SOLUTIO PROBLEMATIS

ASTRONOMICI EX DATIS TRIBUS STELLAE FIXAE ALTITUDINIBUS ET TEMPORUM DIFFERENTIIS INUENIRE ELEUATIONEM POLI ET DECLINATIONEM STELLAE.

Auct. Leonh. Eulero.

Tab. IX. Fig. 1.

Lemma. In triangulo sphaerico quocunque ABC est cos: anguli $A = \frac{\cos: BC - \cos: AB . \cos: AC}{\sin AB . \sin AC}$, posito radio vel sinu toto 1. Liquet hoc ex iis, quae *Clar. Professor Maier* in suis Trigonometricis tradidit.

Coroll: Ex his fluit esse cos: BC = cos: AB. cos: AC + cos: A. $\sin$AB. $\sin$AC.

Theorema. In omni triangulo sphaerico ABC, est cos: $BC = \frac{\cos:(AB+AC) - \cos:(AB-AC)}{2} + \frac{\cos:A.\cos:(AB-AC) - \cos:A.\cos:(AB+AC)}{2}$. Posito sinu toto 1.

Demonstratio. Factum duorum cosinuum aequatur semissi cosinus summae cum semissi cosinus differentiae arcuum vel angulorum. Atque factum duorum sinuum aequale est semissi cosinus differentiae, demta semissi cosinus summae arcuum vel angulorum. Vt ex iisdem citatis vel apparebit, vel facile colligetur. Erit igitur cos: AB. cos: AC = $\frac{\cos.(AB+AC) + \cos:(AB-AC)}{2}$, et $\sin$AB. $\sin$AC = $\frac{\cos:(AB-AC) - \cos:(AB+AC}{2}$ His ad aequationem in lemmatis corollario accommodatis prodibit cos: $BC = \frac{\cos:(AB+AC) + \cos:(AB-AC)}{2} + \frac{\cos:A.\cos:(AB-AC) - \cos:A.\cos:(AB+AC)}{2}$. Q. E. D.

PRO-

PROBLEMA.

Datis ſtellae fixae in tribus locis ABC ſucceſſiue obſeruatae altitudinibus ſiue earum complementis ZA, ZB, ZC, temporibusque inter obſeruationes praeterlapſis, vel angulis ad polum P, APB, BPC, inuenire eleuationem poli ſeu ejus complementum PZ, et declinationem ſtellae ſeu ejus complementum AP vel BP vel CP. Fig. 2.

Solutio. Dicantur ſinus altitudinis primae vel coſ. AZ, a; Coſinus BZ, b et coſ. CZ, c. Atque ∫APB, P; ejusque coſinus, p: ∫APC, Q, ejusque coſinus, q. Sit autem ∫ZPA=Z ejusque coſinus $=z$. Tum compendii cauſa ſit coſ. ZPB$=r$ et coſ. ZPC$=s$. Ponatur porro coſ. (PZ+AP)$=x$, et coſ. (PZ−AP)$=y$. Habebitur in triangulo ſphaerico ZPA, coſ. AZ vel $a=\frac{x+y+zy-zx}{2}=\frac{(1-z)x+(1+z)y}{2}$. Deinde in triangulo ZBP eſt $b=\frac{x+y+ry-rx}{2}=\frac{(1-r)x+(1+r)y}{2}$. Et ſimiliter in triangulo ZPC erit $c=\frac{(1-s)x+(1+s)y}{2}$. Ex quibus tribus aequationibus tres incognitas x, y et z determinari oportet. Aequationes I et II dabunt $y=\frac{a(1-r)-b(1-z)}{z-r}$. Secunda vero et tertia dant $y=\frac{b(1-s)-c(1-r)}{r-s}$. Vnde colligitur haec aequatio $a(1-r)(r-s)-b(1-z)(r-s)$
c). $=b(1-s)(z-r)-c(1-r)(z-r)$. Quae abit in hanc, $a(1-r)(r-s)+c(1-r)(z-r)=b(1-r)(z-s)$, atque diuiſa per $1-r$ dat $a(r-s)+c(z-r)=b(z-s)$. Sed ex conjunctione ſinuum ſequitur eſſe $r=pz-$PZ et $s=qz-$QZ. Vnde habebitur $az(p-q)-a$Z(P−Q)

