cillationum per PAN. Quare si in vtroque lapsu graue ad N vsque perueniat ascendendo, erit $tMA + tAN = 2tPA + 2tAN$. Consequenter $tMA - tAN = 2tPA$. Differentia ergo temporum descensuum per arcus MA et NA aequatur duplo tempori descensus per verticalem AP.

CURVA TAUTOCHRONA IN FLUIDO RESISTENTIAM FACIENTE SECUNDUM QUADRATA CELERITATUM.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Postquam *Hugenius* primum inuenisset cycloidem esse curuam Tautochronam in vacuo et Hypothesi grauitatis vniformis; *Neutonus* atque *Hermannus* dederunt quoque Tautochronas pro hypothesi grauitatis difformiter agentis et tendentis ad punctum quodcunque fixum tanquam centrum. Posuerunt autem motum fieri in vacuo, neque vllam pati resistentiam. Quod vero ad media resistentia attinet, *Neutonus* etiam demonstrauit cycloidem esse tautochronam in medio in celeritatum ratione resistente; ad alia autem resistentia media neque ipse neque quisquam alius est progressus, vt, quae curuae in iis tautochronismum producant, ostenderent. M. Octobr. 1729. Tab. VII.

§. 2. Non quidem eſt difficile in medio quocunque reſiſtente inuenire curuam, ſuper quâ graue eodem modo deſcendat, quo ſuper data curuâ in vacuo. Id, cum intellexiſſem eas quaeſiui in quacunque reſiſtentiae hypotheſi curuas, ſuper quibus graue aequaliter deſcendat ac ſuper cycloide in vacuo, quae mihi curuae tum tautochronae in mediis his reſiſtentibus eſſe videbantur, eo quod corporis ſuper iis deſcenſus aequalis eſſet deſcenſui corporis ſuper Tautochronâ curua in vacuo. Atque hanc ipſam proprietatem eae habent curuae, quas in Actis Lipſ. Ao. 1726. dedi, et corpora ſuper quâque earum in medio, ad quod ea pertinet, reſiſtente collocata eodem deſcendunt modo, quo ſuper cycloide in vacuo; quamobrem eas etiam Tautochronarum nomine appellaui.

§. 3. Rem vero hanc poſtea accuratius perpendens, eam ita habere deprehendi; vt tota curua in medio reſiſtente percurrenda ab initio deſcenſus ſuper curua in vacuo percurrenda aſſumto pendeat. Quare ſi in curua data aliud ponatur deſcenſûs initium ipſa curua datae in medio reſiſtente ſimilem deſcenſum producens alia erit. Ex quo intelligitur etiam ſi habeatur curua, ſuper qua corpus in medio reſiſtente aequalem habeat deſcenſum, ac ſuper cycloide in vacuo, initio deſcenſus videlicet dato; tamen hanc nondum eam habere proprietatem, vt graue ubicunque deſcenſum inchoauerit eodem tempore ad punctum infimum perueniat, etenim

nim descensus non cum descensu in cycloide congruet, nisi is ex dato puncto incipiatur.

§. 4. Idem attendenti uberius palam fiet, si inspiciat aequationes ibi datas, et modum, quo erutae fuerunt. Deprehendet enim in iis adhuc literam, quae constantis speciem prae se fert; quae vero re ipsa ac initio descensus pendet. Id ergo si aliter voluerit assumere ea apparens constans alia erit et idcirco curua quasi alium parametrum acquiret, et a priori diuersa euadet. Hoc incommodum non diu post ipse animaduerti, et praeterea Celeb. *Hermannus* in dissertatione de motibus variatis Actis Anni 1727 inserta, in qua ostendit, curuas, quae ex eodem principio, quo ipse usus sum, inueniantur, quaeque tautochronae esse videantur, hujusmodi tamen non esse, tum ob rationes a me perspectas hicque expositas, tum tempus descensus ipsum inuestigauit, idque constans non esse pro variis descensus initiis reperit.

§. 5. Nolo igitur, quanquam eas ipse principio in tautochronarum numero habui, aliud judicium de iis ferri, nisi quod pro quolibet medio resistente aequatio ibi data ob constantem memoratam variabilem ponendam totam exhibeat familiam curuarum, super quibus grauia ex debito cuique puncto descensum incipientia aequali tempore ad punctum infimum perueniant, idque eodem modo, quo in vacuo super cycloide. Cum igitur cognouissem curuas has ad tautochronismum producendum non esse aptas, statim non solum ego verum etiam alii, cum quibus communicaueram in id incubuimus, vt veras tautochronas in medio quocunque resistente inueniremus. Postquam igitur rem multis modis tentassem, potitus sum tandem tautochrona, sed in vnica tantum resistentiae hypothesi juxta velocitatis quadrata, quam in hac dissertatione exponere constitui.

§. 6. Cum nuper nouam quandam detexissem methodum, quâ a priori nonsolum cycloidem, sed insuper infinitas adhuc alias inueni curuas tautochronas in vacuo, eâ quoque ad tautochronas in mediis resistentibus inueniendas vti institui; methodi vniuersalitate fretus, si quae sint tautochronae in mediis resistentibus, eas ope hujus methodi inueniri debere. Quantum autem adhuc hac in re efficere potui, prorsus mihi necesse esse visum est, vt velocitas corporis super curua quacunque in eo resistenti medio, pro quo tautochrona desideratur, descendentis vel ascendentis in puncto quocunque possit exprimi, non quidem algebraice, sed transcendenter quomodocunque. Id vero cum nonnisi in vacuo, et in medio resistentiam in ratione duplicata celeritatum faciente praestare in potestate sit, tautochronam saltem in fluidis, quia haec in ratione duplicata celeritatum resistere putantur, hic inuenire docebo.

