Demonstratio. Nam demissis perpendicularibus HI, HT ad rectas PQ et SQ, erunt HI=PX, et HT=SY, jungantur BH, TH et invenietur $BH^2 = BR^2 + RH^2 = BR^2 + RX^2 + PI^2 = RW^2 + PW^2 + PI^2 = PR^2 + PI^2 = RI^2$, ergo BH=RI, simili argumento erit TH =RT, atqui BH=TH, ergo RI=RT, adeoque per praec. casum erit RI semi axis major, et BR semi axis minor. Q. E. D.

DE
INNUMERABILIBUS CURUIS
TAUTOCHRONIS IN VACUO.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Quoties ego insignem tautochronismi proprietatem, quam *Hugenius* primus in cycloide inesse deprehendit, contemplatus sum, semper dubitabam, an praeter cycloidem aliae curuae eandem forte habeant proprietatem. Hocque mihi eo probabilius videbatur, quod ipsum *Hugenium* non ex tautochronismi contemplatione ad cycloidem peruenisse intelligebam: sed potius cycloidis proprietates scrutantem hanc ipsum inter alias detexisse. *Newtonus* quidem atque *Hermannus*, qui deinceps eandem rem tractarunt, ana- Mens. Sept. 1729. Tab. V. & VI.

analytice cycloidem elicuerunt, fed vfi funt principio non fatis late patente hoc; accelerationes viis percurrendis effe oportere proportionales. Aliis enim modis accelerationes poffunt determinari, ut tautochronismus nihilominus conferuetur. Quamobrem mihi jure fuspicari vifus fum, praeter cycloidem in alias fortaffe curvas eandem tautochronismi proprietatem competere.

§, 2. Ad hanc dubitationem tollendam genuina opus effe methodo cenfebam, qua fine vllo principio aliunde affumto ex fola tautochronismi confideratione curuae hac proprietate praeditae erui poffent. Diu igitur omne ftudium operamque in hanc inueftigationem contuli, donec tandem voti compos factus, quicquid defiderabam, fum confecutus. Animaduerti autem, cum de curua tautochrona inuenienda quaeftio proponitur, duas omnino quaeftiones bene a fe inuicem diftinguendas in ea effe inuolutas. Quarum altera hujusmodi curuam requirit, in qua graue defcendens aequalibus temporibus ad punctum infimum perueniat, ubicunque fumatur initium defcenfus. Altera vero in ejusmodi curuis inquirendis eft occupata, fuper quibus integrae ofcillationes ex defcenfu et afcenfu conftantes omnes fint ifochronae. Illi quidem quaeftioni folam cycloidem fatisfacere deprehendi: huic vero praeter cycloidem innumerabiles aliae conuenire mihi inuentae funt.

Fig. 1. §. 3. Pofteriorem hanc quaeftionem primum hoc modo propofui, vt data curua quacunque AMC in-

inueniatur curua ei in A jungenda AND ejusmodi, vt graue ſuper compoſita ex iis curuae CMAND oſcillans omnes oſcillationes abſoluat aequalibus temporibus. Poſtquam autem hujus ſolutionem ſum adeptus, eos inueſtigaui caſus, quibus hae duae curuae vnam conſtituant lineam continuam, atque eadem contineantur aequatione. Hujusmodi mihi curuae admodum notatu dignae viſae ſunt, eo quod eundem quem cyclois, praeſtent effectum et aeque ac illa ad horologia accommodari poſſint. Praeterea non ſine admiratione cognoui in his curuis tautochronis curuas etiam algebraicas contineri, ad quas Analyſtae in problematis ſoluendis tanto ſemper ſtudio peruenire nituntur. Haec igitur omnia eo, quo ipſe ſum affecutus modo, hic proponere conſtitui tam propter ipſius methodi nouitatem, quam eorum, quae ex ea prodierunt, dignitatem.

§. 4. Sit igitur curua data AMC, quaeſita vero AND, quae communem habeant axem verticalem AB. Incipiat graue deſcenſum ex puncto quocunque C, aſcendet id rurſus in altera curua ad eandem altitudinem D, ita vt recta CD ſit horizontalis; animum enim ab omni reſiſtentia abſtrahimus. Hac ergo oſcillatione percurrit corpus arcum CAD, ſecundum legem Galileanam et in quouis loco M habebit celeritatem, quam lapſu ex altitudine BP acquirit, ducta nempe per M horizontali MPN. Tautochronismi autem conditio requirit, vt tempus hujus oſcillationis ſit conſtans, retineatque eandem quantitatem, ubicunque accipiatur punctum C. Fig. 1.

 Quam-

Quamobrem formula hoc tempus exprimens ita esse debebit comparata, vt in ea neque linea AB insit neque quaequam alia quantitas a loco puncti C pendens.

