum ſecundum indicatur, ad quartam proportionalem, quae erit $=$MN. Sumatur igitur ab M interuallum MQ$=1$, et ducatur QN parallela normali TO, erit punctum N in ſcala celeritatum quaeſita. Q. E. I.

 Exem-

Exemplum I.

52. Sit fcala temporum linea recta ad AM vtcunque inclinata; erit $t = ms$, et $dt = mds$. Prodibit igitur $c = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{m}$. Scala celeritatum ergo erit linea recta ipfi AN parallela, atque corpus motu feretur aequabili.

Exemplum 2.

53. Sint tempora vt poteftates quaecunque fpatiorum defcriptorum, feu $t = s^m$, ideoque $dt = ms^{m-1}ds$. Ex quo erit $c = \frac{1}{ms^{m-1}} = \frac{1}{m}s^{1-m}$. Quare fi curua AT fuerit parabola Appolloniana i. e. $t = s^{\frac{1}{2}}$; erit $m = \frac{1}{2}$, atque $c = 2s^{\frac{1}{2}}$. Ex quo apparet hoc cafu fcalam celeritatum quoque effe huiusmodi parabolam.

Corollarium.

54. Intelligitur etiam, fi detur aequatio inter c et t, quomodo inueniendum fit fpatium percurfum s, atque vtraque fcala celeritatum et temporum. Quia enim eft $c = \frac{ds}{dt}$; erit $ds = cdt$, et $s = \int cdt$.

Scholion.

55. Monendum hic eft, ifta, quae hactenus de fcalis celeritatum et temporum funt tradita, non folum ad motum abfolutum fpectare, fed etiam ad relatiuum pertinere. Nondum enim ipfa motus natura eft confiderata, neque quicquam eft affumtum, quod motui abfoluto effet proprium. Nunc vero afferemus quasdam propofitiones, quae motui ab-

ad AM
. Pro-
go erit
motu fe-
ecunque
ne $dt =$
Quare fi
$s^{\frac{1}{2}}$; erit
afu fca-
bolam.
tio in-
m per-
et tem-
$s = \int cdt$.
actenus
a, non
iam ad
motus
affum-
Nunc
motui
ab-

abfoluto funt peculiares, ex quibusque quodammodo interna inter motus abfolutos et relatiuos differentia poterit perfpici.

PROPOSITIO 7.

Theorema.

56. *Corpus abfolute quiefcens perpetuo in quiete perfeuerare debet, nifi a caufa externa ad motum follicitetur.*

Demonftratio.

Concipiamus corpus hoc exiftere in fpatio infinito atque vacuo, perfpicuum eft nullam effe rationem, quare potius in hanc vel illam plagam moueatur. Confequenter ob defectum fufficientis rationis, cur moueatur, perpetuo quiefcere debebit. Neque vero haec ratio in mundo ceffat; quamuis obiici poffet effe in mundo fufficientem rationem, quare in hanc potius, quam illam plagam, cedat. Etenim non eft credendum in fpatio infinito illo et vacuo defectum fufficientis rationis ad motum vnicam effe caufam permanfionis in quiete; fed nullum eft dubium, quin in ipfa corporis natura fita fit caufa huius phaenomeni. Defectus fcilicet fufficientis rationis non poteft pro vera et effentiali cuiusquam euentus caufa haberi, fed tantum veritatem idque rigide demonftrat. Quin et fimul indicat in ipfa rei natura occultam effe caufam veram effentialem, quae non ceffat, ceffante illo fufficientis rationis defectu. Ita Archimedis demonftratio de aequilibrio bilancis vtrinque fibi fimilis, non folum in vacuo, fed etiam in mundo rei veritatem euincit. Alia autem eaque gogenuina datur huius aequilibrii ratio, quae etiam in mundo locum habet. Cum igitur in vacuo ſpatio verum ſit corpus quieſcens in quiete permanere debere; erit in ipſa corporis natura etiam huius rei ratio poſita, propter quam in mundo quoque corpus, quod ſemel quieſcit, niſi ab alia cauſa vrgeatur, in quiete perſiſtere cogatur. Q. E. D.

Corollarium 1.

57. Eſt igitur lex in ipſa rerum natura fundata, quod omne corpus quieſcens, niſi ab alia cauſa externa ad motum ſollicitetur, in quiete debeat perſeuerare.

Corollarium 2.

58. Quemadmodum fundamentum huius demonſtrationis ex ipſa quietis abſolutae natura eſt petitum, perperam iſta lex ad quietem relatiuam extenditur.

Scholion.

59. Experientia autem ipſa edocemur hanc legem in quiete relatiua non valere. Videmus enim corpora in naui relatiue quieſcentia, ſi nauis ſubito concutiatur, in quiete non permanere, ſed ſimul concuti et de loco ſuo moueri; etiamſi ante quieuiſſent, nullaque acceſſiſſet cauſa ea commoueus.

Corollarium 3.

60. Simili modo, quo euicimus corpus ſemel quieſcens perpetuo quieſcere debere, niſi a cauſa externa afficiatur, poteſt oſtendi, corpus, quod nunc

nunc quieſcit abſolute, ante hac ſemper quoque quieuiſſe, ſiquidem ſibi ipſi fuerit relictum. Vti enim nulla eſt ratio, quare potius ex hac, quam illa plaga, in eum, quo nunc ſtat, locum peruenerit, ita concludendum eſt etiam in eo loco antea ſemper conſtitiſſe.

Corollarium 4.

61. Corpus igitur, quod ſemel quieſcit, ſi vlla cauſa externa in id neque agat, neque egerit, id non ſolum in poſterum quieſcet ſemper, ſed etiam ante perpetuo quieuiſſe ſtatuendum eſt.

Corollarium 5.

62. Sequitur ex hoc corpus ſemel abſolute motum in quietem peruenire nunquam poſſe ſibi relictum. Nam ſi tandem quieſceret, idem oporteret antea quoque ſemper quieuiſſe, quod eſt contra hypotheſin.

PROPOSITIO 8.

Theorema.

63. *Corpus abſolutum habens motum, aequabiliter perpetuo mouebitur, et eadem celeritate iam antea quouis tempore fuit motum; niſi cauſa externa in id agat aut egerit.*

Demonſtratio.

Si enim corpus motum celeritatem non conſeruaret ſemper eandem, tum vel augeri deberet vel diminui eius celeritas. Hoc autem caſu ad quietem inclinaret quod, quia nunquam quietem conſeſequi poteſt (62.) accidere nequit. Illo caſu vero ex quiete proueniſſe cenſendum eſſet, quod aeque foret abſurdum. Praeterea ſi hoc corpus in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, eiusque via, qua eſt ingreſſum et ingredietur, conſideretur; nulla eſt ratio, quare potius in hoc maiorem minoremue habeat celeritatem, quam in illo loco, quocirca perpetuo eadem moueri debebit celeritate. Q. E. D.

Corollarium.

64. Quoties igitur corpus motum vel celerius vel tardius ingredi videmus, cauſae externae hanc mutationem adſcribere debemus.

PROPOSITIO 9.
Theorema.

65. *Corpus abſoluto motu praeditum progredietur in linea recta, ſeu ſpatium, quod deſcribit, erit linea recta.*

Demonſtratio.

Nulla eſt enim ratio, ſi corpus hoc in ſpatio infinito et vacuo poſitum concipiatur, quare in hanc potius quam aliam regionem a linea recta declinaret. Ex quo concludendum eſt, hoc ab ipſa corporis natura pendere, vt motum in linea recta progrediatur. Quamobrem in mundo etiam, vbi quidem hoc ſufficientis rationis principium ceſſat, nihilominus ſtatuendum eſt, omne corpus motum in directum progredi debere, niſi ſcilicet impediatur. Q. E. D.

Co-

Corollarium 1.

66. Ex his duabus propoſitionibus conficitur iſta lex vniuerſalis: omne corpus motu praeditum aequabiliter in linea recta progredi.

Corollarium 2.

67. Corpus ergo quod a cauſis externis coactum fuit in linea curua AM progredi, ſi cum in M peruenerit, cauſae hae externae ſubito ceſſent, tum ea celeritate, quam habebat in M aequabiliter ſecundum directionem, quam ipſo tempore liberationis habuit, in recta progredietur. Eſt vero tangens MT nil aliud, niſi curuae elementum in M in directum productum, quamobrem, corpus in M ſibi relictum in tangente MT aequabiliter ea celeritate, quam in M habuit, progredietur. Tab. I. Fig. 7.

Scholion 1.

68. Has de abſoluta quiete et motu leges auctores in vna ſunt complexi. Hancque *Neutonus* in Principiis Phil. ita proponit, vt dicat: Omne corpus perſeuerare in ſtatu ſuo quieſcendi vel mouendi vniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Corollarium 3.

69. Pertinent autem hae leges de motus continuatione ad motus tantum abſolutos, neque eae in motibus relatiuis vim ſuam retinent. Quemadmodum enim fieri poteſt, vt corpus relatiue quieſcens non perſeueret in quiete, etiamſi a nullis cau-

D ſis

ſis externis agitetur (59.), ita etiam corpora motum habentia relatiuum non ſemper aequabiliter in directum relatiue mouebuntur.

Corollarium 4.

70. Quando igitur corpus a nullis cauſis externis eſt ſollicitatum, id, quomodocunque inaequabiliter relatiue moueatur, tamen vel abſolute quieſcere vel vniformiter in directum moueri cenſendum eſt. Ex hocque quodammodo poteſt intelligi, quantum ſtatus relatiuus ab abſoluto differat.

Scholion 2.

71. In Aſtronomiae principiis mechanicis, prout a *Neutono* ſunt tradita, ſtatuuntur ſol et ſtellae fixae a cauſis externis vel omnino non affici, vel tam parum, vt effectus ſit inſenſibilis. Quanquam igitur ſolem neque aequabiliter neque in directum progredi videmus reſpectu terrae, tamen eum abſolute vel quieſcere vel vniformiter in directum moueri certum erit. Difformitates ergo illae in motu ſolis obſeruatae in ipſa terra poſitae ſint neceſſe eſt.

DEFINITIO 8.