§. 7. Volui primum problema ita instituere, vt nuper eandem quaestionem in vacuo tractaui, vt, quemadmodum ibi factum est, data curua quacunque inuenirem aliam, quae cum ea conjuncta tauto-

chro-

chronismum oscillationibus inducat. Verum istam quaestionem nondum enodare licuit, cum plane dissimilis sit ejus quae ad vacuum spectat. Nam ad rem eodem modo, quo in vacuo feci, expediendam opus est, vt in duabus curuis data et quaesita duo semper puncta dari queant, in quibus corporis oscillantis celeritates sunt aequales, atque vt eorum determinatio non ab ipsa velocitate pendeat; sed quibus in punctis vna oscillatione celeritates aequales fuerunt, ibidem in aliis oscillationibus sint aequales. Id vero cum in fluido fieri nequeat, contentus hic ero eam determinasse curuam, super qua corpus descendens aequali semper tempore ad punctum infimum pertingat.

§. 8. Sit CMA curua quaesita ad axem AP verticalem relata. Hanc ejus esse oportet proprietatem, vt corpus super ea in fluido collocata descendens aequalibus temporibus ad punctum infimum A perueniat, vbicunque descensum adorsum fuerit. Fiat is ex E, perspicuum est, corpus descendendo a vi grauitatis, quatenus ejus grauitas specifica major est illa, quam habet fluidum, continuo accelerari, simul vero propter resistentiam fluidi continuo in ratione duplicata celeritatum retardari, donec tandem in A retineat certam celeritatem, quam ponam in vacuo acquiri posse lapsu ex altitudine b. Vt corpus ex A hac celeritate rursus in E vsque ascendere possit, oportet grauitatis vim, quae ante promouebat, aduersam; resistentiae vero vim, quae ante aduersa erat, nunc secundam et promouentem pone- Fig. 1.

ne-

nere, quo fiet, vt hic afcenfus prorfus fimilis fit defcenfui. Quia magis juuat afcenfum confiderare, hoc praemittere oportuit.

§. 9. Afcendere ergo ponatur corpus ex A velocitate altitudinis b, ita vt acceleretur in ratione duplicata celeritatum, perueniet id rurfus ad E. Sit hoc corpus cylinder altitudinis a fecundum axis directionem motus; etfi haec figura minus idonea fit ad ofcillandum, tamen, quia calculus fit fimplicior, facileque ad alias figuras transferri poteft, hanc figuram retinere volui. Sit porro grauitas fpecifica corporis ad eam fluidi vt m ad n. Peruenerit corpus hoc modo afcendens ad M, vbi ejus celeritas fit tanta quanta ex altitudine v in vacuo generatur. Dicatur arcus percurfus AM, s, et abfciffa AP, x. Momento perueniant omnia in fitum proximum corpus nempe in m. Erit celeritas corporis in m genitae ex altitudine $v+dv$ aequalis atque $Mm=ds$ et $Pp=dx$.

§. 10. Quia corpus in fluido verfatur, non toto fuo pondere defcendere conatur, fed exceffu fui ipfius ponderis fuper pondus aequalis voluminis fluidi. Vis ergo corpus follicitans eft ad verum ejus pondus vt $m-n$ ad m. Si igitur vis grauitatis dicatur g, erit vis haec follicitans $=(m-n)g:m$. Afcendente corpore per elementum Mm, fi vis grauitatis ipfa g ageret foret $dv=-dx$, fi nimirum corpus in vacuo afcenderet. Quia autem vis follicitans eft ad vim grauitatis vt $m-n$ ad m, erit effectus illius ad hujus effectum $-dx$ vt $m-n$ ad m. Quamobrem agen-

agente vi hac follicitante, erit $dv=-(m-n)dx:m$ signum hic negatiuum obtinet, quia vis grauitatis contraria ponitur motui corporis. Haec igitur haberetur aequatio $dv=-(m-n)dx:m$, ex qua motus corporis determinari deberet, nifi acceleratio, quae refiftentiae fluidi aequalis eft, accederet.

§. 11. Videamus nunc, quanta fit refiftentia fluidi in cylindrum velocitate alt. v motum bafin fuam obuertentem. Vis haec aequalis eft vi, quam fluidum eadem celeritate motum in cylindrum quiefcentem exereret; haec vero vis aequatur ponderi cylindri fluidi altitudinis v, et bafis aequalis ei, quam habet ille cylinder ofcillans. Eft itaque pondus ejus cylindri fluidi ad pondus hujus vt nv ad ma. Vis igitur haec refiftentiae fe habet ad vim grauitatis quoque vt nv ad ma. Corpore autem afcendente per Mm, fi grauitas accelераret, et fecundum directionem Mm ageret, foret $dv=ds$. Vis ergo refiftentiae pro ea ratione effectum edens et accelerans corpus motum, faciet vt fit $dv=nvds:ma$; fi autem retardaret, foret $dv=-nvds:ma$.