§. 5. Maxima celeritas corporis, dum hanc oscillationem absoluit, est in puncto infimo A, atque respondet altitudini AD, quippe ex qua est genita. Haecque celeritas ipsa debet exponi radice quadrata ex hac altitudine AD, et simili modo in loco quocunque M celeritas est vt radix quadrata ex altitudine BP. Quamobrem sumtis elementis Mm et Nn aeque altis, erit corporis celeritas dum vtrumque describit eadem atque vt $\sqrt{BP}$; Et tempusculorum, quibus haec elementa percurruntur, summa est $\frac{Mm+Nn}{\sqrt{BP}}$. Hujus ergo integrale dabit tempus, quo arcus MAN absoluitur, et posito in eo $AP=AB$, prodibit tempus integrae oscillationis.

§. 6. Ponantur nunc $AB=b$, $AP=x$; arcus $AM=s$ et $AN=t$. Erit $Pp=dx$; $Mm=ds$; $Nn=dt$ et $BP=b-x$. Celeritas ergo, quam habet corpus elementa Mm et Nn percurrens, erit $=\sqrt{(b-x)}$. Et propterea tempus, quo haec elementa absoluuntur, est $\frac{ds+dt}{\sqrt{(b-x)}}$, seu posito $ds+dt=dv$, erit id $\frac{dv}{\sqrt{(b-x)}}$. Cujus integrale dabit tempus, quo arcus MAN absoluitur, siquidem tanta constans adjicitur, ut facto $x=0$ ipsum tempus euanescat. In illo integrali deinde, si ponatur $x=b$, habebitur tempus totius oscillationis. Quamobrem in eo neque litera b neque alia ab ea pendens inesse debet. Inveniri ergo debet litera v in x vt integrale hanc obtineat proprietatem.

§. 7.

§. 7. Fiat $dv = pdx : e$; per e diuido, vt homogeneitas conferuari poſſit, cum cognita fuerit functio p. Eſt itaque differentiale ſummae temporum $= pdx : e\sqrt{(b-x)}$ ſive $\frac{1}{e}. pdx : \sqrt{(b-x)}$. Jam, ut ex praecedentibus elucet, oportet $pdx : \sqrt{(b-x)}$ ita eſſe conſtitutum, ut, ſi integretur talisque conſtans addatur, quae faciat integrale $=0$, ſi $x=0$ factoque $x=b$, tum b penitus ex expreſſione excedat. Hisque conditionibus ut ſatis fiat, oportet determinare p. Conſiſtat integrale hujus $pdx : \sqrt{(b-x)}$ debita conſtante auctum quotcunque terminis ſimplicibus; nam et irrationalia in ſeries hujusmodi terminorum reſoluere licet. Neceſſe eſt igitur, vt vnusquisque horum terminorum quantitate x ſeu dignitate ejus exponentis affirmativi ſit affectus; ea propter ut tota expreſſio euaneſcat, ſi fiat $x=0$.

§. 8. Singuli ergo termini talem habebunt formam gx^m, ubi g etiam in b dari ponitur. Cum Cum vero in hiſce omnibus facto $x=b$, b debeat euaneſcere ſeu ex computo egredi: fiat $x=b$, termini hanc habebunt formam gb^m, ex qua vt b eliminetur, oportet ſit $g=nb^{-m}$ vbi n ipſa b non ſit affectum, ſed denotet numerum quem vis in quantitatem datam ductum; hanc vero quantitatem in e complecti licet, vt ergo n ſolum numerum ſignificare poſſit. Hac ergo ratione ſinguli termini erunt $nb^{-m}x^m$. Ubi cum dimenſiones ipſius b deſtruant dimenſiones ipſius x, perſpicuum eſt integrale nullam dimenſionem habere debere. Deinde id quoque manifeſtum eſt in integrali praeter b et x, et numeros alias quantitates contineri non oportere; vnde fequitur idem et in differentiali locum habere. Quapropter p cum ab b affici nequeat, in meris x dari debebit, eritque p potentia ipfius x quae fit x^n.

§. 9. Ex hac conditione differentiale $pdx : \sqrt{}(b-x)$ transmutatum eft in $x^n dx : \sqrt{}(b-x)$. Accedat altera atque prior conditio, qua integrale nullam habere debet dimenfionem, ut inde n determinetur. Requiritur autem ad id, vt integrale nullius fit dimenfionis, vt et in differentiali dimenfiones fefe deftruant elemento dx vnam dimenfionem implere pofito; manifeftum enim eft, femper differentiale tot habere dimenfiones, quot integrale. Numerus vero dimenfionum in noftro differentiali $x^n dx : \sqrt{}(b-x)$ eft $n+1-\frac{1}{2}$ feu $n+\frac{1}{2}$, qui ergo debet aequari nihilo; vnde habetur $n=-\frac{1}{2}$. Ex quo emergit $p=x^{-\frac{1}{2}}$ feu $1 : \sqrt{}x$, hinc porro erit $dv = dx : e\sqrt{}x$. Quia e eum in finem tantummodo erat asfumtum vt homogeneitas conferuetur, fiat $e=1:\sqrt{}a$; eritque $dv=dx\sqrt{}(a : x)$.