72. Motus directio ſiue determinatio eſt linea recta in qua corpus motum vniformiter progredi conatur, et re ipſa progreditur, niſi a cauſis externis impediatur.

Corollarium.

73. Corpus igitur habens motum abſolutum, niſi ab aliis cauſis afficiatur, perpetuo eandem motus directionem eandemque celeritatem conſeruabit.

DE-

mo-
ter in
xter-
abili-
ſcere
m eſt.
ntum
nicis,
r ſtel-
i, vel
quam
ctum
n ab-
mo-
motu
e eſt.
eſt li-
ogre-
xter-
utum,
mo-
uabit.
DE-

DEFINITIO 9.

74. Vis inertiae eſt illa in omnibus corporibus innata facultas vel in quiete permanendi, vel motum vniformiter in directum continuandi.

Corollarium 1.

75. Quanquam enim permanſionem in quiete, motusque vniformem continuationem in directum ex principio ſufficientis rationis demonſtrauimus, tamen iam notauimus hanc non eſſe cauſam phaenomeni efficientem, ſed eam in ipſa corporis natura eſſe ſitam. Haec igitur ex corporum natura pendens cauſa ſtatus ſui conſeruationis eſt id, quod vis inertiae appellatur.

Scholion.

76. *Keplerus*, qui primus hanc vocem formauit, tribuit eam ei vi, quam omnia habent corpora, reſiſtendi omni illi, quod ea de ſtatu ſuo deturbare conatur; atque haec vox inertiae melius cum hac reſiſtentiae ideae congruit, quam illa perſeuerantiae, cum qua nos coniunxinius. Sed facile intelligitur has definitiones re a ſe inuicem non differre, eadem enim eſt vis motum vel quietem continuans, et quae impedimentis reſiſtit. Malui vero hac vti definitione, quam Kepleriana, quia nondum conſtat, quomodo corpora viribus ſollicitantibus reſiſtant. Praeterea vero haec ipſa reſiſtendi vis originem habet ſuam ab hac quietem motumue continuandi facultate; ideoque ex hac debet explicari.

D 2 PRO-

PROPOSITIO 10.

Theorema.

77. *Quando ſpatium, ex quo motus relatiuus determinatur, abſolute vel quieſcit vel mouetur vniformiter in directum; tum leges datae de motu et quiete etiam in ſtatu corporum relatiuo valebunt.*

Demonſtratio.

Si ſpatium ex quo motus relatiuus diiudicatur abſolute quieſcit, propoſitum per ſe eſt clarum; Nam hoc caſu quies et motus relatiui cum abſolutis congruunt, adeoque omne corpus etiam relatiue vel perpetuo quieſcet vel vniformiter mouebitur in directum (10.). Sin vero illud ſpatium ipſum moueatur vniformiter in directum, tum ea corpora, quae relatiue quieſcunt, eundem habebunt motum abſolutum, quem habet ipſum ſpatium. Quare ea quoque vniformiter indirectum progrediuntur, huncque motum ex ſua natura poterunt continuare: vt igitur et hoc caſu lex (66.) obſeruetur. Corpus vero quod relatiue mouetur vniformiter in directum, id etiam, ſi ipſum ſpatium vniformem habet motum rectilineum, aequabiliter in recta progredietur abſolute, quemadmodum tum ex ſequente apparebit propoſitione, tum per ſe perſpicuum eſt. Motus ergo hic relatiuus quoque legi eſt conſentaneus et propterea ſine vi externa continuari poterit. Q. E. D.

Co-

Corollarium 1.

78. Corpus igitur a nulla cauſa externa affectum, quod relatiue vel quieſcit vel vniformiter mouetur in directum, indicio erit ipſum ſpatium ad quod eius motus iudicatur, abſolute vel quieſcere, vel in directum aequabiliter moueri.

Corollarium 2.

79. Talis quoque motus relatiuus in ſuo ſtatu per ſe ipſum perpetuo conſeruabitur. Non ſolum enim ipſum, quod mouetur, corpus abſolute mouetur vniformiter in directum; ſed etiam ſpatium illud, quo relatio aeſtimatur, iuxta eandem legem progreditur. Quamobrem vterque motus per ſe continuabitur, atque motus relatiuus iſte in hoc ſtatu nulla accedente cauſa externa perſeuerabit.

Corollarium 3.

80. Quia omnis idea, quam de motu habemus eſt relatiua (7.), hac quoque leges non ſufficiunt ad cognoſcendum, qualis ſit cuiuspiam corporis motus abſolutus. Quando enim corpus a nulla cauſa externa affectum aequabiliter in recta progredi videmus, plus inde concludere non poſſumus, quam hoc corpus etiam abſolute vel vniformiter in directum moueri vel quieſcere. Quantus vero ſit eius motus abſolutus definire non licet, neque quam habeat directionem.

Corollarium 4.

81. Quae igitur ex hac corporum natura, quod in ſtatu ſuo vel quietis vel motus vniformis in

 irectum permaneant, deducentur, non folum ad motum et quietem abfolutam pertinebunt, fed etiam ad eum ftatum relatiuum, quo fpatium corpusue, ex quo motus aeftimatur, vniformiter in directum progreditur.

Scholion.

82. Atque etiam non admodum erimus folliciti de motu abfoluto, cum ifte relatiuus iisdem contineatur legibus. Et propterea motum hunc relatiuum ipfum faepius mutabimus in alios huiusmodi: ita tamen vt trauitae leges obferuentur; fi fcilicet eum, relatione ad aliud corpus vniformiter in directum quoque progrediens facta, contemplabimur. Qua ratione non ceffabit aequabiliter in recta progredi, idque innumerabilibus modis fieri poteft, ex quibus, qui commodiffimus erit, feligi poterit.

PROPOSITIO II.
Problema.

Tab. I. Fig. 8. 83. *Moueatur corpus abfolute aequabiliter in recta* AL, *aliudque corpus aequabiliter quoque in recta* AM. *Quaeritur corporis in* AL *abfoluto motu lati motus relatiuus refpectu corporis alterius in* AM *progredientis.*

Solutio.

Sit celeritas corporis in AL progredientis, a; et celeritas alterius in AM moti, b; fimulque egrediantur haec corpora ex puncto A. Perfpicuum eft fi fumantur duo fpatia AL, AM in ratione celeritatum a et b, ambo corpora eodem momento in L et M peruenire. Ducta igitur recta ML cum recta AM angulum faciente AML, cuius finus eft ad finum anguli ALM, quem cum AL efficiet, vt AL ad AM i. e. vt a ad b, defignabit L locum, in quo reperietur corpus in AL progrediens eodem momento, quo alterum in M exiftit. Quia vero corporis illius motus relatiuus refpectu huius defideratur, hoc, quod in AM reuera mouetur, vt quiescens in A debet confiderari. Puncto igitur M cogitatione in A translato, perueniet L in N ducta AN parallela et aequali ipfi ML ex A. Simili modo quando corpus in AM motum peruenit in locum proximum m, alterum in l reperietur, eritque ml parallela ipfi ML, quia $Mm:Ll=b:a=AM:AL$. Puncto vero m fimili modo in A translato fumendo $An=ml$ perueniet l in n, eritque n in eadem recta AN. Ex quo fequitur corpus abfolute in AL motum relatiue in recta AN moueri. Celeritas autem relatiua erit ad abfolutam vt Nn ad Ll, feu vt ML ad AL. Quae ratio cum fit conftans ob triangulum ALM fpecie datum corpus abfolute in AL aequabiliter motum, relatiue quoque aequabiliter in recta AN progredietur. Pofitio vero rectae AN inuenietur fumendo angulo LAN tanto, vt eius finus fit ad finum anguli NAM, vt b ad a. Celeritas denique abfoluta per AL erit ad celeritatem relatiuam per AN, vt finus anguli MAN ad finum anguli LAM. Q. E. I.

m ad mo- etiam ad usue, ex directum
mus folli- us iisdem um hunc os huius- tur; fi fci- ormiter in plabimur. ecta pro- oteft, ex terit.
abiliter in que in re- motu lati AM pro-
lientis, a; que egre- icuum eft ae celeri- ta-

Co-

Corollarium 1.

84. Corpus igitur absolute aequabiliter in directum progrediens, quoque relatiue aequabiliter in directum promouebitur, si modo corpus, ex quo relatio indicatur, quoque aequabiliter in directum progrediatur. Atque hoc est quod in praecedente demonstratione (77.) assumsimus.

Corollarium 2.

85. Constructio ceterum lineae AN et celeritatis relatiuae inuentio facillime hoc modo institui potest. Sumtis, vt iam fecimus, AL et AM in ratione a ad b ductaque ML, ducatur huic ML parallela AN ex A, erit haec via motu relatiuo descripta. Celeritas vero relatiua erit ad absolutam, vt ML ad AL.

Corollarium 3.

86. Idem ratiocinium valet, si AL non motu absoluto, sed relatiuo percurratur, et AM eadem relatione. Tum vero prodibit corporis per AL moti alius motus relatiuus respectu corporis AM lati.

Corollarium 4.

87. Patet igitur, quomodo motus absolutus in infinitos relatiuos possit transmutari, qui semper erunt aequabiles et in directum fient, si modo motus absolutus fuerit huiusmodi, et motus eorum corporum, ex quibus relatiui oriuntur.

Scho-

in di-
iter in
x quo
ectum
:dente
cele-
insti-
AM in
IL pa-
uo de-
utam,
n mo-
M ca-
is per
rporis
solutus
emper
o mo-
corum
Scho-

Scholion.

