

SOLVTIO PROBLE MATIS

DE

*Inuenienda curua, quam format lamina ut-
cunque elastica in singulis punctis a
potentiis quibuscunque sollicitata.*

Auctore

Leonhardo Eulero.

M. Febr.
1728.
Tab. IV.

Curua, quam Cel. Iacobus Bernoulli primus et postea plures alii laminae elasticae incuruatae assignarunt, quaeque nomine curuae elasticae nota est, nonnisi laminae elasticae grauitatis experti competere ex solutionibus eorum intelligitur. Curuatura autem laminae elasticae grauis, tametsi haec sola in rerum natura locum obtinere queat, tamen a nemine adhuc, quantum scio, determinata est. Incidimus nuper Clar. D. Bernoulli, et ego in hanc quaestionem, eamque non inelegantem existimantes aggressi, atque solutiones eodem tempore et egregie inter se congruentes consequuti sumus. Cum vero solutio prima fronte non nihil difficilis inuentu visa sit solutionem meam hic quoque exponere non abs re fore arbitratus sum. Quaestio quidem primum tantum ad hoc extendebatur, ut inueniatur curua, quam

CURVAT. LAM. ELAST. ET GRAVIS 71

quam lamina elastica grauis vno termino firmata, altero potentiam quamuis applicatam habens format. Nunc vero hanc rem generalius complectar laminam in singulis punctis vtcunque elasticam, et praeter pondus appensum qualescunque applicatas habentem positurus; Idque eapropter, tum, quod, etsi quis vnum vel alterum casum particularem elicuerit, problema tamen hoc modo perceptum exinde non adeo facile solvatur; tum propter summam eius vniuersalitatem: etenim non solum ad curuaturas laminarum quomodocunque elasticarum extenditur. Verum etiam ad curuas corporum perfecte flexibilium et a potentiis quomodocunque sollicitatorum accommodari potest; ita ut ex eo omnium corporum flexibilium curuaturae inueniri possint. Accedit praeterea, quod soluti problematis hoc sensu accepti vix prolixior evadat, quam in quouis casu speciali. Ante vero quam ipsum problema aggredi possim, necesse est nonnulla praemittere solutioni inseruientia.

Hypothesis.

Si duae virgae aB , BC in B e latere iunctae a potentia AD in situm ABC torqueantur, vt ang. ABa comprehendat. Erit momentum potentiae AD in B vt vis elastica in B et angulus ABa coniunctim. Hoc scilicet factum aequipollet facto ex potentia AD in AB . Assumitur vulgo haec hypothesis; eius tamen veritas si angulus ABa est vehementer paruus satis probabiliter potest physice demonstrari.

Fig. 1.

Fig. 2.

Lemma 1. Si curvae ANM in puncto quocunque N applicata sit potentia NO, eaque resoluetur in horizontalem NS et verticalem NR. Erit vis pot. NO ad curuam AM circa M rotandam seu eius momentum aequale $NR.FP + NS.GQ$. Ductis MQ, AP horizontalibus et AQ, PM verticalibus.

Demonstratio. Potentia NO aequialet duabus NR et NS simul agentibus. Momentum vero potentiae NR in M est, vt ex principiis staticis constat, NR. PF; et momentum potentiae NS in M est NS. GQ. Ergo cum ambae potentiae curuam AM versus eandem plagam conuertere conentur, erit momentum ambarum seu momentum potentiae $NO = NR.FP + NS.GQ$. Q.E.D.

Fig. 3.

Lemma 2. Si curuae AM in singulis punctis N potentiae parallelae perpendiculares nimirum in AP, applicatae, fuerint determinatae a curua BG, ita vt in punctum Nagat potentia, quae est vt QN. Construaturque alia curua AVT, cuius applicatae QV sint vt areae AQHB. Erit summa momentorum omnium potentiarum ad curuam ANB circa M flectendam vt area APT.

Demonstratio. Momentum potentiae QH in M est QH.QP. Puncto M assumatur proximum *m*. ductaque applicata *mp*; erit momentum potentiae QH in *m* aequale QH.Q*p*. Ergo differentia horum momentorum est QH.P*p*. Idem cum de singulis potentiis valeat, erit differentia omnium momentorum in M et in *m* agentium aequalis areae ABGP in P*p* seu PT.P*p*. i. e. elemento P*p*T. Si iam ponatur summa omnium mo-

mo-

momentorum in $m = M + dM$, quarum differentia est dM ; erit igitur $dM = PptT$, consequenter M erit = area APT . Q. E. D.