§. 12. Si igitur fola vis grauitatis ageret retardando motum corporis, tum effet per §. 10. $dv=-(m-n)dx:m$, fin vero fola vis accelerans aequalis vi refiftentiae ageret, tum effet per §. 11. $dv=nvds:ma$. Ex quibus colligitur, fi vtraque fimul agat, tum effe $dv=nvds:ma-(m-n)dx:m$, feu $madv+(m-n)adx-nvds=0$. Ex qua aequatione motus corporis determinari debet. Quia autem in hac aequatione v vnicam habet dimenfionem, ea in-

integrari poteſt. Reducatur ad hanc formam $dv - \frac{nvds}{ma} = \frac{-(m-n)dx}{m}$. Multiplicetur ea per $c^{\frac{-ns}{ma}}$; denotat vero c numerum, cujus logarithmus hyperbolicus eſt 1, habebitur $c^{\frac{-ns}{ma}}dv - \frac{nc^{\frac{-ns}{ma}}vds}{ma} = \frac{-(m-n)c^{\frac{-ns}{ma}}dx}{m}$. Cujus integralis eſt ſequens $c^{\frac{-ns}{ma}}v = C - \frac{(m-n)}{m}\int c^{\frac{-ns}{ma}}dx$.

§. 13. Ponatur $\frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-ns}{ma}}dx = t$, cum ejus integrale ex curua cognita poſſit haberi, vel ſaltem conſtrui. Ita autem, ſi fieri poſſet, integrari ponitur, vt ejus integrale fiat $= 0$, ſi ponatur $x = 0$, quo t determinatum valorem adipiſcatur. Habemus ergo ſequentem aequationem $c^{\frac{-ns}{ma}}v = C - t$. Conſtans haec C ita debet accipi, vt, poſito $x = 0$, fiat $v = b$, talis enim ponitur eſſe celeritas corporis in puncto A, ſed poſito $x = 0$, erit et $s = 0$ et $t = 0$, vnde quia $c^0 = 1$, oritur $C = b$. Quamobrem inuenitur ſequens ad inſtitutum noſtrum prorſus accommodata aequatio $v = c^{\frac{ns}{ma}}(b-t)$. Et hinc quoque intelligitur, vbi velocitas euaneſcat, ſeu quouſque corpus in curua ſit aſcenſurum, ibi nimirum vbi eſt $v = 0$, ſeu $t = b$. Celeritas vero ipſa corporis in M erit vt $\sqrt{v}$ ſeu vt $c^{\frac{ns}{2ma}}\sqrt{(b-t)}$.

§. 14. Cum jam habeatur celeritas corporis M, erit tempuſculum per arculum Mm, quod eſt vt $\frac{ds}{\sqrt{v}}$, ſeu lo-

loco v ſuperiore valore ſubſtituto vt $\frac{ds}{c^{\frac{ns}{2ma}}\sqrt{(b-t)}}$. Id quod exprimit elementum temporis. Hujus ergo integrale ita debet eſſe comparatum, vt, ea adjecta conſtante, quae facit tempus $=0$ ſi ponatur x vel t vel $s=0$, vt inquam, ſi fiat $t=b$, quo in caſu integrum obtinetur tempus aſcenſus, tum b quae a quantitate arcus deſcripti pendet prorſus ex computo abeat. Hoc vt fiat jam alibi demonſtraui oportere, vt tota expreſſio elementi temporis nullam habeat dimenſionem. Quaeritur ergo qualis s functio ipſius t eſſe debeat? Quia ad s exprimendum b in computum ingredi non poteſt, ſed ſolum t, perſpicuum eſt fore $\frac{ds}{c^{\frac{ns}{2ma}}}=\frac{dt\sqrt{e}}{\sqrt{t}}$ et ſic elementum temporis erit $\frac{dt\sqrt{e}}{\sqrt{(bt-tt)}}$. Ergo longitudo penduli iſochroni in vacuo eſt $2e$.

§. 15. Ex determinatione curuae, vt fiat tautochrona, haec orta eſt aequatio $ds : c^{\frac{ns}{2ma}}=dt\sqrt{e}:\sqrt{t}$ ex qua natura curuae determinari debet. Aequatio ea integrata dat hanc $C-\frac{2ma}{n}c^{\frac{-ns}{2ma}}=2\sqrt{et}$; vt, facto $t=0$, fiat $s=0$, neceſſe eſt, vt ſit $C=\frac{2ma}{n}$; Propterea haec inuenitur aequatio pro curua quaeſita, $\frac{ma}{n}(1-c^{\frac{-ns}{2ma}})=\sqrt{et}$, et ſumendis quadratis haec $\frac{mmaa}{nn}(1-c^{\frac{-ns}{2ma}})^2=et$. Quae denuo differentiata dat

$\frac{ma}{n}(1-c^{\frac{-ns}{2ma}})c^{\frac{-ns}{2ma}}ds = edt$ seu $mac^{\frac{-ns}{2ma}}ds - mac^{\frac{-ns}{ma}}ds = nedt$. Est vero $t = \frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-ns}{ma}}dx$, ergo $dt = \frac{m-n}{m}c^{\frac{-ns}{ma}}dx$. Quocirca ejecto t, habebitur aequatio inter s et x, haec $mmac^{\frac{-ns}{2ma}}ds - mmac^{\frac{-ns}{ma}}ds = (m-n)nec^{\frac{-ns}{ma}}dx$. Quae multiplicata per $c^{\frac{ns}{ma}}$ abit in hanc $mmac^{\frac{ns}{2ma}}ds - mmads = (m-n)nedx$.