88. Assumsimus in solutione ambo corpora ex eodem loco A egredi: sed solutio non minus succedit, si ambo corpora in principio in diuersis punctis A et B fuerint posita. Nam progrediatur corpus A motu absoluto aequabiliter in recta AL, alterum vero B similiter in recta BM, ita vt celeritates sint vt a ad b. Sumantur AL et BM in eadem ratione a ad b, peruenient ambo corpora simul in L et M. At quia corporis A motus relatiuus respectu corporis B requiritur, corpus B vt quiescens in B debet considerari. Transferatur ergo cogitatione corpus B ex M in B, perueniet corpus A ex L in N, ducendo BN parallelam et aequalem ipsi ML: dico punctum N fore in recta per A transeunte, ita vt corpus A relatiue moueatur in recta AN, idque aequabiliter. Ducta enim NL aequalis erit et parallela ipsi BM. His factis specie datur triangulum ANL: quare NL ad AL habebit rationem datam, ergo ob NL=BM, erit ratio AL ad BM data, quae ergo si semel sumta fuerit in ratione a ad b, semper erit eadem. Ex quo apparet punctum N esse in recta AN et celeritatem relatiuam per AN esse ad absolutam per AL, vt AN ad AL i. e. in ratione data. Motus igitur relatiuus per AN fiet in recta, eritque aequabilis.

Tab. I. Fig. 2.

Corollarium 5.

89. Si igitur detur corporis A motus absolutus per rectam AL, eiusque relatiuus aequabilis per

AN

AN quacunque celeritate, poterit inueniri motus corporis B, cuius respectu motus relatiuus corporis A oritur. Sumtis enim duobus spatiis AL et AN eodem tempore percursis, ducatur per punctum quoduis arbitrarium B recta BM parallela ipsi NL, determinabit haec viam a corpore B percursam, eiusque celeritas erit ad celeritatem corporis A absolutam per AL vt est NL ad AL. Erit vero corpus B in B eodem tempore, quo est A in A.

Corollarium 6.

90. Dantur ergo innumerabiles motus corporis B, quia punctum B pro lubitu potest assumi, ex quibus motus relatiuus corporis A idem prouenit. At corporis B celeritas semper erit eadem, eiusque directio secundum parallelam ipsi NL.

Corollarium 7.

91. Intelligitur etiam motum absolutum aequabilem in directum tendentem transmutari posse in relatiuum quemcunque itidem aequabilem et in recta factum. Potest enim recta AN pro arbitrio duci, et celeritas per eam poni quaecunque. Semper enim datur motus aequabilis quoque et recta progrediens corporis B, ex quo hic motus relatiuus existit.

Corollarium 8.

92. Motus deinde iste relatiuus per se sine vlla vi externa poterit continuari. Motus enim absoluti per AL et per BM, quia fiunt aequabiliter in

in lineis rectis, per se continuantur. Quamdiu vero isti motus durant, tamdiu etiam relatiuus per AN continuare debet.

PROPOSITIO 12.

Problema.

93. *Moueatur corpus A absolute quomodocunque in linea AL, et corpus B in linea BM. Requiritur motus relatiuus corporis A respectu corporis B.* Tab. I. Fig. 10.

Solutio.

Abscindantur in curuis AL et BM arcus, qui aequalibus temporibus percurruntur, AL et BM. Reperietur ergo corpus A in L, quando B in M pertingit. Sed quia corporis A motus relatiuus respectu B desideratur, corpus B vt quiescens in B debet considerari. Quare transferatur id cogitatione ex M per rectam MB in B, peruenietque corpus L in N, ducta LN parallela et aequali ipsi MB. Curua igitur in qua est punctum N hoc modo inuentum, erit via a corpore A motu relatiuo descripta. Atque hoc motu relatiuo arcus AN eodem tempore percurretur, quo arcus AL et BM absoluuntur. Ex quo celeritas relatiua in N quoque innotescit. Q. E. I.

Corollarium I.

94. Determinari igitur hoc modo poterit motus relatiuus corporis quocunque motu lati respectu corporis quomodocunque etiam moti.

Corollarium 2.

95. Intelligitur etiam ex solutione, quomodo datis curuis AN et AL vna cum motibus per eas inueniri possit curua BM et motus per eam. Nec non definietur curua AL ex curuis BM et AN.

Corollarium 3.

96. Perspicuum quoque est curuam BM ob punctum B arbitrarium infinitis modis posse aliter esse positam. Quia tamen arcus BM, qui eodem tempore, quo AL et AN, describitur, subtensa BM semper est aequalis et parallela lineae LN, ea semper erit sibi similis et aequalis et parallela, atque motus per eam perpetuo idem.

Scholion.

97. Et haec sunt, quae de comparatione motuum absolutorum et relatiuorum afferenda iudicaui. Motus autem relatiuus alias hoc modo solet describi, vt motus per AN dicatur motus corporis A, quod reuera in linea AL mouetur, qualis ex corpore B in BM moto spectatur. Spectator vero in corpore B relatiue quiescens ponitur, et ipsum B vt quiescens considerans. Ita motus stellarum relatiuus respectu telluris, congruit cum eo motu, quem nos in terra degentes eamque tanquam quiescentem considerantes intuemur. Terra enim ex B in M promota et stella ex A in L, videmus eam ex M secundum plagam ML et in distantia ML. Quia vero nos de loco B motos esse non apprehendimus, sed etiam nunc in B consistere putamus, videbimus stellam

lam ex B non in L, sed in N, eadem scilicet plaga eademque distantia. Propterea recta BN aequalis erit et parallela rectae ML, vt nostro considerandi modo inuenimus.

SCHOLION GENERALE.

98. Istae motus leges, quas corpus sibi relictum vel quietem vel motum continuando obseruat, spectant proprie ad corpora infinite parua, quae vt puncta possunt considerari. In corporibus enim finitae magnitudinis quorum singulae partes alios habent motus insitos, quaelibet pars quidem has leges obseruare conabitur, quod autem non semper propter corporis statum fieri potest. Corpus igitur ipsum eum sequetur motum, qui ex singularum partium conatibus componitur, isque adhuc ob insufficientiam principiorum non potest definiri, sed haec tractatio ad sequentia est differenda. Diuersitas igitur corporum suppeditabit nobis operis diuisionem primariam. Primo enim contemplabimur corpora infinite parua seu quae tanquam puncta spectari possunt. Deinde corpora finitae magnitudinis aggrediemur ea, quae sunt rigida neque figuram suam mutari patiuntur. Tertio agemus de corporibus flexibilibus. Quarto de iis quae extensionem et contractionem admittunt. Quinto plurium corporum solutorum motus examini subiiciemus, quorum alia impediunt, quin motus suos possint, vt conantur, absoluere. Sexto vero de motu fluidorum erit agendum. De his vero corporibus non solum videbimus, quomodo sibi re-

relicta motus continuent; sed praeterea inquiremus, quomodo ea a causis externis scilicet potentiis afficiantur. Denique in his omnibus disquisitionibus magnam inferet varietatem status corporum vel liber vel non liber. Per statum non liberum hic intelligo, quando corpora impediuntur, quo minus in ea directione progrediantur, qua conantur; cuiusmodi est motus corporum pendulorum, quae, quia non possunt directe, vti conantur, descendere, oscillationes efficiunt. Ex quo intelligitur statum liberum esse, quando corpora nullum inueniunt impedimentum in quamuis plagam progrediendi, in quam tum ex propria vi tum a potentiis sollicitata tendunt. Apparet igitur, quibus de rebus in Mechanica sit agendum, et quam sint multa, quae etiam nunc nequidem sunt libata. Nam praeter motum punctorum, quae adhuc sunt tractata, tam pauca sunt, vt fere omnia demum inuenire et ex principiis deriuare necesse sit. Incipio igitur a motu punctorum liberorum a potentiis quibuscunque sollicitatorum, quia, quos sibi ipsa relicta sequantur motus, hoc capite iam est ostensum. Hanc ob rem primum istum Tomum motui punctorum libero destinaui, in sequente vero punctorum motum non liberum pertractare constitui; in quorum vtroque, quae occurrent, cum ex his iam traditis, tum ex sequentibus principiis methodo analytica sum deriuaturus.

CAPUT

CAPUT SECUNDUM
DE
EFFECTU POTENTIARUM IN PUNCTUM LIBERUM AGENTIUM.

DEFINITIO 10.

99.

Potentia est vis corpus vel ex quiete in motum perducens, vel motum eius alterans. *Huiusmodi vis, ideoque et potentia est grauitas, per eam enim corpora, remotis impedimentis, ex quiete deorsum delabuntur, motusque ipse descensus ab ea continuo acceleratur.*

Corollarium I.

100. Omne corpus sibi relictum vel in quiete perseuerat, vel motu aequabili in directum progreditur. Quoties igitur euenit, vt corpus liberum, quod quiescebat, moueri incipiat, aut motum vel non aequabiliter vel non in directum progrediatur, causa est potentiae cuidam adscribenda: quicquid enim corpus de statu suo deturbare valet, potentiam appellamus.

Scholion I.

101. Doctrina de potentiis, quatenus plures corpori applicatae in aequilibrio consistunt, corpusque in quiete conseruant, iam in statica est exposita. Ibique potentia ita quoque est definita, vt denotet omne id, quod corpora mouere valet. Motus

tas vero ipse in statica non consideratur, sed ii tantum casus inuestigantur, quibus plures potentiae sese destruunt, corpusque, in quod agunt, in quiete permanet. Nunc autem in Mechanica explicandum est, quomodo potentiae in corpus agentes, quae inter se non sunt contrariae, re ipsa motum producant in corpore quiescente, in moto vero motum immutent.

Scholion 2.

102. Vtrum huiusmodi potentiae ex ipsis corporibus originem suam habeant, an vero per se tales dentur in mundo, hic non definio. Sufficit enim hoc loco potentias in mundo reuera existere, id quod vel sola vis grauitatis, qua omnia corpora terrestria deorsum delabi conantur, docet. Praeterea vero huiusmodi vires corpora sollicitantes conspicuuntur in motibus planetarum, qui nisi a quadam potentia essent affecti, vniformiter in lineis rectis progredi deberent. Similes etiam potentiae deprehenduntur in corporibus magneticis et electricis inesse, quae certa tantum corpora attrahunt. Quas omnes a motu materiae cuiusdam subtilis oriri alii putant, alii ipsis corporibus vim attrahendi et repellendi tribuunt. Quicquid autem sit, videmus certe ex corporibus elasticis et vorticibus huiusmodi potentias originem ducere posse, suoque loco inquiremus, num ex inde phaenomena haec potentiarum explicari possint. Interim vero potentiarum quarumuis in corpora effectus determinare co-

conabimur, quo deinceps, cum ad eorum pleniorem cognitionem peruentum fuerit, statim, quae eruta sunt, ad eas accommodari queant.