 $+cz$

$+cz(1-p)+cPZ=bz(1-q)+bQZ$. Ex qua conficitur haec $\frac{Z}{z}=\frac{a(p-q)-b(1-q)+c(1-p)}{aP-aQ+bQ-cP}=\frac{a(p-q)-b(1-q)+c(1-p)}{P(a-c)-Q(a-b)}$. Eſt autem $\frac{Z}{z}$ tangens anguli ZPA; dicatur ea T, ſitque etiam $1-p=\pi$ et $1-q=\varkappa$, denotabunt π et $\varkappa$, ſinus verſos angulorum APB, APC. Eruitur igitur haec aequatio $T=\frac{a(\varkappa-\pi)-b\varkappa+c\pi}{P(a-c)-Q(a-b)}=\frac{\varkappa(a-b)-\pi(a-c)}{P(a-c)-Q(a-b)}$. Ex qua determinatur angulus ZPA, ex eoque reliqua. Eſt autem $y=\frac{a(1-r)-b(1-z)}{z-r}$ et $x=\frac{b(1+z)-a(1+r)}{z-r}$ vt ex praecedentibus apparet. Dato vero angulo ZPA, dabitur et ZPB et proinde r. Erit autem $\frac{y+x}{2}=a-\frac{z(a-b)}{z-r}$ et $\frac{y-x}{2}=\frac{a-b}{z-r}$. Hinc facile inueniuntur y et x, coſinus ſummae et differentiae arcuum quaeſitorum. Q. E. T.

Exemplum hic appono, quod antea ex altitudine poli 54°, 43′ aſſumta computaueram, vt inueſtigarem iidemne hac methodo eruantur numeri. Eſt altitudo prima 71°, 15′, ſecunda 68°, 34′, et tertia 63°, 54′. Tempus inter I et II obſeruationem ſeu angulus APB eſt 7°, 52′. Tempus inter primam et tertiam ſeu ang: APC eſt 20°, 36′. Erit ergo $a=9469502$, $b=9308279$, $c=8979213$. Ergo $a-c=490289$, $a-b=161223$, porro $P=1368683$ et $\pi=94107$, $Q=3518416$, $\varkappa=639404$. Erit $\varkappa(a-b)-\pi(a-c)=5692700$ et $P(a-c)-Q(a-b)=10380060$. Vnde inuenitur $T=5484423$ = tang: 28°, 45′. Eſt ergo angulus ZPA=28°, 44′, et ZPB=36°, 37′. Habetur itaque coſ: ZPA$=z=8767267$ et coſ: ZPB$=r=8026440$. Ergo $z-r=0740727$. Cum vero ſit

$a-b$

$a-b=162223$. Erit $\frac{a-b}{z-r}=2176264=\frac{y-x}{2}$. Deinde est $\frac{z(a-b)}{z-r}=1907988$. Hoc ab $a=9469502$ ablato restat $\frac{y+x}{2}=7561514$. Hinc inuenitur $y=9737778$, et $x=5385250$. Est ergo summa arcuum AP+ZP=57°, 25′, et differentia arcuum AP−ZP vel ZP−AP=13°, 9′. Ex his pro AP et ZP inueniuntur hi duo valores 35°, 17′ et 22°, 8′. Et pro eleuatione poli et declinatione stellae consequenter hi duo qui sunt illorum conplementa 54°, 43′ atque 67°, 52′. Quis autem horum sit pro declinatione aut eleuatione poli ex problemate non determinatur. Id tamen certum est alterum eleuationem poli, alterum declinationem stellae praebere.

Verum etiam hinc stellae tempus culminationis cognoscitur: distat enim a tempore primae obseruationis angulo ZPA, quia PZ est arcus meridiani. Inuentus vero est ang. ZPA=28°, 45′, qui ad tempus reductus dat 1 hor. 55′, hocque tempore vel addendo vel subtrahendo a momento obseruationis primae, prout circumstantiae requirunt, inuenitur tempus culminationis, si ipse sol in obseruationibus hisce adhibeatur, inuenietur verum meridiei tempus.