§. 16. Aequatio differentialis inuenta est iterum integrabilis; integrata vero dat, $\frac{2m^3aa}{n}c^{\frac{ns}{2ma}} - mmas - \frac{2m^3aa}{n} = (m-n)nex$, postquam debita constans $\frac{2m^3aa}{n}$ ablata est. Quae magis accommodatur hoc modo $c^{\frac{ns}{2ma}} = \frac{ns}{2ma} + 1 + \frac{(m-n)nnex}{2m^3aa} = \frac{m^2aas + 2m^3aa + (m-n)n^2ex}{2m^3aa}$ Haec quidem aequatio sufficeret ad curuam construendam; sed commodior euadet liberata ab exponentialibus. Hanc ob rem sumantur logarithmi, eritque $\frac{ns}{2ma} = l(m^2nas + 2m^3aa + (m-n)n^2ex) - l2m^3aa$. Hinc differentiando acquiritur $\frac{nds}{2ma} = \frac{m^2nads + (m-n)n^2edx}{m^2nas + 2m^3aa + (m-n)n^2ex}$ et ex hac ordinando $m^2n^2asds + (m-n)n^3exds = 2(m-n)mn^2aedx$. Quae diuisa per nn praebet sequentem aequationem finalem pro curua quaesita, $m^2asds + (m-n)nexds = 2(m-n)maedx$.

§. 17. Si itaque curua AME eam habuerit proprietatem, vt sit $m^2asds + (m-n)nexds = 2(m-n)maedx$

ea

ea erit tautochrona hoc ſenſu, vt corpus cylindricum altitudinis a ſuper ea deſcendens eodem ſemper tempore ad punctum infimum A perueniat, vbicunque deſcenſum inceperit. Si loco cylindri placuerit globum adhibere ejusdem grauitatis ſpecificae et diametri a, oportebit loco a in aequatione ſcribere $\frac{4}{3}a$, habebiturque $4m^2asds + 3(m-n)nexds = 8(m-n)maedx$, pro motu globi, cujus diameter eſt a. Si longitudo penduli iſochroni in vacuo oſcillanti dicatur f, erit $e = \frac{1}{2}f$; et hinc reſultabit aequatio $8m^2asds + 3(m-n)nfxds = 8(m-n)mafdx$. Hanc aequationem jam ad quemuis caſum ſpecialem accommodare licet.

§. 18. Ponamus denſitatem fluidi euaneſcere, quo motus corporis fiat in vacuo; erit $n = 0$. Hoc igitur poſito aequationis terminus ſecundus $3(m-n)nfxds$ euaneſcit, et tunc pro tautochrona in vacuo prodibit aequatio $8m^2asds = 8(m-n)mafdx$. Quae, cum ſit $n = 0$, diuiſa per $8m^2a$ reducitur ad $sds = fdx$. Haec vero integrata eſt $ss = 2fx$, aequatio ad cycloidem, cujus circuli genitoris diameter eſt $\frac{1}{2}f$. Id quod prorſus congruit cum iis, quae de tautochronismo cycloidis demonſtrata ſunt. Si ergo aequatio inuenta tautochronae in fluido ad vacuum reducitur, litera a diametrum globi oſcillantis denotans exit ex aequatione; et tautochrona in vacuo proinde a magnitudine et figura corporis oſcillantis non pendet. Sed in fluido ad tautochronam determinandam et magnitudine et figura et grauitate ſpecificâ corporis oſcillantis opus eſt.

§. 19. Curua, quam inuenimus, tautochrona inseruit descensui corporis, sed ex ea tautochrona, quae ad ascensum spectat in eodem fluido, inueniri poterit. Ponatur enim corpus in curua AME ascendere celeritate initiali, vt ante, ex altitudine b genita; habebit id et vim grauitatis, et resistentiam fluidi contrarias. Quamobrem, cum supra pro descensu haec inuenta sit aequatio, $madv+(m-n)adx-nvds=0$, vbi vis resistentiae, vti rem ibi consideraui, erat accelerans; hoc in casu corporis ascendentis signum $-$ praefixum termino $nvds$, qui vim resistentiae fluidi exponit, mutari debet in $+$. Quo facto habebitur aequatio $madv+(m-n)adx+nvds=0$. Ex qua ascensus ejusdem corporis, quod ante descendere positum est, determinabitur.

§. 20. Perspicuum est hanc aequationem ex superiore ad descensum spectante deriuari posse, modo in illa fiat s negatiuum. Quocirca, ad tautochronam ascensui inseruientem inueniendam non est necessarium, vt eodem, quo pro descensu, progrediar modo, sed tantum in aequatione pro tautochrona descensus inuenta loco s poni poterit $-s$. Hoc enim ea transformabitur in tautochronam ad ascensum accommodatam. Si ergo corpus ascendens fuerit globus diametri a, ejus grauitas specifica ad eam fluidi vt m ad n, habebitur pro tautochrona sequens aequatio $8m^2asds-3(m-n)nbxds=8(m-n)mabdx$. Vbi loco f posui b, ne tempora ascensus et descensus aequalia esse debere videantur.

§. 21.

§. 21. Cum igitur curuam et descendente corpore et ascendente tautochronam inuenerim; eae si in punctis infimis jungantur, repraesentabunt tautochronam ascensui et descensui simul inseruientem. Sit AM tautochrona pro descensu, altera AN pro ascensu; manifestum est, si corpus semper in curua AM descensum incipiat, et vltra punctum in curua AN ascendat, tum oscillationes has absolutum iri atqualibus temporibus, vbicunque initia descensus in AM assumantur. Si igitur AP fuerit x et AM s, erit $8m^2asds + 3(m-n)nfxds = 8(m-n)mafdx$, pro altera curua AN vero, si dicatur $AQ = u$, et $AN = t$, erit $8m^2atdt - 3(m-n)nbudt = 8(m-n)mabdu$. Tempus vero oscillationis vnius aequale est duabus dimidiis oscillationibus duorum pendulorum in vacuo, quorum alterius longitudo est f, alterius b, seu vni integrae oscillationi penduli cujus long. $= \frac{f + 2\sqrt{fb} + b}{4}$.