DEFINITIO II.

103. Directio potentiae est linea recta, secundum quam ea corpus mouere conatur. *Ita grauitatis directio est linea recta verticalis, corpora enim grauia secundum eam delabi conatur.*

Scholion 1.

104. In statica, vbi omnia in quiete permanere ponuntur, omnes potentiae suas directiones perpetuo easdem seruare statuuntur. At in mechanica, cum corpus perpetuo in alium perueniat locum, potentiae in id agentis directio continuo mutabitur: Pro diuersis enim corporis locis vel potentiae directiones erunt inter se parallelae, vel ad fixum punctum conuergentes, vel aliam tenebunt legem, ex quo tam multiplex potentiarum in mechanica tractatio oritur.

Scholion 2.

105. Potentiarum diuersarum comparatio et mensura ex statica quoque est repetenda. In qua traditum est potentiam aliquam a se habere ad aliam b vt m ad n, quando potentia a puncto A, n vicibus Tab. I.
secundum directionem AB applicata, et potentia b, m Fig. 11.
vicibus secundum directionem contrariam AC, punctum A perseuerat in aequilibrio. Tum enim potentia a, n vicibus sumta aequiualet potentiae b, m vicibus sumtae, eritque $na = mb$ seu $a : b = m : n$.

F Scho-

Scholion 3.

106. In hoc vero differt mensura potentiarum mechanica a statica, quod in hac omnes magnitudinem eandem retinere ponuntur, in mechanica vero, vt perueniente corpore in alium locum earum directiones mutabiles ponuntur; ita earum quantitas secundum certam legem variabilis esse potest.

PROPOSITIO 13.

Theorema.

107. *Quando punctum a pluribus potentiis est sollicitatum, eundem ab iis adipiscetur motum, ac si ab vnica iis omnibus aequiualente fuisset sollicitatum.*

Demonstratio.

Tab. I. Fig. 12. Sit punctum A sollicitatum a potentiis AB, AC, AD, AE, quibus aequiualeat potentia AM. Sumatur huic aequalis et contrarie posita AN, haec, vt ex statica notum est destruet actionem potentiarum AB, AC, AD, AE. Primo igitur momento potentia AN tantum imprimeret puncto A motum secundum, AN quantum potentiae AB, AC, AD, AE simul agentes ei imprimerent secundum earum mediam directionem, quae est AM. Potentia vero AM sola, quia aequalis est potentiae AN, tantum quoque promouebit punctum A versus AM, quantum AN versus AN. Quare potentia AM tantum etiam puncto A imprimet motum secundum AM, quantum potentiae AB, AC, AD, AE simul agentes secundum eandem directionem AM. In vtroque igitur casu effectus erit idem. Q. E. D.

Corollarium 1.

108. Si igitur punctum a pluribus potentiis sollicitetur, poterit id tanquam ab vnica sollicitatum considerari, quae iis omnibus est aequiualens.

Corollarium 2.

109. Atque vicissim loco vnius potentiae in punctum agentis, possunt plures in id agentes considerari, quibus illa aequiualeat: id quod, vt ex statica manifestum est, infinitis modis fieri potest.

Scholion.

110. Quia vero, quam primum corpus de loco suo est motum, potentiae in id agentes directiones suas et magnitudines mutant vel mutare ponuntur, potentia quoque aequiualens quouis momento erit alia. Hanc ob rem quouis momento potentiarum punctum sollicitantium aequiualens debet inuestigari, neque id diutius ab eadem potentia affici ponendum est quam per temporis elementum infinite paruum.

DEFINITIO 12.

111. Potentia absoluta est potentia, quae in corpus siue motum siue quiescens aequaliter agit. *Huiusmodi potentia absoluta est vis grauitatis, quae corpora siue moueantur siue quiescant aequaliter deorsum trahit.*

Corollarium.

112. Si igitur cognitus fuerit potentiae absolutae effectus in corpus quiescens, innotescet quoque eius effectus in corpus vtcunque motum.

DEFINITIO 13.

113. Potentia relatiua est, quae aliter agit in corpus quiescens, aliter in motum. *Huiusmodi potentia est vis fluui corpus secum abripientis, quo enim celerius corpus mouetur, eo vis fluuii in id fit minor: eaque prorsus euanescit, quando corpus iam eandem, quam habet fluuius, celeritatem est adeptum.*

Corollarium 1.

114. Si igitur data sit corporis celeritas vna cum lege potentiae relatiuae, inueniri poterit vis, quantum potentia in corpus agit. Haecque deinde vt potentia absoluta poterit considerari, quamdiu corpus eandem habet celeritatem, eiusque effectus ex potentiarum absolutarum actione determinari. Vim enim potentiae relatiuae in corpus data celeritate motum determinare, nil aliud est, nisi potentiam absolutam hoc casu aequiualentem assignare.

Corollarium 2.

115. Hoc igitur differunt a se inuicem potentiae absolutae et relatiuae, quod potentiae absolutae quantitas et directio a solo corporis, in quod agit, loco pendeat; relatiuae vero quantitas et directio insuper a corporis, in quod agit, celeritate.

Scho-

Scholion 1.

116. Respiciunt potissimum potentiae relatiuae ad motum corporum in fluidis, horum enim actio in corpora a celeritate eorum pendet relatiua; quae, quo est maior, eo quoque maiorem vim corpus a fluido patitur. Praeter alios autem casus motuum in fluidis, qui maiorem cognitionem fluidorum requirunt, duo sunt tractatu faciliores; alter quando fluidum quiescit, alter quando mouetur vniformiter in directum. Poterit vero iste ad illum substituendo motum relatiuum loco absoluti semper reduci; fluidum scilicet vt quiescens considerandum est, in quo statu quoque vi propria permanebit. Quae igitur in sequentibus de potentiis relatiuis proferentur, ea ad motum corporum in fluidis quiescentibus potissimum pertinebunt. Actio vero fluidorum in corpora mota consistit tota in motu eorum diminuendo, et propterea resistentia appellatur, quae, quo celerius corpora mouentur, maior est quoque, et euanescit omnino, quando corpora quiescunt. Hanc ob rem in posterum loco potentiarum relatiuarum media resistentia substituemus; motus vero, qui a solis potentiis absolutis afficiuntur, in vacuo fieri ponemus.

Scholion 2.

117. Motus quidem in mediis resistentibus, si maxime ordinem sequi vellemus, ad vltimam partem, quae fluidis est destinata, esset referenda, cum etiam nunc non constet, qua lege fluida cor-

po-

poribus in iis motis resistant. Verum quia haec materia a plerisque ita tractari est solita, vt prorsus a fluidorum natura sit reuocata, et vti hypothesis pure mathematica considerata: hanc methodum retinere malui, quam plurima elegantia problemata praeterire, quae in tractatiooe de fluidis etiam locum non inueniunt. Attamen hanc medii resistentiam non nisi punctorum motui accommodabo, pro corporibus enim finitae magnitudinis calculus fieret insuperabilis. Quando autem corpora instar punctorum considerari possunt, hoc inde nascitur commodum, quod directio vis resistentis congruat cum motus directione, si quidem ea a fluido quiescente oriatur. Hanc ob rem in hac de motu punctorum tractatione potentiis relatiuis eandem semper directionem tribuemus, quam habet ipsum punctum, eamque semper vt motum diminuentem considerabimus.

PROPOSITIO 14.
Problema.

118. *Dato effectu potentiae absolutae in punctum quiescens, inuenire effectum eiusdem potentiae in punctum idem quomodocunque motum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 1. Sit punctum in A positum, vnde moueatur celeritate c secundum directionem AB, potentiae vero in id agentis directio sit AC. Assumatur temporis aliquod elementum dt, hocque tempusculo protrahatur punctum A, si quiesceret in A, per spatiolum AC, quod vocetur dz, ita vt post tempus dt non amplius sit in A, sed in C. Hic motus igitur per AC erit effectus potentiae in punctum quiescens. Effectus vero eiusdem potentiae, quia ponitur absoluta in idem punctum motum aequalis esse debet effectui in quiescens (111.). Abscindatur nunc in puncti A directione, quam habet secundum AB, spatium AB, quod celeritate sua c tempusculo dt percurret, si a nulla potentia sollicitaretur, erit AB $= cdt$ (30.). Agente vero potentia post temporis elementum dt punctum non reperietur in B, sed alibi in D, ita vt effectus, qui mensurandus est deuiatione a puncto B, quae est spatium BD, aequalis sit effectui eiusdem potentiae in punctum quiescens (111.) i. e. AC. Erit ergo BD $=$ AC. Praeterea vero erit BD ipsi AC parallela, quia BD est effectus potentiae, ideoque in eius directionem incidere debet, quae durante tempusculo infinite paruo dt non mutatur. Quamobrem punctum A celeritatem c habens secundum directionem AB, et sollicitatum a potentia absoluta, elapso tempusculo dt, non in B, sed D reperietur, ducta BD aequali et parallela ipsi AC. Spatia vero infinite paruo tempusculo percursa, vt lineolae rectae possunt considerari; propterea punctum tempusculo dt spatium AD percurrisse censendum est. Q. E. I.

Corollarium I.

119. Quia etiam motus per spatiola infinite parua pro aequabilibus haberi possunt, (33.) erit celeritas, qua elementum AD percurritur $= \frac{AD}{dt}$ (30.)

Co-

Corollarium 2.

120. Ponitur celeritas per $AD = c + dc$, quia praecedens erat c (35.), erit $c + dc = \frac{AD}{dt}$, at ante erat $AB = cdt$, ex quo fit $c = \frac{AB}{dt}$. Prodit ergo $dc = \frac{AD - AB}{dt}$. Abſcindatur igitur in AD portio $Ab = AB$, erit $dc = \frac{Db}{dt}$.

Scholion 1.

121. Notandum autem eſt AC vel BD infinities eſſe minorem, quam AB, nam AB eſt ſpatium celeritate finita tempore dt percurſum, at AC ſpatiolum celeritate infinite parua eodem tempore abſolutum, corpori enim quieſcenti nulla potentia finitam celeritatem tempuſculo infinite paruo poteſt inferre.