§. 10. Erat vero $dv=ds+dt$, quare $ds+dt = dx\sqrt{}(a : x)$, cujus integrale eft $s+t=2\sqrt{}ax$. Erit igitur fumma arcuum AM+AN femper in ratione fubduplicata fagittae AP. Conftruatur ergo alia curva ALE, talis vt productis MN, mn in L et l fit arcus AL=AM+AN. Eritque $Ll=Mm+Nn=ds+dt=dv$. Vnde $AL=v=2\sqrt{}ax$, adeoque $vv=4ax$. Ex quâ perfpicuum eft curuam ALE effe cycloidem, cu-

cujus circuli generatoris diameter eſt a. Deſcendat corpus in hac cycloide ex puncto E aeque alto ac C vel D; erit velocitas ejus in L vt $\sqrt{(b-x)}$. Ergo tempuſculum per Ll eſt $dv : \sqrt{(b-x)}$. Id quod igitur aequale eſt ſummae tempuſculorum per elementa Mm, Nn. Quare totum tempus deſcenſus per ELA, aequale erit ſummae temporum per arcus CA et DA. Oſcillatio ergo per CAD contemporanea eſt dimidiae oſcillationi penduli longitudinis $2a$, ſeu integrae oſcillationi penduli long. $\frac{1}{2}a$.

§. 11. Ex his jam facile apparet, quomodo data altera curua AC inueniri debeat altera AD. Sit quaeſitae AD applicata $PN = z$; erit $Nn = dt = \sqrt{dx^2 + dz^2}$. Erit igitur $ds + \sqrt{(dx^2 + dz^2)} = dx\sqrt{(a : x)}$. Vnde $\sqrt{(dx^2 + dz^2)} = dx\sqrt{(a : x)} - ds$. Denique $dz = \sqrt{(adx^2 : x + ds^2 - dx^2 - 2dsdx\sqrt{(a : x)})}$. Cum curua AMC ſit data, dabitur ds in x et dx; ponatur igitur $ds = pdx$. Erit $dz = dx\sqrt{(a : x + p^2 - 1 - 2p\sqrt{(a : x)})}$. Quae aequatio, cum p in x dari ponatur, exprimet naturam curuae AND quaeſitae. Hinc intelligitur, cum a non a curua pendeat, et ideo pro lubitu accipi poſſit, infinitas inueniri poſſe curuas loco quaeſitae AND, quae cum AMC junctae tautochronas praebeant. Notandum tamen accidere caſus, quibus, ſi a quantitate quadam minor accipiatur, curua quaeſita fiat immaginaria.

§. 12. Sit curua data AC linea recta, cum verticali AB angulum quemcunque BAC conſtituens, erit $ds = ndx$, n denotante numerum ei angulo conue- Fig. 2.

ue-

uenientem, vnde $p = n$, quare $dz = dx\sqrt{(a : x + nn - 1 - 2n\sqrt{(a:x)})}$. Quae aequatio integrationem admittit in casu $n = 1$, quo recta AC fit verticalis inciditque in AB. Hic fit $dz = dx\sqrt{(a : x - 2\sqrt{(a : x)})}$, fiat $2\sqrt{ax} = q$, erit $x = qq : 4a$, et $dx = qdq : 2a$; ergo $dz = \frac{qdq}{2a}\sqrt{(\frac{4aa}{qq} - \frac{4a}{q})} = dq\sqrt{(\frac{a-q}{a})}$. Est igitur $z = C - \frac{2(a-q)\sqrt{(a-q)}}{3\sqrt{a}} = C - \frac{2(a-2\sqrt{ax})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$. Vt z fiat $= 0$ si $x = 0$, oportet fit $C = \frac{2a}{3}$, adeoque est $z = \frac{2a\sqrt{a} - 2(a-2\sqrt{ax})\sqrt{(a-2\sqrt{ax})}}{3\sqrt{a}}$. Quae est aequatio ad curuam quarti ordinis; Hic x nunquam $\frac{1}{4}a$ superare potest.