§. 22. Si fuerit $f = b$, erunt duae curuae AM, AN partes ejusdem curuae continuae: Id quod ex eo intelligi potest, quod tum, si loco x ponatur u et loco s, quia in altera curua arcus fiunt negatiui, $-t$, aequatio illa ad descensum pertinens mutetur in hanc ascensui inseruientem. Curua ergo MA ab altera parte continuatur in curua AN, et tota curua MAN hanc habet proprietatem vt globus diametri a, et grauitatis specificae m super ea in fluido grauitatis specificae n constituta motum aequalibus semper temporibus oscillationis absoluat. Descensus vero fieri debent in curua MA, et ascensus in AN, nisi forte eae curuae hanc insuper habeant proprietatem,

tem, vt et, ſi deſcenſus in NA et aſcenſus in AM fierent, oſcillationes totae omnes vt ante eſſent tautochronae.

§. 23. Aequatio exponentialis §. 16. in eo ſolum differt ab ea, quam §. 21. dedimus, quod ibi ſit a id quod hic eſt $\frac{4}{3}a$, et e, quod hic $\frac{1}{2}f$. Si ergo in ea aequatione ponatur $\frac{4}{3}a$ loco a, et $\frac{1}{2}f$ loco e, habebitur $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}}-64m^3aa-24m^2nas=9(m-n)n^2fx$ quae aequatio conuenit cum eâ quae deſcenſui §. 21. inſeruire inuenta eſt, $8m^2asds+3(m-n)nfxds=8(m-n)mafdx$. At alteri aequationi ad aſcenſum pertinenti $8m^2atdt-3(m-n)nbudt=8(m-n)mabdu$, reſpondet haec $64m^3aac^{\frac{-3nt}{8ma}}-64m^3aa+24m^2nat=9(m-n)n^2bu$. Hae aequationes exponentiales ſufficiunt ad curuas conſtruendas, quarum coordinatae ſint x et s; atque u et t, ex quibus deinceps ipſae curuae tautochronae conſtrui poterunt.

§. 24. Cum c ſit numerus cujus logarithmus hyperbolicus eſt 1, erit $c^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}etc.$ Hanc ob rationem eſt $c^{\frac{3ns}{8ma}}$ ſeu dicto $\frac{3n}{8m}=k$, $c^{\frac{ks}{a}}=1+\frac{ks}{a.1}+\frac{k^2ss}{a^2 1.2}+\frac{k^3s^3}{a^3 1.2.3}+\frac{k^4s^4}{a^4 1.2.3.4}etc$, adeoque $64m^3a^2c^{\frac{ks}{a}}=64m^3a^2+\frac{64m^3aks}{1}+\frac{64.m^3k^2ss}{1.2}+\frac{64.m^3k^3s^3}{a.1.2.3}+\frac{64.m^3k^4s^4}{a^2 1.2.3.4}etc.$ Aequatio igitur ſuperior exponentia-

lis,

lis, quae ob $\frac{3n}{8m}=k$ et inde $3n=8km$, mutatur in
$64m^3aac^{\frac{ks}{a}}-64m^3aa-64km^3as=64(1-\frac{8}{3}k)k^2m^3fx$,
seu in $a^2c^{\frac{ks}{a}}-aa-kas=(1-\frac{8}{3}k)k^2fx$, reducetur ad sequentem ex terminorum infinito numero constantem $\frac{k^2ss}{1.2}+\frac{k^3s^3}{a.1.2.3}+\frac{k^4s^4}{a^2 1.2.3.4}$ $etc=(1-\frac{8}{3}k)k^2fx$, quae diuisa per kk dat $\frac{ss}{1.2}+\frac{ks^3}{a.1.2.3}+\frac{k^2s^4}{a^2 1.2.3.4}$ $etc=(1-\frac{8}{3}k)fx$ similiter pro ascensu erit $\frac{tt}{1.2}-\frac{kt^3}{a.1.2.3}+\frac{k^2t^4}{a^2 1.2.3.4}$ $etc=(1-\frac{8}{3}k)bu$.

§. 25. Ex his aequationibus colligitur, curuam vtramque et descensus et ascensus abire in cycloides, si $k:a$ fuerit infinite paruum; est vero $k=\frac{3n}{8m}$; Ergo eae curuae erunt cycloides si $3n:8ma$ fuerit quantitas euanescens. Id duplici modo euenire potest; Primo si $n:m=0$, id est, si fluidi densitas nulla sit, quo casu motus fit in vacuo. Alter est casus, si $a=\infty$ seu si globus oscillans fuerit infinite magnus ratione videlicet arcuum descriptorum s. Id ergo si acciderit, tautochrona quoque erit cyclois. Porro et id inde concluditur, quo major minorue sit fractio $3n:8ma$ seu tantum $n:ma$ eo magis minusue tautochronas a cycloide discrepare. Ex quo, quanto magis minusue in quouis fluido datus globus secundum cycloidem oscillans a tautochronismo aberret, perspici poterit.