Corollarium 3.

122. Hanc ob rem angulus BAD erit infinite paruus, et iunctis punctis B et b, lineola Bb erit in AD perpendicularis. Vocetur ſinus anguli BAC, quippe qui datur k, poſito ſinu toto 1, erit ſinus ang. BDb etiam k, quia illi eſt aequalis, ſinus vero ang. DBb erit $\sqrt{(1-kk)}$. Ex his, quoniam eſt $BD = AC = dz$, erit $Db = dz\sqrt{(1-kk)}$ et $Bb = kdz$.

Corollarium 4.

123. Incrementum igitur celeritatis dc, quod ante inueneramus $= \frac{Db}{dt}$, erit $\frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$. Intelligitur vero dz eſſe infinities minus quam dt, eſt enim dz infinite paruum reſpectu AB i. e. cdt, ideoque etiam reſpectu ipſius dt, quia c ponitur finitae magnitudinis.

Co-

Corollarium 5.

124. Inuento celeritatis incremento dc a potentia illato, conſiderandus quoque eſt angulus BAD declinationem puncti ab inſita directione AB repraeſentans, quae itidem a potentia producitur. Eſt vero eius ſinus $= \frac{Bb}{Ab} = \frac{kdz}{cdt}$.

Corollarium 6.

125. Duplex igitur eſt effectus potentiae punctum motum ſollicitantis. Alter in celeritate immutanda conſiſtit, alter in eius directione. Ille dat incrementum celeritatis $dc = \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$, hic vero anguli declinationis ſinum $= \frac{kdz}{cdt}$.

Corollarium 7.

126. Si angulus BAC fuerit rectus, ideoque $k = 1$; erit $dc = 0$. Hoc igitur caſu celeritas a potentia manet immutata. Anguli vero declinationis BAD ſinus fit $= \frac{dz}{cdt}$.

Corollarium 8.

127. Si angulus BAC fit obtuſus ſeu recto maior erit eius coſinus $\sqrt{(1-kk)}$ negatiuus, et propterea celeritatis incrementum dc prodibit negatiuum $= \frac{-dz\sqrt{(1-kk)}}{dz}$. Id quod indicat, celeritatem a potentia diminui. Declinatio vero $\frac{kdz}{cdt}$ eadem manet, quae ante.

Corollarium 9.

128. Si potentiae directio AC cum motus puncti A directione AB congruit, fit $k = 0$. Hoc

igi-

igitur casu motus directio a potentia non immutatur. Celeritatis vero incrementum dc fiet $=\frac{dz}{dt}$, si potentiae directio conspirat cum directione motus. Sin autem ei fuerit contraria, fit $dc=\frac{-dz}{dt}$.

Scholion 2.

129. Apparet itaque ex huius propositionis solutione, quomodo potentiae absolutae effectus in punctum quomodocunque motum inueniri debeat, si cognitus fuerit effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens. Hanc ob rem in sequentibus huius capitis propositionibus sufficiet punctum a potentiis sollicitatum quiescens ponere, vel motum in eadem, quam habet potentia, directione. Nam si punctum A habeat celeritatem c, eaque moueatur secundum directionem AB; interea vero sollicitetur a potentia eandem habente directionem AB, ita vt elapso tempusculo dt non in B, quo sola celeritate c latum perueniret, sed in b reperiatur, erit potentiae effectus spatiolum Ab. Atque per tantumdem spatiolum ao punctum A, si in a quiesceret, fuisset eodem tempusculo dt pertractatum. Innotescit ergo ex motu puncti A a potentia sollicitati effectus eiusdem potentiae in idem punctum quiescens, porroque hinc effectus potentiae in punctum vtcunque motum.

Tab. II. Fig. 2.

PROPOSITIO 15.

Problema.

130. *Dato celeritatis incremento, quod quaedam potentia in puncto A tempusculo dt producit, inuenire incrementum celeritatis, quod eadem potentia in eodem puncto tempusculo dt producit.*

mmuta- $=\frac{dz}{dt}$, si e motus. ofitionis fectus in debeat, in idem uentibus m a po- otum in . Nam mouea- ro folli- tem AB, fola ce- tur, erit per tan- quiesce- actatum. a follici- punctum in pun- od quae- ir, inue- nire.

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c eandemque directionem AB, quam habet potentia id sollicitans, atque ao spatiolum per quod haec potentia punctum A, si quiesceret, tempusculo dt traheret. Sit porro AB spatium, quod punctum A celeritate c tempusculo dt percurrit, percurret idem insuper a potentia sollicitatum spatium Ab, sumto B$b=ao$ hocque spatium quia est infinite paruum aequabili motu descripsisse aestimandum est. Sequente igitur tempusculo dt hac celeritate percurreret spatium bC$=$Ab, nisi a potentia sollicitetur; at agente iterum potentia, quae immutata manere ponitur saltem per tempus infinite paruum, perueniet id vltra C in c, sumto C$c=ao$. Simili modo tertio tempusculo dt, percurret spatium $cd=c$D$+$Dd, vbi cD$=bc$ et D$d=ao$. Et quarto tempusculo dt percurret spatium $de=d$E$=$Fe, vbi rursus est dF$=cd$ et F$e=ao$. Est vero A$b=$AB$+ao$; $bc=$AB$+2ao$; $cd=$AB$+3ao$; $de=$AB$+4ao$. Erit ergo $\frac{ao}{dt}$ incrementum celeritatis tempusculo dt productum a potentia; $\frac{2ao}{dt}$ erit celeritatis incrementum tempusculo $2dt$ acquisitum; similiter $\frac{3ao}{dt}$ incrementum tempusculi $3dt$: et generaliter tempusculo ndt crescet celeritas puncti c elemento $\frac{nao}{dt}$. Ponatur $ndt=d\tau$, erit $n=\frac{d\tau}{dt}$. Celeritatis igitur incrementum tempusculo

Tab. II. Fig. 2.

porum confirmauit. Alii enim statuebant celeritatis incrementa non temporibus, sed spatiis percursis esse proportionalia, huius vero absurditas a Galilaeo iam tunc plerisque Philosophis erat persuasa. Apparet autem, si potentiarum actiones hanc sequerentur legem nulla corpora ad motum perduci vnquam posse. Foret enim $dc=nds$ et $c=ns$, tempus vero t, quod est $\int\frac{ds}{c}$ euaderet $=\frac{1}{n}\int\frac{dc}{c}=\frac{1}{n}lc=\frac{1}{n}lns$ const. quae constans esse debet $=-\frac{1}{n}lon$. Tempus scilicet logarithmo spatii descripti per o diuisi esset proportionale et propterea infinitum. Nullum igitur corpus ex quiete vnquam ad motum posset perduci. Recte itaque Galilaeus aduersariis respondit, quod in instanti motus finitus hoc posito generari deberet, alioquin motum produci prorsus non posse. Etsi enim in initio infinite parua in puncto ponatur celeritas, ea tamen ab huiusmodi potentia imaginaria nunquam effici poterit finita. Ex data vero problematis solutione intelligitur legem inuentam necessariam esse, neque vllam aliam vi principii contradictionis existere posse.

PROPOSITIO 16.

Theorema.

136. *Potentia* q *in punctum* b *eundem habet effectum, quem potentia* p *in punctum* a; *si fuerit* q . p $=$ b : a.

Demonstratio.

Ponatur $q=np$, erit $b=na$. Concipiatur iam punctum na in n partes aequales diuisum, quarum quae-

libet erit $=a$; harum partium vnaquaeque sollicitata sit a parte n sima ipsius potentiae np id est a potentia p. His positis quaeuis pars eodem modo trahetur a sua potentia, quo punctum ipsum a a potentia p. Neque vero hae puncti na partes a suis potentiis sollicitatae a se inuicem segregabunt; sed perpetuo vnitae manebunt, si quidem initio fuerint coniunctae. Perspicuum autem est hos duos casus eodem redire, nec a se inuicem discrepare, siue punctum na a potentia np trahatur, siue quaeuis puncti na pars a a simili parte p potentiae np trahatur, dummodo partes non a se inuicem diuellantur. Quapropter constat propositum na aeque a potentia np vrgeri ac punctum a a potentia p. Q. E. D.

Corollarium 1.

137. Punctum igitur na a potentia np easdem adipiscetur accelerationes, quas punctum a a potentia p.

Corollarium 2.

138. Ad eandem ergo maiori puncto celeritatem inducendam, quam minori, opus est maiori potentia, idque tanto maiori, quanto illud punctum maius est quam hoc.

Scholion 1.

139. Propositio ista fundamentum complectitur ad vim inertiae metiendam, hac enim nititur omnis ratio, quare corporum materia seu massa in Mechanicis considerari debeat. Attendi enim oportet ad punctorum numerum, ex quibus corpus mo-

mouendumest conflatum, eique massa corporis proportionalis est ponenda. Puncta vero ea inter se aequalia censeri debent, non quae aeque sunt parua, sed in quae eadem potentia aequales exerit effectus. Si igitur vniuersam materiam in huiusmodi aequalia puncta seu elementa concipiamus diuisam, quantitatem materiae cuiusque corporis ex numero punrum ex quibus est compositum, aestimari necesse est. Vim autem inertiae proportionalem esse huic punctorum numero seu quantitati materiae in sequenti propositione demonstrabimus.

Corollarium 3.

140. Aequalia ergo sunt, quod ad quantitatem materiae attinet, duo corpora, quae ex aequali punctorum numero sunt composita. Atque duo corpora sunt in ratione m ad n, si punctorum, ex quibus constant, numeri teneant rationem hanc m ad n.

Scholion 2.

141. Ostendetur vero in sequentibus hanc ipsam quantitatis materiae mensurandae rationem re ipsa adhiberi, et apud omnes esse receptam. Ex pondere enim cuiusque corporis materia solet inuestigari, ponderique materiae quantitas proportionalis censetur. Corpora autem omnia aequaliter in spatio vacuo descendere per experimenta constat, et propterea omnia a vi grauitatis aequaliter accelerantur. Quo circa necesse est, vt vis grauitatis in singula corpora agens eorum quantitati materiae sit proportionalis. Pondus vero corporis indicat vim grauitatis, qua illud sollicitatur. Quare cum illa sit proportionalis materiae quantitati, ponderatione simul quantitas materiae innotescit, eo ipso sensu, quem hic materiae tribuimus.