Dicantur iam abscissae in AP assumtae, x , et respondentes applicatae in curua AT , P . Designat autem P summam omnium potentiarum in x contentarum; ergo summa omnium momentorum in $M = \int Pdx$.

Problema Generale.

Sit lamina BMA utcumque elastica et in singulis punctis a potentiis quibusvis sollicitata, fixa autem ea sit in B , atque in A duo pondera appensa habens E et F , quorum E secundum verticalem AE , et alterum F secundum horizontalem AC trahit. Oportet determinare curuam AMB iuxta quam lamina hoc modo sollicitata flectitur.

Fig. 4.

Solutio. Sumatur horizontalis AC pro axe, in quo capiantur abscissae $AP = x$. Sit ei orthogonialis $PM = y$ et $AM = s$, cuius elementa constantia accipiantur. Ponatur radius curuedinis in $M = r$; erit angulus, quem duo elementa in M constituunt, reciproce ut r . Designetur vis elastica in M litera v ; erit vis hunc angulum producens ut $\frac{v}{r}$. (hyp.) Huic ergo proportionalis esse debet summa omnium momentorum in M agentium tam ortorum a singulis potentiis curuae AP applicatis, quam a ponderibus E et F . Est autem momentum potentiae seu ponderis E in $M = E \cdot AP = Ex$ (Lemma 1.) et ponderis F momentum est $= F \cdot PM = Fy$ (cit.) Praeter haec sollicitatur punctum M etiam a potentiis singulorum

punctorum arcus AM. Iis in verticales secundum AE et horizontales secundum AC agentes resolutis, vocetur summa omnium verticalium P, et horizontalium ab A in M vsque, Q. Erit summa momentorum potenti-
 arum verticalium $= \int P dx$ (Lem. 2.) et summa momentorum potenti-
 arum horizontalium $= \int Q dy$. Erit itaque tota vis in M agens $= Ex + Fy + \int P dx + \int Q dy$. Cui cum proportionalis esse debeat $\frac{v}{r}$, habebitur haec aequatio $\frac{\Delta v}{r} = Ex + Fy + \int P dx + \int Q dy$. Si loco P + E scribatur tantum P, et Q loco Q + F; habebitur $\frac{\Delta v}{r} = \int P dx + \int Q dy$, sit $\frac{\Delta v}{r} = Z$; erit $Z = \int P dx + \int Q dy$ seu $dZ = P dx + Q dy$ Ex qua natura curvae AMB cognoscitur. Q. E. I.

Vt vsus huius aequationis melius percipiatur, ad casus particulares eam accommodabo, eosque partim iam tractatos, vt congruentia eorum perspici queat, partim vero ad nondum agitados, vt plurimas a natura formatas curvas adhuc ignotas in lucem producam.

Problema. Inuenire aequationem generalem pro curuis, quas corpora perfecte flexibilia a potentiis quomocumque sollicitata formant.

Solutio. Obtinebimus corpora perfecte flexibilia, quando vis elastica vbique euanescit, tum enim vel minima vis duo elementa ad quemuis angulum inclinare valebit; Exprimitur autem quantitas vis elasticae litera v ponatur igitur $v = 0$ et resultat aequatio $0 = Ex + Fy + \int P dx + \int Q dy$, quae ergo satisfaciet quaesito. Q. E. I.

Vt autem P et Q, quippe quae a summatione
 pen-

pendent, eliminantur, et loco eorum dP et dQ introducuntur, quae denotant potentias ipsas in punctis M applicatas, differentietur aequatio et habebitur $E dx + F dy + P dx + Q dy = 0$. Ergo $Q + \frac{P dx}{dy} + F + \frac{E dx}{dy} = 0$. Vnde $dQ + \frac{P dy ddx - P dx ddy}{dy^2} + \frac{dP dx}{dy} + \frac{E dy ddx - E dx ddy}{dy^2} = 0$. Sed cum ponatur ds constans erit

$$dy ddy = -dx ddx. \text{ et } dy ddx - dx ddy = ds^2 \frac{ddx}{dy}. \text{ Quare}$$