§. 26. Perpendam nunc, qualem tautochronae inuentae figuram habere debeant, et primum ea,

Fig. 3. quae ad descensum pertinet. Sit AMB talis curua super axe AP vt dictis abscissis AP, x, applicatae PM exprimant s. Habebitur pro hac curua haec aequatio, $8m^2 asds+3(m-n)nfx\,ds=8(m-n)mafdx$, vel haec $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}}-64m^3aa-24m^2nas=9(m-n)n^2fx$. Ex hac aequatione apparet hanc curuam nusquam habere punctum flexus contrarii, sed vniformi tractu, vt parabolam, in infinitum progredi. Curua autem inde formata, cujus arcus sunt respondentibus applicatis PM aequales, ibi habebit punctum reuersionis vbi $ds=dx$. Hoc vero erit ibi, vbi est $8m^2as+3(m-n)nfx=8(m-n)maf$. Quae cum exponentiali aequatione conjuncta dat $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}}-64m^3aa=24(m-n)mnaf$. Hinc elicitur punctum flexus contrarii esse in eo loco, vbi $s=\frac{8ma}{3n}l\frac{8m^2a+3(m-n)nf}{8mma}=\frac{8ma}{3n}l\left(1+\frac{3(m-n)nf}{8mma}\right)$.

§. 27. Cum sit $8m^2as+3(m-n)nfx=8(m-n)maf$ erit $x=\frac{8ma}{3n}-\frac{8m^2as}{3(m-n)nf}$. Sed inuentum est $s=\frac{8ma}{3n}l\left(1+\frac{3(m-n)nf}{8m^2a}\right)$. Quamobrem punctum reuersionis erit ad altitudinem x ab imo puncto A, estque $x=\frac{8ma}{3n}-\frac{64m^3aa}{9(m-r)n^2f}l\left(1+\frac{3(m-n)nf}{8mma}\right)$. Conuertam logarithmum in seriem, vt facilius de loco puncti reuersionis judicare liceat. Est vero $l\left(1+\frac{3(m-n)nf}{8mma}\right)=\frac{3(m-n)nf}{8mma}-\frac{9(m-n)^2n^2ff}{2.64m^4aa}+\frac{27(m-n)^3n^3f^3}{3.512m^6a^3}-\frac{81(m-n)^4n^4f^4}{4.4096m^8a^4}$ etc, ergo $\frac{64m^3aa}{9(m-n)n^2f}$

$l(1+$

$l(1+\frac{3(m-n)nf}{8m^2a})=\frac{8ma}{3n}-\frac{(m-n)f}{2m}+\frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a}-\frac{9(m-n)^3n^2f^3}{4.64m^5aa}+\frac{27(m-n)^4n^3f^4}{5.512m^7a^3}$ *etc.* Confequenter habebitur $x=\frac{(m-n)f}{2m}-\frac{3(m-n)^2nff}{3.8m^3a}+\frac{9(m-n)^3n^2f^3}{4.64m^5aa}-\frac{27(m-n)^4n^3f^4}{5.512m^7a^3}$ *etc.* Quia haec feries eam habet proprietatem, vt ex logarithmis notum eft, vt fumma ejus minor fit termino primo, manifeftum eft quo minor fit fractio $\frac{nf}{ma}$, eo magis eam conuergere, et proinde eo effe punctum reuerfionis altius fitum.

§. 28. Sit pro afcenfu curua AN, in qua, dicta AQ $=u$ fit QN $=t$, erit $8mmatdt-3(m-n)nbudt=8(m-n)mabdu$, feu $64m^3aac^{\frac{-3nt}{8ma}}-64m^3aa+24mmnat=9(m-n)nnbu$. Neque vero haec curua habet punctum flexus contrarii, fed quoque in infinitum vniformiter protenditur, non vero vt prior, quemadmodum parabola, fed fere vt hyperbola. Multo enim magis ab axe diuergit quam illa. Si ex hac tautochrona afcenfui inferviens conftruenda fit, oportet defcribere curuam ad eundem axem, cujus arcus fint applicatis QN aequales. Hujus tautochronae punctum reuerfionis habebitur, fi capiatur $u=\frac{(m-n)b}{2m}+\frac{3(m-n)^2nffb}{3.8m^3a}+\frac{9(m-n)^3n^2b^3}{4.64m^5aa}$ *etc*, femper ergo eft altius fitum, quam in curua pro defcenfu, et funt prorfus cafus, vbi in infinitum excurrit, aut nullibi exiftit, id quod euenit fi $3(m-n)nf$ eft aequale vel majus quam $8mma$. Fig. 4.

Fig. 1. §. 29. Progredior nunc ad ipſius curuae conſtructionem et quaero aequationem inter coordinatas orthogonales. Sit AME tautochrona deſcenſui inſeruiens. Sit $AP = x$ $PM = y$ et arcus $AM = s$. Hujus curuae natura exprimitur ex §. 24. hac aequatione $8mmasds + 3(m-n)nfxds = 8(m-n)mafdx$. Ponatur ds conſtans, et differentietur aequatio, habebitur $8mmads^2 + 3(m-n)nfdxds = 8(m-n)mafddx$. Fiat $ds = pdx$, erit $dy = dx\surd(pp-1)$; verum $dds = 0 = pddx + dxdp$, quare eſt $ddx = -dxdp:p$. Quibus in aequatione ſubſtitutis ea abibit in $8m^2appdx + 3(m-n)nfpdx + 8(m-n)mafdp:p = 0$. Ex qua obtinetur $dx = \frac{-8(m-n)mafdp}{8m^2ap^3 + 3(m-n)nfpp}$. Quocirca ad curuam conſtruendam, accepta variabili tertia p, ſumatur $x = 8(m-n)maf\int\frac{-dp}{8m^2ap^3 + 3(m-n)nfpp}$. Deinde quia $dy = dx\surd(pp-1)$ capiatur $y = 8(m-n)maf\int-\frac{-dp\surd(pp-1)}{8m^2ap^3 + 3(m-n)nfpp}$. Atque hoc modo curua quaeſita erit conſtructa.