PROPOSITIO 17.

Theorema.

142. *Vis inertiae cuiuscunque corporis proportionalis est quantitati materiae, ex qua constat.*

Demonstratio.

Vis inertiae est vis in quouis corpore insita in statu suo quietis vel motus aequabilis in directum permanendi (74.). Ea igitur aestimanda est ex vi, vel potentia, qua opus est ad corpus ex statu suo deturbandum. Diuersa vero corpora aequaliter in statu suo perturbantur a potentiis, quae sunt vt quantitates materiae in illis contentae. Eorum igitur vires inertiae proportionales sunt his potentiis. Consequenter etiam materiae quantitatibus sunt proportionales. Q. E. D.

Corollarium I.

143. Perspicitur simul ex demonstratione idem corpus siue quiescat siue moueatur eandem habere semper vim inertiae. Nam siue quiescat siue moueatur aequaliter ab eadem potentia afficitur scilicet absoluta.

Corollarium 2.

144. Neque vero vis inertiae homogenea eſt cum vlla potentia: fieri enim non poteſt, vt corpus quantumuis magnum a minima potentia non afficiatur, vt in ſequentibus demonſtrabitur.

Scholion.

145. Apparet hinc origo vocis vis inertiae, quam ſupra (76.) innuimus, ex eo, quod vis inertiae actioni potentiarum quodammodo reſiſtit. *Neutonus* quoque in Princ. Phil. Nat. Definitione III, cum vi inertiae et hac vi reſiſtendi eandem ideam coniungit, et vtramque quantitati materiae proportionalem ſtatuit.

PROPOSITIO 14.

Problema.

146. *Dato effectu vnius potentiae in punctum aliquod, inuenire effectum cuiusuis alius potentiae in idem punctum.*

Solutio.

Tab. II. Fig. 3. Quieſcat punctum in A et conſiſtat potentiae datae AB in id effectus in hoc, quod ab ea tempusculo *dt* per ſpatiolum A*b* deducatur. Quaeritur iam per quantum ſpatium idem hoc punctum tempusculo *dt* ab alia potentia AC protrahatur. Ducantur lineae AB et AC, ita vt iuncta BC ſit in AC normalis, id quod ſemper fieri poteſt, ſi AC<AB. At ſi AC>AB ſolutio ex illa facile deducetur. Ex altera parte ducatur recta AD ita vt BAD ſit triangu' in iſoſceles. Biſecentur AB et AD in E et F, et per AE repraeſentetur dimidium potentiae AB, et per AF tantadem potentia. Manifeſtum eſt potentiam AC idem praeſtare in punctum A, quod duae potentiae AE et AF coniunctim (107.) quia AC aequiualet ob parallelogrammum AECF ambabus AE et AF. Loco igitur potentiae AC ponamus punctum A ſollicitari a potentiis AE et AF. Hoc vero modo rem concipiamus, quaſi quaelibet potentia AE et AF dimidium puncti A afficiat. Medietates vero iſtae ſint ad tempusculum *dt* ſaltem a ſe inuicem ſolutae, hocque finito eas ſubito ad ſe inuicem rurſus accedere ponemus. Quia nunc potentia AB punctum A tempusculo *dt* per ſpatium A*b* protrahit, protrahet dimidia potentia AE puncti dimidium eodem tempusculo *dt* per idem ſpatium A*b* (136.). Similiter tempusculo *dt* altera medietas puncti A a potentia AF protrahetur per ſpatium A*d*=A*b*. Finito igitur tempusculo *dt*, altera medietas puncti A erit in *b* altera in *d*. Coeant nunc rurſus ſubito ad ſe mutuo, ſeu contrahantur vi cohaeſionis infinita, conuenient in puncto medio *c* lineolae *bd*: nulla enim eſt ratio, quare propius ad *b* quam *d* conueniant. A potentiis ergo AE et AF coniunctim agentibus punctum A tempusculo *dt* per ſpatiolum A*c* protrahetur. Quamobrem etiam potentia AC aequiualens potentiis AE et AF tempusculo *dt* protrahet per ſpatiolum A*c*. Eſt vero *bd* parallela ipſi BD et propterea A*b* : A*c*=AB : AC. Dato igitur ſpatiolo A*b*, per quod punctum A a potententia AB protrahitur, dabitur ſpatiolum Ac, per quod idem punctum A ab alia potentia AC protrahitur eodem tempusculo. Atque ſimul patet, ſi effectus Ac minoris potentiae AC fuerit datus, quantus ſit maioris AB effectus Ab. Q. E. I.

Corollarium 1.

147. Spatia igitur, per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis protrahuntur aequalibus temporibus, ſunt vt ipſae potentiae.

Corollarium 2.

148. Quia ſpatia motus initio deſcripta inaequalibus temporibus ſunt in duplicata ratione temporum (133.); erunt ſpatia per quae aequalia puncta a quibuscunque potentiis inaequalibus temporibus protrahuntur in ratione compoſita ex ratione ſimplici potentiarum et duplicata temporum.

Scholion.

149. Principium, quo in huius problematis ſolutione ſumus vſi, in hoc conſiſtit, vt corpus a pluribus potentiis ſollicitatum in totidem partes concipiatur diuiſum, quarum quaelibet ab vna tantum potentia trahatur. Deinde cum ſingulae a potentiis ſuis momento temporis fuerint protractae, ſubito ad ſe mutuo compelli in vnumque congredi intelligantur, quo facto locus, in quo conuenerunt, erit is, ad quem integrum corpus ab omnibus potentiis ſimul agentibus eodem tempore fuiſſet pertractum. Veritas huius principii ex hoc poteſt perſpici, quod corporis partes claſtris fortiſſimis coniunctae poſſint concipi, quae quanquam indeſinenter agunt, tamen per interualla cedere moxque ſe ſubito contrahere vi infinita poni poſſunt, ita vt tempus, quo partes ſolutae ad ſe inuicem reducuntur, ſit nullum. Eodem vero hoc principio iam alii in pluribus mechanicis problematibus ſoluendis ſunt vſi. Atque plerique adoptauerunt iſtud re non diuerſum, quod potentias non indeſinenter, ſed per ſaltus effectum ſuum exercere poſuerunt. Hoc autem principio admiſſo manifeſtum eſt duas partes aequales recta ad ſe mutuo accedere et interualli ſui medio congredi debere.

PROPOSITIO 19.

Theorema.

150. *Moueatur punctum in directione* AM *et ſollicitetur, dum per ſpatiolum* Mm *percurrit a potentia* p *ſecundum eandem directionem trahente, erit incrementum celeritatis, quod interea punctum acquirit vt potentia ſollicitans ducta in tempusculum, quo elementum* Mm *percurritur.* Tab. II. Fig. 4.

Demonſtratio.

Sit tempusculum dt, et abſoluat punctum hoc tempore ſpatium $M\mu$, ſi a potentia non ſollicitaretur; ſed celeritate, quam in M habuit, vniformiter progredi pergeret. Effectus vero potentiae in hoc conſiſtit, vt punctum ab ea vlterius per μm protrahatur, quod ſpatiolum aequale eſt illi, per quod idem punctum, ſi quieſceret ab eadem potentia eodem tempusculo dt protraheretur, quia potentia ponitur absoluta (111.). Huic spatiolo dato tempore proportionale est celeritatis incrementum. At si potentia est eadem, celeritatis incrementum est vt tempusculum dt (130.). Quare cum spatiolum $m\mu$ seu incrementum celeritatis sit dato tempusculo vt potentia p, erit celeritatis incrementum pro quocunque tempusculo et quibuscunque potentiis vt pdt. i. e. vt potentia ducta in tempusculum. Q. E. D.

Corollarium 1.

151. Sit puncti in M celeritas c, et spatiolum $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$, quia ad tempus determinandum, elementum Mm motu aequabili describi ponendum est. Cum autem sit dc vt pdt, erit quoque dc vt $\frac{pds}{c}$, seu cdc vt pds. Incrementum ergo quadrati celeritatis est vt potentia ducta in spatii elementum percursum.

Corollarium 2.

152. Apparet igitur non solum verum esse hoc theorema, sed etiam necessario verum, ita vt contradictionem inuolueret ponere $dc = p^2 dt$ vel $p^3 dt$ aliamue functionem loco p. Quae omnes cum Clar. *Dan. Bernoullio* in Comment. Tom. I. aeque probabiles videantur, de rigidis harum propositionum demonstrationibus maxime eram sollicitus.

Scholion.

153. Propositionis huius demonstratio facilius sequitur ex 148. vnde prodit spatiolum $m\mu$ proportionale potentiae p ductae in quadratum tempusculi dt, ita vt sit $m\mu$ vt pdt^2. At $m\mu$ diuisum per tempus dt dat incrementum celeritatis; quare celeritatis incrementum erit vt pdt, quemadmodum in propositione erat enunciatum.

PROPOSITIO 20.

Theorema.

154. *Congruente puncti directione motus cum potentiae directione, erit incrementum celeritatis, vt potentia ducta in tempusculum et diuisa per materiam seu quantitatem puncti.*

Demonstratio.

Sint duo puncta seu corpuscula inaequalia A et B mota in rectis AM, BN. Sollicitentur ea a potentiis p et π respectiue, dum percurrunt spatiola Mm, Nn, et sint tempora, quibus ea percurruntur dt, $d\tau$. Manifestum est punctum B a potentia π eodem modo affici ac punctum A a potentia $\frac{A\pi}{B}$ (136.). Quare substituto loco B puncto ipsi A aequali, pro potentia π substitui debet potentia $\frac{A\pi}{B}$, hocque modo obtinemus casum propositionis praecedentis, quo puncta ponuntur aequalia. Hanc ob rem incrementum celeritatis per Mm est ad incrementum celeritatis per Nn vt pdt ad $\frac{A\pi}{B}d\tau$, seu vt $\frac{pdt}{A}$ ad $\frac{\pi d\tau}{B}$ (130.). Ex quo constat propositum, quod celeritatis incrementum, sit vt factum ex potentia et tempusculo diuisum per puncti materiam seu quantitatem. Q. E. D. Tab. II. Fig. 5

Co-

Corollarium 1.