$$dQ + \frac{P ds^2 ddx}{dy^3} + \frac{E ds^2 ddx}{dy^3} + \frac{dP dx}{dy} = 0. \text{ Et ex hac } \frac{dQ dy^3}{ds^2 ddx}$$

$$P + E + \frac{dP dy^2 dx}{ds^2 ddx} = 0. \text{ Vnde porro } \frac{dy^3 ddQ}{ds^2 ddx} +$$

$$\frac{3dQ dy^2 ddx ddy - dQ dy^3 d^3 x}{ds^2 ddx^2} + dP + \frac{dy^2 dx ddp}{ds^2 ddx} +$$

$$\frac{3dP dy dx ddy ddx + dP dy^2 ddx^2 - dP dy^2 dx d^3 x}{ds^2 ddx^2} = 0. \text{ Ex hac}$$

$$\text{prodibit haec } dy^3 ddQ ddx - 3dQ dy dx ddx^2 - dQ dy^3 d^3 x + dy^2 dx ddP ddx - 3dP dx^2 ddx^2 + dP ds^2 ddx^2 - dP dy^2 dx d^3 x = 0. \text{ Haec aequatio fiet multum simplicior, si}$$

introducatur radius osculi r , qui est $= \frac{ds dy}{ddx} = -\frac{ds dx}{ddy}$

$$\text{tunc enim prodibit } 0 = r dx ddP + 2dP ds dy + dP dr dx + r dy ddQ - 2dQ ds dx + dQ dr dy. \text{ Quae aequatio omnes}$$

possibiles curuas, quas corpora perfecte flexibilia quomodocunque sollicitata formare possunt sub se comprehendit.

Probl. Inuenire curuam, quam format filum perfecte flexile, cui in singulis punctis potentiae verticales sunt applicatae.

Solut. Euanescunt igitur hoc in casu potentiae

horizontales, unde $Q=0$. Quare $0=Ex + Fy + \int Pdx$; et hinc $Edx + Fdy + Pdx=0$: porroque $dP + \frac{Fdxddy - Fdyddx}{2} = 0$; seu $dPdx^2dy = Fds^2ddx$. Est vero

$\frac{dsdy}{ddx} = r$, unde $rdPdx^2 = Fds^3$. Et ex hisce aequationibus curua in exemplis specialibus cognoscetur.

Q. E. I. Dat haec aequatio omnis generis catenarias.

Sit $dP = ads$ seu potentiae sint vbique aequales, prodire debet catenaria communis pro catenis aequaliter crassis. Habebitur autem $adx^2dy = Fdsddx$, quae integrata dat $ay = C - \frac{Fds}{dx}$ seu neglecta constante C , quae naturam curuae non immutat, et loco F posito $-F$ obtinetur $aydx = Fds$, et hinc $dx = \frac{Fdy}{\sqrt{(aayy - FF)}}$ quae est aequatio pro catenaria, hoc modo applicanda: ob F negatiue assumptum, pondus ea littera indicatum trahere debet in plagam contrariam ei, versus quam F trahere initio ponebamus. Ex A demittatur verticalis $Aa = Fa$, et horizontalis aP erit axis curuae AMB , quae erit convexa versus aP et tangentem in A habebit parallelam axi aP , erit igitur AB catenaria vulgaris.

Fig. 5.

Sit $dP = adx$. erit $adx^3dy = Fds^2ddx$ ergo $ay = \frac{-Fds^2}{2dx^2}$. seu sumpto F negatiuo erit $2aydx^2 - Fdx^2 = Fdy^2$. Vnde $dx = \frac{dy\sqrt{F}}{\sqrt{(2ay - F)}}$ quae est aequatio pro parabola appolloniana, vt constat.

Problema. Inuenire curuam, quam format filum flexile, cui in singulis punctis potentiae normales sunt applicatae.

Solutio.