§. 30. Simili modo vt curua pro aſcenſu conſtruatur, hoc tantum opus eſt, vt in illa conſtructione ponatur $-a$ loco $+a$. Hoc enim modo, vt ex aequationibus generalibus celeritatem corporum in medio reſiſtente motorum exprimentibus videre licet, aequatio deſcenſui inſeruiens transmutatur in eam, quae ad aſcenſum pertinet. Porro radius osculi curuae in puncto M erit $= \frac{(m-n)fdy}{mc^{\frac{3ns}{8ma}}ds}$. Vnde patet radium oſculi in puncto infimo A eſſe $= \frac{m-n}{m}f$,

Cui

Cui in eo puncto longitudo penduli aequalis accipi debet. Denique ex constructione colligere licet, qualem figuram nostra curua habeat. Sit AB tauto- Fig. 5. chrona descensus, quae continua erit cum AC curua ascensus. Vltra B et C continuatur in D et E, ita vt arcus BD, ED similes et aequales sint arcui BAC. Atque hoc modo in infinitum producitur.

§. 31. Perpendamus nunc qualis corporis seu globi, vt positum est, super curua tautochrona inuenta sit motus. Consideremus oscillationem vnam, quâ globus in puncto infimo habeat velocitatem ex altitudine b acquisitam. Dicatur, vt ante, altitudo genitrix velocitatis globi in puncto quocunque curuae descensus v. Erit ex §. 13. $v = c^{\frac{ns}{ma}}(b-t)$ vbi est $t = \frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-ns}{ma}}dx$. Hic vero a altitudinem cylindri oscillantis designat, vt ergo globus introducatur ponatur $\frac{4}{3}a$ loco a, prout §. 17. factum est et erit $v = c^{\frac{3ns}{4ma}}(b-t)$, et $t = \frac{m-n}{m}\int c^{\frac{-3ns}{4ma}}dx$. Cum his aequationibus ea quae naturam curuae exprimit est conjungenda, quae est haec $64m^3aac^{\frac{3ns}{8ma}} - 64n^3aa - 24m^2nas = 9(m-n)n^2fx$; seu hujus differentialis, vt habeatur dx, $24m^2nac^{\frac{3ns}{8ma}}ds - 24m^2nads = 9(m-n)n^2fdx$, siue $8m^2ac^{\frac{3ns}{8ma}}ds - 8m^2ads = 3(m-)nfdx$.

§. 32. Est igitur ex posteriore aequatione $\frac{m-n}{m}dx = \frac{8ma}{3nf}c^{\frac{3ns}{8ma}}ds - \frac{8ma}{3nf}ds$. Vnde erit $\frac{m-n}{m}c^{\frac{-3ns}{4ma}}dx =$

$\frac{8ma}{3nf}c^{\frac{-3ns}{8ma}}ds - \frac{8ma}{3nf}c^{\frac{-3ns}{4ma}}ds$. Quae integrata dat $t = C - \frac{64m^2aa}{9nnf}c^{\frac{-3ns}{8ma}} + \frac{32m^2aa}{9nnf}c^{\frac{-3ns}{4ma}}$. Constans C adjecta ita debet determinari, vt posito $s = 0$, fiat et $t = 0$, vt §. 18. requirebatur, est igitur $C = \frac{32m^2aa}{9nnf}$. Quamobrem cum ea expressio euadat quadratum erit $t = \frac{32m^2aa}{9\pi nf}(1 - c^{\frac{-3ns}{8ma}})^2 = \frac{32m^2aa}{9n^2fc^{\frac{3ns}{4ma}}}(c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2$. Sed ex aequatione exponentiali pro curua habetur $c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1 = \frac{24m^2nas + 9(m-n)n^2fx}{64m^3aa}$. Itaque erit quoque $t = \frac{(8m^2as + 3(m-n)nfx)^2}{128m^4aafc^{\frac{3ns}{4ma}}}$. Ex his reperitur $v = c^{\frac{3ns}{4ma}}(b - \frac{32m^2aa}{9n^2fc^{\frac{3ns}{4ma}}}(c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2) = bc^{\frac{3ns}{4ma}} - \frac{32m^2aa}{9n^2f}(c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2$. Vel etiam hoc modo $v = bc^{\frac{3ns}{4ma}} - \frac{(8m^2as + 3(m-n)nfx)^2}{128m^4aaf}$.

§. 33. Expressio haec celeritatis dabit locum in curua descensus, quo velocitatem globus habet maximam; etenim ea non incidit in punctum infimum. Id vero punctum erit ibi, vbi $dv = 0$. Quare cum inuenta sit $v = bc^{\frac{3ns}{4ma}} - \frac{32m^2a^2}{9n^2f}(c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)^2$, erit $dv = \frac{3nb}{4ma}c^{\frac{3ns}{4ma}}ds - \frac{8ma}{3nf}(c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)c^{\frac{3ns}{8ma}}ds$. Ergo erit $dv = 0$;