155. Si igitur celeritas puncti A fuerit c, erit $dc = \frac{npdt}{A}$, vbi n in omnibus casibus eundem denotat numerum, neque enim a potentia neque a tempusculo neque a puncti quantitate pendet.

Corollarium 2.

156. Quantitas materiae A hic in considerationem venit quatenus potentiae sollicitanti reluctatur, i. e. quatenus congruit cum vi inertiae. Hanc ob rem est celeritatis incrementum vt potentia sollicitans et tempusculum directe, atque inuerse vt vis corporis inertiae.

Corollarium 3.

157. Posito spatio $Mm = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$. Hinc fiet $dc = \frac{npds}{Ac}$, seu $cdc = \frac{npds}{A}$. Quare incrementum quadrati celeritatis proportionale est facto ex potentia in spatiolum percursum diuiso per massam seu vim inertiae corpusculi.

Scholion.

157. Propositio ista complectitur omnia principia hactenus tradita motus naturam definientia, omnesque leges motus, si quidem potentiae directio cum motus directione congruit. Quamobrem si haec propositio cum decima quarta coniungitur, qua effectus potentiarum oblique agentium determinatur, omnia habebuntur principia, ex quibus punctorum a quibuscunque potentiis sollicitatorum motus possunt inueniri.

Co-

Corollarium 4.

159. Quia est $dc = \frac{npdt}{A}$, erit spatiolum per quod punctum A a potentia p tempusculo dt perducitur $= \frac{npdt^2}{A}$. Est enim hoc spatiolum factum ex dc in dt. Nam dicto hoc spatiolo dz est $dc = \frac{dz}{dt}$ (128.), adeoque $dz = dc\,dt = \frac{npdt^2}{A}$.

PROPOSITIO 21.

Problema.

160. *Potentiae cuiuscunque in punctum motum oblique agentis effectum determinare.* Tab. II. Fig. 1.

Solutio.

Habeat punctum A celeritatem c directionemque AB. Sollicitetur vero a potentia p, cuius directio AC cum AB faciat angulum, cuius sinus est k. Perspicuum est punctum A sibi relictum neque a potentia sollicitatum in recta AB esse progressurum, tempusculoque dt percursurum spatium $AB = cdt$ (30.). Agente vero potentia p declinabit punctum A a recta AB, percurretque interea spatiolum AD, vt in prop. 14 est ostensum. Posuimus autem ibi AC seu $BD = dz$, quod est spatiolum per quod punctum A, si quiesceret, a potentia p tempore dt pertraheretur. Est ergo $dz = \frac{npdt^2}{A}$ (159.). Anguli igitur BAD sinus, qui inuentus est $= \frac{kdz}{cdt}$ (124.) erit $= \frac{nkpdt}{Ac}$. Atque celeritatis incrementum dc, quod erat $= \frac{dz\sqrt{(1-kk)}}{dt}$ (123), fit $= \frac{npdt\sqrt{(1-kk)}}{A}$. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

161. Vocetur ſpatium $AD = ds$, erit $dt = \frac{ds}{c}$ adeoque poſito $\frac{ds}{c}$ loco dt, prodibit $dc = \frac{npds\sqrt{(1-kk)}}{Ac}$.

Tab. II. Fig. 6. Ducatur ex D in directionem potentiae AE perpendicularis DE, ſitque $AF = dy$, et $DF = dx$, erit $ds^2 = dx^2 + dy^2$, et $k = \frac{dx}{ds}$, et $\sqrt{(1-kk)} = \frac{dy}{ds}$. Prouenict ergo $dc = \frac{npdy}{Ac}$ ſeu $Acdc = npdy$.

Corollarium 2.

162. Ducatur ad curuam, quam corpuſculum hoc modo deſcribit, in A radius oſculi AO, erit $Bb : AB = AD : AO$. Quare erit $AO = \frac{AB.AD}{Bb}$. Eſt vero $\frac{Bb}{AB}$ ſinus anguli BAD, qui inuentus eſt $= \frac{nkpdt}{Ac}$. Erit ergo $\frac{Bb}{AB} = \frac{npdxdt}{Acds}$, atque ob $AD = ds$, prodibit $AO = \frac{Acds^2}{npdxdt}$.

Corollarium 3.

163. Quia vero eſt $dt = \frac{ds}{c}$, erit $AO = \frac{Ac^2ds}{npdx}$. Vocetur radius oſculi $AO = r$, habebitur $nprdx = Ac^2ds$.

Corollarium 4.

164. Si potentiae p directio AE incidat in normalem AO, fiet $AF = dy = o$, et $DF = dx = AD = ds$. Quamobrem erit $cdc = o$, atque idcirco haec potentia celeritatem non immutabit.

Corollarium 5.

165. Hoc porro caſu erit $npr = Ac^2$ ob $dx = ds$, atque ideo $r = \frac{Ac^2}{np}$. Haec igitur potentia, cuius di-

rectio eſt normalis in corporis directionem efficit, vt corpus non in recta motum ſuum abſoluat, ſed in arcu curuae.

Corollarium 6.

166. Si potentiae p directio incidat in tangentem AB; fiet $dx = o$ et $dy = ds$. Habebitur ergo $Acdc = npds$. In hac igitur directione potentia p celeritatem corporis maxime augebit.

Corollarium 7.

167. Si potentiae p directio in oppoſitam ipſi AB directionem incidat, ita vt motui corporis ſit contraria; fiet p quantitas negatiua, habebiturque $Acdc = -npds$. Tantum igitur hoc caſu minuetur celeritas, quantum ante augebatur.

Corollarium 8.

168. In vtroque autem caſu, quo directio potentiae p in tangentem incidit, erit $r = \frac{Ac^2ds}{np.o}$ ob $dx = o$. Tum igitur directio corporis non mutabitur, ſed id in recta moueri perget.

Corollarium 9.

169. Determinato ergo in vnico caſu ex experimento valore litterae n, inſeruiet is pro omnibus caſibus. Tum igitur omnium, quae in motibus poſſunt deſiderari, poterunt aſſignari valores abſoluti.

Corollarium 10.

170. Ex corollario primo prodit $A = \frac{npdy}{cdc}$. Quo valore in tertio ſubſtituto habebitur $nprdx$ =

$=\frac{npcdyds}{ac}$, seu $rdxdc=cdyds$. In qua aequatione neque n neque A neque p inest, haec igitur valet pro motu puncti cuiuscunque a quacunque potentia sollicitati.

Corollarium II.

171. Quanquam autem in ista aequatione ipsa potentia p non inest, tamen eius directio a qua relatio elementorum dx et dy pendet, adhuc super est. Data igitur directione potentiae punctum in quouis loco sollicitantis, et ipsa curua in qua punctum mouetur, poterit ex his solis datis determinari puncti celeritas in quouis loco. Erit enim $\frac{dc}{c}=\frac{dyds}{rdx}$ seu $c=e^{\int\frac{dyds}{rdx}}$ vbi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1.

Corollarium 12.

172. Quia porro est $dt=\frac{ds}{c}$, erit $t=\int e^{-\int\frac{dyds}{rdx}}ds$. Hinc igitur simul innotescit tempus, quo quaeuis curuae portio describitur, neque ad hoc pluribus opus est datis, quam ipsa curua, et directione potentiae.

Corollarium 13.

173. Si ex O in potentiae directionem AE demittatur perpendicularis OF, quae a quibusdam coradius appellatur, erit $dy:dx=AO:AE$. Posito ergo coradio AF$=q$, erit $\frac{rdx}{dy}=q$. Fiet igitur $c=e^{\int\frac{dy}{q}}$, et $t=\int e^{-\int\frac{dy}{q}}ds$.

Scho-

Scholion.

174. Ex solutione huius problematis apparet, posse eius beneficio puncti a quibuscunque potentiis sollicitati motum determinari. Ex duabus enim aequationibus, definitur et puncti celeritas in loco quouis, et curuatura seu radius osculi ipsius curuae percursae. His vero cognitis simul reperietur tempus, quo quaeuis curuae portio absoluitur, quae abunde sufficiunt ad motum determinandum.

DEFINITIO 14.

175. Vis restituens est vis illa imaginaria et infinita, quae partes corporis separatas momento rursus congregat, et in statum pristinum restituit. *Huiusmodi vim in solutione Prop. 18. adesse concepimus, qua duae puncti partes, quae ad momentum solutae concipiebam, rursus contrahebantur.*

Corollarium 1.

176. Si punctum in duas partes aequales concipiatur diuisum, eaeque a potentiis fuerint separatae, vis restituens eas contrahet in medio rectae illas iungentis, vt §. 146 ex principio sufficientis rationis est ostensum.

Corollarium 2.

177. Quia effectus vis restituentis in instanti debet produci, poterit vis restituens considerari vt elastrum vi infinita praeditum, quo partes separatae iterum coniunguntur.

 Scho-

Scholion.

178. Vſus huius vis reſtituentis iam elucet quodammodo ex propoſitione 18, vſus vero eius adhuc erit ampliſſimus in ſequentibus, quando motus corporum finitae magnitudinis ſumus inueſtigaturi. Hic vero effectum eius indagabimus in coniungendis pluribus puncti partibus ſeparatis, quae inquiſitio in ſequentibus magnam habebit vtilitatem. Complectitur ergo vis reſtituens principium aliquod, cuius ope plurimae quaeſtiones facile reſolui poterunt, idque principium reſtitutionis vocabimus.

PROPOSITIO 22.

Theorema.

Tab. II. Fig. 7. 179. *Sint duae puncti partes in* b *et* d *ſeparatae, dico eas a vi reſtituente coniunctum iri in puncto* c *centro grauitatis particularum* b *et* d.

Demonſtratio.