§. 13. Si curua altera AMC fuerit semicyclois, cujus diameter circuli generatoris $AB = b$. Erit dictis AP, x, AM, s, tum $ss = 4bx$, ergo $s = 2\sqrt{bx}$. Sit altera curua quaesita ANE in qua $AN = t$, oportet fit $s + t = 2\sqrt{ax}$, unde habebitur $t = 2\sqrt{ax} - 2\sqrt{bx}$. Dicatur $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c}$; $t = 2\sqrt{cx}$. Est itaque altera curua ANE etiam cyclois, idque quaecunque: ejus enim diameter c pro lubitu potest accipi. Oscillationes vero cotemporaneae sunt dimidiae oscillationi penduli, cujus longitudo est $2a$, vel integrae si longitudo fuerit $\frac{1}{2}a$. Est vero $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$, unde $a = b + 2\sqrt{bc} + c$. Longitudo igitur perduli isochroni est $\frac{1}{2}b + \sqrt{bc} + \frac{1}{2}c$. Notandum vero in cycloide majori AMC initium descensus non supra punctum E, vbi ED producta secat, esse accipiendum; alioquin enim corpus ascendens in curua AE ultra E ascenderet, et oscillatio nusquam terminaretur.

§. 14.

§. 14. Quaeramus casus, quibus ambae curuae sint inter se aequales. Erit igitur $s=t$. Quare cum sit $s+t=2\sqrt{ax}$; erit $2s=2\sqrt{ax}$; seu $s=\sqrt{ax}$. Ex quo cognoscitur, vtramque curuam esse cycloidem, neque alias hoc sensu satisfacere curuas praeter cycloidem: Supra enim demonstratum est nostra methodo problema propositum generalissime solvi. Quemadmodum hic positum erat $s=t$, sic quaecunque aequatio inter s et t potest accipi, et deinde duae curuae dari, vt arcus ascensus et descensus eam habeant inter se relationem. Vt, si quaerantur duae curuae problemati satisfacientes CA, DA, ut sit semper AM : AN$=m:n$, erit $mt=ns$, et $t=ns:m$. Ergo $s+t=(ms+ns):m=2\sqrt{ax}$, unde efficitur $s=\frac{2m}{m+n}\sqrt{ax}$. Perspicuum ergo est, curuam AC esse semicycloidem diametri $\frac{m^2a}{(m+n)^2}$, et alteram ADN quoque semicycloidem diametri $\frac{n^2a}{(m+n)^2}$. Fig. 1.

§. 15. Cum esse debeat $s+t=2\sqrt{ax}$, vt ambae curuae praebeant tautochronam oscillationes isochronas penduli longitudinis $\frac{1}{2}a$ habentem; Sit $s=\sqrt{ax}+v$, et $t=\sqrt{ax}-v$. Hoc igitur modo duae curuae inuenientur satisfacientes. Erit itaque $ds=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}+dv$, et $dt=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}-dv$. Ponatur $dv=udx$: habebitur $ds=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}+udx$, et $dt=\frac{adx}{2\sqrt{ax}}-udx$. Quare si y illius et z hujus curuae denotent applicatas, erit $dy=dx\sqrt{(\frac{a}{4x}+\frac{au}{\sqrt{ax}}+uu-1)}$. Atque $dz=dx\sqrt{(\frac{a}{4x}-\frac{au}{\sqrt{ax}}+uu-1)}$. Hic si loco u substituatur quaecunque fun-

 ctio

ctio ipsius x; habentur duae aequationes pro curuis problemati satisfacientibus. Obseruandum hic, si ponatur $a = 4b$ fore $dz = dx\sqrt{(\frac{b}{x} - \frac{2bu}{\sqrt{bx}} + uu - 1)}$. Quae aequatio conuenit cum aequatione §. 11. $dz = dx\sqrt{(\frac{a}{x} + pp - 1 - \frac{2ap}{\sqrt{ax}})}$ si sit $b = a$, et $u = p$. Ex quo intelligitur curuam $dz = dx\sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$, etiam cum hac $ds = udx$ seu $dy = dx\sqrt{(uu - 1)}$, conjunctam constituere tautochronam oscillationes absoluentem eodem tempore, quo pendulum longitudinis $\frac{1}{2}b$ seu $\frac{1}{8}a$.

Fig. 4. & 5. §. 16. Constituatur super axe AP curua quaecunque BE, in qua posita $AP = x$ sit $PE = u$. Tum describatur hyperbola cubicalis VKLT, cujus applicata PK vel PL si dicatur r, sit $4xr^2 = a$, recta quadam pro unitate accepta, erit PK vel $PL = \sqrt{(a : 4x)}$. Deinde constituantur duae nouae curuae RF, SG, in quibus sit $PF = \sqrt{(LE^2 - 1)}$; et $PG = \sqrt{(KE^2 - 1)}$. Erit $PF = \sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$ et $PG = \sqrt{(\frac{a}{4x} + \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$. Quibus factis accipiatur PM in 1 ducta aequalis areae APFR: et PN in 1 ducta aequalis areae APGS. Erunt, cum sit $APFR = \int dx\sqrt{(\frac{a}{4x} - \frac{au}{\sqrt{ax}} + uu - 1)}$ et $APGS = \int dx\sqrt{(\frac{a}{4x} + \frac{au}{\sqrt{ax}} + u^2 - 1)}$, $PM = z$ et $PN = y$, atque eapropter curuae MA et NA junctae in A exhibebunt curuam tautochronam.