fi

si $\frac{3nb}{4ma} c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{8ma}{3nf} c^{\frac{3ns}{8ma}} - \frac{8ma}{3nf}$, seu si $c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{32m^2a^2}{32m^2a^2 - 9n^2bf}$.
Vnde deducitur $s = \frac{8ma}{3n} l \frac{32m^2a^2}{32m^2a^2 - 9n^2bf}$ seu $s = -\frac{8ma}{3n} l(1 - \frac{9n^2bf}{32m^2a^2})$. Ex quo colligitur arcum s eo esse majorem quo factum bf majus fuerit, quam a^2, ceteris paribus. Porro ex velocitate finali, quae est $v\sqrt{b}$, inuenitur totus arcus descensus faciendo $v = 0$. Quo in casu erit $c^{\frac{3ns}{8ma}} \sqrt{b} = \frac{4ma}{3n}(c^{\frac{3ns}{8ma}} - 1)\sqrt{\frac{2}{f}}$ seu $3nc^{\frac{3ns}{8ma}} \sqrt{\frac{1}{2}bf} = 4mac^{\frac{3ns}{8ma}} - 4ma$, vnde $c^{\frac{3ns}{8ma}} = \frac{4ma}{4ma - 3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}$.
Totus igitur arcus descensus erit $= -\frac{8ma}{3n} l(1 - \frac{3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}{4ma})$.

§. 34. Deinceps, si corpus celeritate descensu acquisita in altera parte ejusdem curuae ascendat, (inseruit enim ea pars ascensui) inuenitur totus arcus descensus $= \frac{8ma}{3n} l(1 + \frac{3n\sqrt{\frac{1}{2}bf}}{4ma})$. Si hi logarithmi in series resoluantur habebitur arcus descensus $= 2\sqrt{\frac{1}{2}bf} + \frac{3n(\frac{1}{2}bf)}{2.2ma} + \frac{9nn(\frac{1}{2}bf)^{\frac{3}{2}}}{3.8m^2aa} + \frac{27n^3(\frac{1}{2}bf)^2}{4.32m^3a^3}$ etc. Simili modo erit arcus ascensus $= 2\sqrt{\frac{1}{2}bf} - \frac{3n(\frac{1}{2}bf)}{2.2ma} + \frac{9n^2(\frac{1}{3}bf)^{\frac{3}{2}}}{3.8m^2a^2} - \frac{27n^3(\frac{1}{2}bf)^2}{4.32m^3a^3}$ etc. Ex quibus perspicuum est arcum ascensus esse minorem arcu descensus. Si $\frac{nbf}{ma}$ valde fue-

fuerit paruum, harum ferierum duos terminos initiales tantum affumere fufficit, et tum differentia inter arcum defcenfus et afcenfus erit $\frac{3nbf}{4ma}$. Cum eorum fumma fit $2\sqrt{2bf}$. Sunt ergo differentiae q, p, in ratione duplicata fummarum.

§. 35. Haec eft igitur tautochrona in medio, quod mobili refiftit in ratione duplicata velocitatum. Pro aliis vero medii refiftentis hypothefibus, quibus refiftentia alii cuidam celeritatis dignitati aut functioni proportionalis ponitur, hac methodo tautochronae inueniri non poffunt; non quidem vitio methodi, quafi ea vniuerfalis non effet, fed defectu analyfis; quod in aliis hypothefibus velocitas non poteft exprimi. Perfuafus autem fum hanc folam refiftentiae hypothefin fecundum quadrata celeritatum in rerum natura locum habere. Quanquam enim ex experimentis conftat, fluida aliam praeter hanc exercere refiftentiam a tenacitate eorum ortam, quae velocitati proportionalis effe nonnullis vifa eft, tamen *Neutonus in Princip. Phil. Edit. nouisfima pag.* 274 potius exiftimat eam prorfus non a velocitate pendere, verum eam effe vniformem feu in ratione momentorum temporum. Qua fit vt vires viuae amiffae fint, vt fpatia percurfa, id quod aliis rationibus ex natura hujus refiftentiae deductis praetermiffis ex eo intelligi poteft, quod mobile, fi refiftentiae velocitatibus effent proportionales nunquam ad quietem perueniret, quod tamen tandem accidere experimenta confirmant; fi vero infuper refiftentia adfit, fecundum quam mobile amittit de

vi

vi viua in ratione ſpatiorum deſcriptorum, tautochronam exhibere in promtu eſt; eaque facile ex inuentâ hac formari poteſt. Ponatur enim tantummodo in aequatione noſtra tautochronae inuenta loco x haec quantitas $x+gs$, vbi litera g, ex quantitate hujus reſiſtentiae a tenacitate vel frictione orta determinari debet. Quo facto habebitur tautochrona quaeſita.

PROBLEMA ASTRONOMICUM

INUENIENDI ALTITUDINEM POLI VNA CUM DECLINATIONE STELLAE EJUSDEMQUE CULMINATIONE EX TRIBUS ALTITUDINIBUS STELLAE ET DUOBUS TEMPORUM INTERUALLIS BREUI CALCULO SOLUTUM.

Auctore

Daniele Bernoulli Joh. Fil.

Lemma. Sint tres arcus circulares contigui IP, PQ, QR, dico fore $\pm \frac{IZ}{IV} = \frac{LN \times QX - LM \times RY}{LN \times PX - LM \times PY}$ vbi IZ ſignificat tangentem arcus IP; LN differentiam coſinuum pro arcubus IP et IR; LM differentiam coſinuum pro arcubus IP et IQ, QX et RY ſunt ſinus verſi arcuum PQ et PR; et PX, PY ſunt eorundem arcuum ſinus: denique IV eſt ſi- Menſ. Nov. 1729. Tab. VIII. Fig. 1.