Fuerint hae partes primo coniunctae in A, ſintque eae a potentiis AB, AD pertractae in b et d eodem tempuſculo dt. Harum potentiarum vero aequiualens ſit potentia AC, quae eodem tempuſculo integrum punctum ex A pertrahere valeat in c. Manifeſtum igitur eſt partes b et d a vi reſiſtente in c contrahi debere, quia potentia AC eundem in punctum integrum A edit effectum, ac ambae AB et AD in duas eius partes (149). Hinc igitur innoteſcit punctum concurſus c, in quod particulae b et d a vi reſtituente compellentur. Quo autem particula

cula b a potentia AB tempuſculo dt per ſpatiolum AB protrahatur debet eſſe $Ab = \frac{n.AB.dt^2}{b}$ (159.) ſeu $AB = \frac{Ab.b}{ndt^2}$. Similem ob rationem erit $AD = \frac{Ad.d}{ndt^2}$, et $AC = \frac{Ac.(b+d)}{ndt^2}$. Eſt vero AC diagonalis parallelogrammi, quod a potentiis AB et AD conſtituitur, quia his aequiualet. Ex illis autem aequationibus deducitur $\frac{AB}{Ab} + \frac{AD}{Ad} = \frac{AC}{Ac}$, ſunt vero AB, AD et AC inter ſe vt ſinus angulorum DAC, BAC et BAD. Quamobrem erit $\frac{\int DAC}{Ab} + \frac{\int BAC}{Ad} = \frac{\int BAD}{Ac}$, ex qua proprietate ſequitur puncta b, c, et d eſſe in directum poſita. Hoc cum ſit, erit $bc:cd = \int BAC.Ab:\int DAC.Ad = AD.Ab:AB.Ad$. At eſt $AD:AB = Ad.d:Ab.b$. Conſequenter prodibit $bc:cd = d:b$ ſeu $b.bc = d.dc$. Ex quo intelligitur punctum c eſſe centrum grauitatis particularum b *et* d. Q. E. D.

Corollarium 1.

180. Vbicunque ergo accipiatur punctum A, ſemper in eundem incidit locum punctum concurſus c, ex quo apparet vim reſtituentem conſtantem habere effectum, neque a loco puncti A nec a potentiis particulas b et d ſollicitantibus pendere.

Scholion.

181. Egregie conuenit hic vis reſtituentis effectus cum effectu vis elaſticae, quam eius loco ſubſtituere licet. Iungat enim particulas b et d filum elaſticum bd, quod ſeſe contrahendo b et d congreget in c. Vis autem haec contrahens aequaliter aget in

in particulas b et d, cum vtrinque se aequaliter contrahere conetur. Spatia vero, per quae b et d eodem tempore protrahuntur, sunt reciproce vt ipsae particulae (159), quia ab eadem potentia afficiuntur. Quare si punctum concursus est c, erit bc ad dc reciproce vt b ad d, seu $b.bc = d.cd$. Ex quo etiam intelligitur punctum c esse centrum grauitatis particularum b et d.

Corollarium 2.

182. Quamuis igitur vis restituens sit imaginaria et in sola cogitatione formata, tamen eius effectus sequitur motus leges reales. Hocque magis erimus certi, ope principii restitutionis semper ad veritatem perueniri.

PROPOSITIO 23.
Theorema.

Tab. II. Fig. 8. 183. *Sint* a, b, c, d *partes puncti a se inuicem separatae, quae a vi restituente rursus congregentur: conuenient eae in communi centro grauitatis* g.

Demonstratio.

Ponamus initio integrum punctum fuisse in puncto quocunque O, ex quo singulae hae partes a, b, c, d tempusculo dt a potentiis OA, OB, OL, OD pertractae sint in a, b, c, d. Accipiatur harum potentiarum aequiualens AG, quae eodem tempusculo integrum punctum, quod est $a+b+c+d$, ex O pertraxisset in g; erit g punctum, in quod partes a, b, c, d a vi restituente congregabuntur (149.).

Per

qualiter con- b et d eodem vt ipsae par- a afficiuntur. c ad dc reci- io etiam in- uitatis parti- ns sit imagi- , tamen eius ocque magis is semper ad cti a se inui- congregentur: is g. fuisse in pun- partes a, b, OB, OL, OD iatur harum dem tempus- $+c+d$, ex quod partes intur (149.). Per

Per punctum O ducatur recta quaeuis KN, in eamque ex punctis A, a, B, b, C, c, D, d, G, g demittantur perpendicula. Erunt autem $OA = \frac{Oa.a}{ndt^2}$, $OB = \frac{Ob.b}{ndt^2}$, $OC = \frac{Oc.c}{ndt^2}$, $OD = \frac{Od.d}{ndt^2}$, et $OG = \frac{Og(a+b+c+d)}{ndt^2}$ (159). At ob triangula similia OAK, Oak; OBL, Obl; etc. erit $AK = \frac{OA.ak}{Oa} = \frac{ak.a}{ndt^2}$, $BL = \frac{OB.bl}{Ob} = \frac{bl.b}{ndt^2}$, $CM = \frac{OC.cm}{Oc} = \frac{cm.c}{ndt^2}$, $DN = \frac{OC.dn}{Od} = \frac{dn.d}{ndt^2}$, et $GS = \frac{OG.gs}{Og} = \frac{gs(a+b+c+d)}{ndt^2}$: atque $OK = \frac{OA.Ok}{Oa} = \frac{Ok.a}{ndt^2}$, $OL = \frac{OB.Ol}{Ob} = \frac{Ol.b}{ndt^2}$, $OM = \frac{OC.Om}{Oc} = \frac{Om.c}{ndt^2}$, $ON = \frac{OD.On}{Od} = \frac{On.d}{ndt^2}$ et $OS = \frac{OG.Os}{Og} = \frac{Os(a+b+c+d)}{ndt^2}$. Sed quoniam AG est potentia aequiualens potentiis OA, OB, OC, OD constat ex statica esse AK+BL+CM+DN=GS, et OK+OL−OM−ON=OS. Fiet ergo $ak.a+bl.b+cm.c+dn.d = gs(a+b+c+d)$, et $Ok.a+Ol.b-Om.c-On.d = Os(a+b+c+d)$. Ex quibus proprietatibus intelligitur punctum g esse centrum grauitatis particularum a, b, c, d. Vis ergo restituens has particulas in centro communi grauitatis g congregat. Q. E. D.

Corollarium I.

184. In hoc igitur vis restituentis effectus consistit, quod corpusculi quorcunque partes separatas in ipsarum communi centro grauitatis congreget.

K Co-

Corollarium 2.

185. Hoc igitur modo puncti a pluribus potentiis sollicitati motus poterit determinari sine potentiae aequiualentis consideratione, dum a singulis potentiis partes quaecunque affici ponuntur, quolibetque tempusculo iterum a vi restituente congregari.

Scholion.

Tab. II. Fig. 9. 186. Demonstratio huius theorematis ope filorum elasticorum sese contrahentium eodem modo potest perfici, quo ante fecimus (181.). Sint enim particulae separatae in a, b, c, d, et ponamus primo filum particulas a et b tantum contrahere, coibunt eae in centrum grauitatis e. Nunc concipiamus particulas a et b in e locatas cum particula c coniungi erit punctum concursus in f, quod est centrum grauitatis trium particularum a, b et c. Iam hae tres in f positae cum quarta d coniungantur, erit punctum concursus in g centro grauitatis omnium quatuor a, b, c et d. Quare a vi restituente omnes particulae in commune centrum grauitatis congregantur.

Corollarium 3.

187. Denuo igitur constat, vim restituentem recte per contractionem filorum elasticorum binas quasque particulas iungentium repraesentari.

SCHO-

DE EFF
SCHOL
188. His i
puncti liberi a qui
tus determinari
rum liberorum
tractationem in
quarum prima m
buntur in altera v
ctilinei, vt ex dic
motus directio c
hi vero quando h
que vero partem
duplici potentiar
cta a solis poten
deinde vero ab
Loco relatiuarum
stentia, quia vt i
ad motus corpor
derantur (116.)
sus, qui in rerum
que multum iis,
riuntur, immor
rectilineo puncti l
ti tractabimus. I
lineos puncti liber
tus curuilineos pu
cunque sollicitati
tus curuilineos p
ponemus.

M
cti a pluribus potentiis determinari sine ione, dum a singulis affici ponuntur, i restituente con-
theorematis ope ...tium eodem modo ...us (181.). Sint ..., c, d, et pona... ...antum contrahe... ...tis e. Nunc con... ...tas cum particula ...in f, quod est cen... ...a, b et c. Iam ...d coniungantur, ...grauitatis omni... ...a vi restituente ...entrum grauitatis
3.
, vim restituen... ...orum elasticorum ...n repraesentari.
SCHO-

SCHOLION GENERALE.

188. His igitur positis principiis, ex quibus puncti liberi a quibuscunque potentiis sollicitati motus determinari poterit, progrediemur ad punctorum liberorum motus inuestigandos. Hanc vero tractationem in duas partes dispesci conueniet, in quarum prima motus tantum rectilinei examinabuntur in altera vero curuilinei quicunque. Illi rectilinei, vt ex dictis intelligitur, oriuntur, quando motus directio cum potentiae directione conuenit; hi vero quando hae directiones discrepant. Vtramque vero partem duplici modo tractabimus, pro duplici potentiarum natura: primum scilicet puncta a solis potentiis absolutis sollicitari ponemus; deinde vero ab absolutis et relatiuis coniunctim. Loco relatiuarum quidem substituemus media resistentia, quia vt iam monuimus potentiae relatiuae ad motus corporum in fluidis determinandos considerantur (116.), quamobrem eos potissimum casus, qui in rerum natura existunt, euoluemus, neque multum iis, qui non nisi in imaginatione reperiuntur, immorabimur. Primum ergo de motu rectilineo puncti liberi a potentiis absolutis sollicitati tractabimus. Deinde inuestigabimus motus rectilineos puncti liberi in medio resistente. Tertio motus curuilineos puncti liberi a potentiis absolutis vtcunque sollicitati euoluemus. Quarto denique motus curuilineos puncti liberi in medio resistente exponemus.

CA-