§. 17. Ex hisce perspicuum est, quomodo data curua quacunque inueniri oporteat alteram tautochronismo producendo aptam. Nunc eos inuestigare statui casus, quibus ambae eae curuae ita, vt decet, junctae, eandem constituunt curuam contitinuam; vt et aliae curuae eaeque innumerae cycloidis similes habeantur, eundem effectum in horologiis praestantes. Sit MAN hujusmodi curua circa axem verticalem AP posita. Dicatur, vt ante, AP, x, arcus AM, s et alter AN, t, oportet esse $s+t=2\sqrt{ax}$. Constituatur alia curua GAH talis, ut ejus applicatae PG, PH sint arcubus AM, AN respectiue aequales. Erit ergo PG$=s$, PH$=t$, eaque curuae GAH erit proprietas, ut sit $s+t=2\sqrt{ax}$. Perspicuum est, si curua GAH fuerit data, alteram MAN ex ea posse construi, atque si illa fuerit curua continua, et hanc quaesitam talem fore. Huc igitur quaestio est reducta, vt inueniatur curua GAH, quae sit continua, eamque habeat proprietatem, vt sit GP+GH$=2\sqrt{a.\,\mathrm{AP}}$. Fig. 6.

§. 18. Respondent ergo in curua GAH singulis abscissis AP duae applicatae GP, PN, quarum altera est negatiua, si altera affirmatiua fuerit. Talis proinde aequatio inter abscissas et applicatas esse debet, vt litera applicatas denotans pro singulis abscissis duos habeat valores ad conditionem quaestionis accommodatos. Vt haec facilius efficiam, assumo nouam indeterminatam v, ex qua vna cum constantibus et abscissae et applicatae determinari debent; ita autem, ut, posita v affirmatiua, inueniatur punctum G; posita vero v negatiua, tunc punctum H inueniatur. Consideremus igitur x, tanquam functionem ipsius v, atque s. Functio autem s significans dabit t sed negatiue, quia PN ad alteram axis AP partem cadit, si v abeat in $-v$.

§. 19. Cum abſciſſa AP eadem maneat pro utroque puncto G et H, oportet ut ea x ita in v determinetur, vt eadem maneat transmutato v in $-v$. Siue x debet eſſe functio par ipſius v: ſit talis functio P, erit $x=P$. Ponatur applicata PG, $s=Q+R$, denotantibus Q functionem imparem, R vero parem ipſius v. Ponatur in hac formula $Q+R$ loco v, $-v$, abibit ea in $-Q+R$; quemadmodum conſtat ex iis, quae de functionibus paribus et imparibus in diſſertatione de trajectoriis reciprocis tradidi. Poſito vero $-v$ loco v, habebitur punctum H, quare $-Q+R$ exprimet applicatam PH. Quae autem, cum in alteram partem cadere debeat, erit valor $-Q+R$ negatiuus. Abſoluta ergo applicatae PH ſeu t magnitudo erit $Q-R$, unde habetur $t=Q-R$. At vero eſt $s=Q+R$, et $x=P$.

§. 20. Ex conditione problematis haec habetur proprietas, vt ſit $s+t=2\sqrt{ax}$, vt in §. 17. oſtenſum eſt. Quare cum ſit $s=Q+R$, $t=Q-R$, et $x=P$, erit $2Q=2\sqrt{a}P$ ſeu $QQ=aP$, hincque $P=QQ:a$. Hic inquirendum eſt, an hic valor ipſius P inuentus, et ſuperior, ſecundum quem P debet eſſe functio par ipſius x inter ſe non repugnent? Si enim repugnarent, nihil inde ad propoſitum elici poſſet. Non autem ii inter ſe repugnant: nam, quia Q eſt functio impar, ejus quadratum erit functio par; porro diuiſore a nihil ad haec faciente, perſpicuum eſt hic P functioni pari aequale poni. Eſt ergo $P=QQ:a$. Ex his curua GAH inuenitur. Accipiatur enim AP ſeu $x=QQ:a$, et PG ſeu $s=Q+R$,

vbi

vbi loco Q quaecunque functio impar, loco R vero quaecunque par subſtitui poteſt ipſius v. Quia $x = QQ : a$ erit $Q = \sqrt{ax}$, et idcirca $s = R + \sqrt{ax}$. Hic R poteſt accipi functio par ipſius Q ſeu $\sqrt{ax}$, ſiue duntaxat ipſius $\sqrt{x}$.

§. 21. Ex hisce facile elicitur curuarum noſtro inſtituto inſeruientium conſtructio. Circa axem verticalem AP conſtituatur parabola MAN, cujus parameter $= a$. Ducta ergo ordinata ad axem orthogonali MN, erit, ſi ſit $AP = x$, $PM = \sqrt{ax}$. Infra hanc parabolam circa eundem axem deſcribatur curua quaecunque QAS, cujus axis AQ ſimul eſt diameter. Ducantur verticales MR, NS, horizontalem per A tranſeuntem ſecantes in T et V. Erit $AT = \sqrt{ax}$, et $AV = -\sqrt{ax}$; TR autem et SV erunt aequales. Quae, cum ſint ad eandem plagam ſitae, erunt functio par lineae AI quae eſt $\sqrt{ax}$, quare IR exprimet functionem R. Tum noua conſtruatur curua GAH, cujus applicata PG ſit $= PM + TR$, erit altera PH ob legem continuitatis $= PN - SV$ ſeu $PN - TR$. Quare erit $PG = R + \sqrt{ax}$, et $PH = -R + \sqrt{ax}$. Vnde ſequitur curuam GAH eandem eſſe, quae quaeritur.

§. 22. Hoc ergo modo inueniuntur curuae infinitae, non quidem tautochronae, ſed tales ex quibus tautochronae poſſunt conſtrui. Sit curua AG praecedenti modo conſtructa, inde ſi alia AM conſtruatur, ut ejus arcus AM ubique ſit aequalis reſpondenti applicatae PG, erit haec curua tautochrona (§. 17.). Ex data vero AG, requiſita AM Fig. 8.

 ſe-

ſequenti modo conſtruetur. Ducatur recta in G tangens GI, occurrens axi producto in I. Centro G radio GP deſcribatur arcus circuli PL, quem horizontalis ex I ducta ſecet in L. Jungatur GL, et a P in axe capiatur longitudo arbitraria PE, ſed ubique eadem. Tum ex E ducatur linea ER parallela ipſi LG, ſecans applicatam PG in R. Per omnia hoc modo determinata puncta R tranſeat curua SR, quae plerumque aſſymtoton habebit horizontalem AO. Denique conſtruatur curua AM talis, vt rectang. PM. PE aequale ſit ſpatio OAPRS. Erit haec AM curua tautochrona. Eſt enim arcus AM $=$PG.

§. 23. Rem analytice perſequor. Cum x debeat eſſe functio par ipſius v, inſuper autem ſit $Q=\sqrt{ax}$, oportet ſit $\sqrt{ax}$ functio impar ipſius v, pono $\sqrt{ax}=v$, erit $x=v^2:a$ functio par, vt requiritur. Habemus igitur ex §. 20. hanc aequationem $s=R+v$, vbi R denotat functionem parem ipſius v. Erit itaque $ds=dR+dv$, ſit $dR=Vdv$, neceſſe eſt, vt V ſit functio ipſius v impar. Quare erit $ds=dv(1+V)$, ideoque $ds^2=dv(1+2V+VV)=dx^2+dy^2$. Quoniam autem $x=v^2:a$, erit $dx=2vdv:a$, et $dx^2=4v^2dv^2:a^2$. Conſequenter $dy^2=dv^2(1+2V+VV-4v^2:a^2)$ atque $dy=\frac{dv}{a}\sqrt{(a^2+2a^2V+a^2V^2-4v^2)}$. Hanc aequationem nullo modo rationalem efficere potui, ſubſtituendis loco V valoribus legitimis, vt nimirum V aequalis ponatur functioni impari ipſius v. Quamobrem neſcio, an alii caſus in-

inde erui queant, quae integrationem admittunt, praeter eum, quem hic expositurus sum.

§. 24. Ponatur aV, id quod fieri potest; aequale $2v$, vt termini a^2V^2 et $4v^2$ sese destruant; erit $dy = \frac{dv}{a}\sqrt{(aa+4av)}$, quae aequatio integrationem admittit quia v unius tantum est dimensionis. Integralis ejus est haec aequatio $y = \frac{C+(a+4v)\sqrt{(a+4v)}}{6\sqrt{a}} = \frac{C+(a+4\sqrt{ax})\sqrt{(a+4\sqrt{ax})}}{6\sqrt{a}}$ ob $v = \sqrt{ax}$. Vt y euanescat, posito $x = 0$, oportet vt sit $C = -a\sqrt{a}$; erit igitur $y = \frac{-a\sqrt{a}+(a+4\sqrt{ax})\sqrt{(a+4\sqrt{ax})}}{6\sqrt{a}}$ seu $6y\sqrt{a}+a\sqrt{a} = (a+4\sqrt{ax})\sqrt{(a+4\sqrt{ax})}$. Hinc habebitur $a+4\sqrt{ax} = (6y\sqrt{a}+a\sqrt{a})^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(36ayy+12aay+a^3)}$. Quamobrem sumtis utrinque cubis erit $12aa\sqrt{ax}+48aax+64ax\sqrt{ax} = 36ayy+12aay$ seu $12ax+(3a+16x)\sqrt{ax} = 9yy+3ay$. Quae penitus ad rationalitatem reducta dabit hanc aequationem ordinis quarti: $81y^4+54ay^3-216axyy-256ax^3+9aayy-72aaxy+48aaxx-9a^3x = 0$.

§. 25. Habemus ergo curuam algebraicam ordinis quartis, quae perinde atque cyclois ad oscillationes omnes aequitemporaneas faciendas est idonea. Eam igitur aliquanto accuratius hic describere operae pretium erit. Sit axis AE; habebit cur- Fig. 9.
ua nostra hanc formam BACD, ejusque, dictis AP, y, ea erit aequatio, quam §. praecedente inuenimus. Tempus autem, quo oscillatio quaecunque per MAN absoluitur, aequale erit tempori oscillationis penduli ordinarii, cujus longitudo est $\frac{1}{2}a$. Notandum est, hanc curuam ab altera parte axis AE, in

in C habere punctum reuerſionis; Punctum vero C reperitur ſumendo $AE = \frac{1}{16}a$, et applicatam $EC = \frac{1}{6}a$. Porro in C curua producta ita reuertitur, vt ſit arcus CD aequalis ſimilisque arcui CAB. Quapropter ſi ex C ducatur verticalis CF, erit ea diameter curuae orthogonalis. Oſcillationes vero in alterutra tantum parte BAC conſtitui debent.

§. 26. Cum igitur CF ſit diameter hujus curuae, quaeramus aequationem ad hanc diametrum relatam. Sit nimirum $CQ = t$, et $QM = z$, erit $AP = x = AE - CQ = \frac{1}{16}a - t$, et $PM = y = QM - CE = z - \frac{1}{6}a$, his valoribus loco x et y in aequatione inuenta §. 24. ſubſtitutis, ſequens reſultabit aequatio, $81z^4 + 216atzz + 256at^3 - 18aazz = 0$, ſiue, quae ad hujus curuae proprietates inueniendas magis eſt apta, haec $t = \frac{aa - (\sqrt[3]{36azz} - a)^2}{16a}$ ſeu $z = \pm(a \pm \sqrt{(aa - 16at)})^{\frac{2}{3}} : 6\sqrt{a}$. Unde perſpicuum eſt z quatuor valores habere manente t, idque hoc modo, ſi ambo ſigna + valeant habetur punctum M; Si prius ſignum − et alterum + valeant habebitur punctum K; Si prius + et poſterius − ſumantur, punctum N; Si denique vtrumque ſignum − locum habeat, obtinebitur punctum L.

§. 27. Ex hac aequatione perſpicitur curuam hanc eſſe quadrabilem. Ponatur $a \pm \sqrt{(aa - 16at)} = p$, erit $t = \frac{2ap - pp}{16a}$ et $z = \frac{p\sqrt{a}}{6\sqrt{a}}$. Ergo $dt = \frac{dp}{8} - \frac{pdp}{8a}$. Itaque $zdt = \frac{pdp\sqrt{p}}{48\sqrt{a}} - \frac{ppdp\sqrt{p}}{48a\sqrt{a}}$. Quod integratum dabit $\int zdt = \frac{pp\sqrt{p}}{120\sqrt{a}} - \frac{p^3\sqrt{p}}{168a\sqrt{a}}$. Quae quantitas exprimit ſpatium inter

ter abſciſſam, applicatam et curuam contentum. Conſtat deinde ex curuae inuentione eam eſſe rectificabilem. Quia $z = \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{a}}$ erit $dz = \frac{dp\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}$; vnde $dz^2 = \frac{pdp^2}{16a}$. Eſt vero $dt^2 = \frac{dp^2}{64} - \frac{pdp^2}{32a} + \frac{p^2dp^2}{64aa}$. Quare $dt^2 + dz^2 = \frac{dp^2}{64} + \frac{pdp^2}{32a} + \frac{p^2dp^2}{64aa}$, et hinc $\surd(dt^2 + dz^2) = \frac{dp}{8} + \frac{pdp}{8a}$. Conſequenter $\int\surd(dt^2 + dz^2) = \frac{2ap+pp}{16a}$. Quae expreſſio dat vel arcum CN vel CAM vel quoque eorum negatiuos CL vel CLK.

§. 28. Inuentis area et longitudine hujus curuae; reſiduum eſt id, quod maxime ad uſum ejus in horologiis pertinet, vt inueſtigemus radium oſculi, eoque inuento curuae hujus euolutam, quo pendulum oſcillationes in hac curua abſoluens conſtitui queat. Radius osculi vero erit, poſito dz conſtante $\frac{(dt^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dzddt}$, cujus valor ex ſuperioribus inuenietur Namque eſt $(dt^2+dz^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(a+p)^3dp^3}{512a^3}$, atque $dz = \frac{dp\sqrt{p}}{4\sqrt{a}}$, hinc quia dz ponitur conſtans, erit $ddz = 0 = \frac{2p\,ddp+dp^2}{8\sqrt{ap}}$, unde habetur $ddp = \frac{-dp^2}{2p}$. Denique quia $dt = \frac{adp-pdp}{8a}$, erit $ddt = \frac{addp-dp^2-pddp}{8a} = \frac{-adp^2-pdp^2}{16ap}$. His valoribus in formula $\frac{(dt^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dzddt}$ ſubſtitutis, orietur radius osculi $= \frac{-(a+p)^2\sqrt{ap}}{8aa}$, ſignum − indicat radium osculi et diametrum inter ſe diuergere.

§. 29. Cum radius osculi ſit cognitus, facile erit curuae noſtrae tautochronae euolutam inuenire. Fig. 10. Sit CNB tautochrona. Maneant $CQ = t = \frac{2ap - pp}{16a}$, $QN = z = \frac{p\sqrt{p}}{6\sqrt{a}}$. Sit radius osculi $= \frac{(a+p)^2\sqrt{ap}}{8aa}$, qui tanget in M euolutam quaeſitam CM. Demittatur ex M in axem applicata MP, ſintque $CP = x$, $PM = y$. Inuenientur hae coordinatae ex relatione cognita coordinatarum CQ et QN. Calculo vtpote facili hic omiſſo habebitur $x = \frac{2ap + 5pp}{16a}$ et $y = \frac{(3aa - 3pp + 4ap)\sqrt{ap}}{24aa}$, harum aequationum opé euoluta CM per infinita puncta jam deſcribi poterit. Si autem velimus p eliminare, vt aequatio inter x et y ſuperſit, p ex priore aequatione inuenitur in a et x, qui valor ſi deinde in altera ſubſtituatur, ſequens emergit aequatio: $576ayy - \frac{37632}{125}axx - \frac{32160}{625}a^2x + \frac{529}{3125}a^3 = (\frac{2304}{125}xx + \frac{8608}{625}ax + \frac{529}{3125}a^2)\sqrt{(a^2 + 80ax)}$. Quae aequatio ſi prorſus ad rationalitatem reducatur, erit ordinis quinti.

§. 30. Id denique ſilentio praetereundum non eſt, hanc curuam tautochronam eandem eſſe prorſus, quam lineae rectae verticali jungendam inuenimus (§. 12.). In eo enim ſolo aequationes differunt, quod ibi parameter a quadruplo ſit major quam hic. Quia igitur longitudo penduli iſochroni pro noſtrâ curua tautochrona eſt $\frac{1}{2}a$, erit ſi haec eadem curua cum verticali AE jungatur, longitudo penduli iſochroni $\frac{1}{8}a$. Tempora ergo oſcillationum in curua MAN duplo ſunt majora quam oscillacillationum per PAN. Quare si in vtroque lapsu graue ad N vsque perueniat ascendendo, erit $tMA + tAN = 2tPA + 2tAN$. Consequenter $tMA - tAN = 2tPA$. Differentia ergo temporum descensuum per arcus MA et NA aequatur duplo tempori descensus per verticalem AP.

CURVA TAUTOCHRONA IN FLUIDO RESISTENTIAM FACIENTE SECUNDUM QUADRATA CELERITATUM.

Auct. Leonh. Eulero.

§. 1.

Postquam *Hugenius* primum inuenisset cycloidem esse curuam Tautochronam in vacuo et Hypothesi grauitatis vniformis; *Neutonus* atque *Hermannus* dederunt quoque Tautochronas pro hypothesi grauitatis difformiter agentis et tendentis ad punctum quodcunque fixum tanquam centrum. Posuerunt autem motum fieri in vacuo, neque vllam pati resistentiam. Quod vero ad media resistentia attinet, *Neutonus* etiam demonstrauit cycloidem esse tautochronam in medio in celeritatum ratione resistente; ad alia autem resistentia media neque ipse neque quisquam alius est progressus, vt, quae curuae in iis tautochronismum producant, ostenderent.

M. Octobr. 1729.

Tab. VII.