Solutio. Sit curua AMB, et vt supra $AP=x$, Fig. 6.
 $AM=y$; et $AM=s$. Sit potentia in M normalis
 $MR=dN$ resoluatur ea in verticalem et horizonta-
 lem, erit verticalis $dP=\frac{dNdx}{ds}$ et horizontalis $dQ=\frac{dNdy}{ds}$ vnde $P=\int \frac{dNdx}{ds}$ et $Q=\int \frac{dNdy}{ds}$; atque $ddP=\frac{d^2Ndx+dxddN}{ds}$, et $ddQ=\frac{d^2Ndy+dyddN}{ds}$; quibus valoribus
 substitutis in aequatione generali pro corporibus
 perfecte flexibilibus; sed loco ddP , $\frac{d^2Ndy}{r}+\frac{dxddN}{ds}$ et
 loco ddQ , $\frac{d^2Ndx}{r}+\frac{dyddN}{ds}$, vt radius osculi in com-
 putum ducatur; inuenietur $dNdr+rddN=0$ vnde
 $r dN=Cds$. Est igitur potentia normalis reciproce
 vt radius osculi. Q. E. I.

Conuenit haec proprietas cum iam inuentis,
 quare non immorabor deriuandis ex ea curuis lin-
 teariis, velariis, et quae ex hac proprietate con-
 sequuntur.

Haec duo postrema problemata iam dudum a
 Geometris solutiones nacta sunt. Quando scilicet
 potentiarum directiones vel inter se parallelae vel
 in curuam formatam normales sunt. Quomodo au-
 tem curuae corporum flexibilium, quibus poten-
 tiae qualescunque sunt applicatae, inueniri debeant,
 nemo adhuc monstrauit, praeter Celeberrimum
 Jac. Hermannum, cuius in Phoronomia extat huius
 problematis solutio.

Problema. Inuenire curuam, quam format fi- Fig. 7
 lum AMB perfecte flexile, cui in singulis punctis
 M applicatae sunt duae potentiae verticales et nor-
 males.

CURVATURA LAMINAE

Solutio. Resoluatur normalis MR, in laterales MN et MK, quarum MK fit verticalis et MN horizontalis. Erit $dP = ML + MK$ et $dQ = MN$. Dicatur $ML = dL$ et $MR = dN$. Erit $MK = \frac{dN dx}{ds}$ et $MN = \frac{dN dy}{ds}$; unde $dP = dL + \frac{dN dx}{ds}$ et $dQ = \frac{dN dx}{ds}$. Et ulterius $ddP = ddL + \frac{dN ddx + dx ddN}{ds} = ddL + \frac{dN dy}{r} + \frac{dx ddN}{ds}$. Atque $ddQ = \frac{dN ddy + dy ddN}{ds} = \frac{dN dx}{r} + \frac{dy ddN}{ds}$. Quibus valoribus substitutis obtinebitur $dN ds dr + r ds ddN + r dx ddL + dL dx dr + 2 dL ds dy = 0$. seu $r ds dN + r dx dL + dL ds dy = 0$. Unde natura curvae patebit. Q. E. I.

Ponatur potentia verticalis dL , proportionalis elemento curvae ds . Vt habeatur filum vbique aequaliter crassum et graue. Sit igitur $dL = ads$ habebitur $r ds dN + ar ds dx + ay ds^2 C = ds^2$, quae diuisa per ds , dat $r dN + ar dx + ay ds = C ds$.

Fig. 8.

Sit AMB lintearia grauis vsque in BI liquore repleta, erit vis normalis dN vt MI, fit $PI = b$; erit $MI = b - y$. Ponatur igitur $dN = b ds - y ds$; erit $br ds - yr ds + ar dx + ay ds = C ds$. Est autem $r = \frac{ds dy}{dx}$; unde $bs dy - y ds dy + ar dx dy + ay ddx = C ddx$, quae integrata dat $by ds - \frac{1}{2} yy ds + ay dx = eds + C dx$ seu $(yy - by + e) ds = ay dx - C dx$. Mutatis constantibus, vt numeri euitentur: haec aequatio transibit in sequentem $dx = \frac{(yy - by + e) dy}{\sqrt{(ay - c)^2 - (yy - by + e)^2}}$ vt haec aequatio pro axe AP valeat, oportet vt euanescente y fiat $dy : dx = 0 : 1$. eritque $ce = ee$. et $c = + e$. Si a fiat $= 0$, habebitur aequatio pro nota lintei curua.

Fig. 9.

Quaeratur curuatura velariae grauis vniformis
AMB

AMB. Irruat ventus secundum TM parallelam axi
 AP. Erit eius vis, qua in curuam normaliter agit
 ut quadratum sinus anguli AMT id est vt $\frac{dy^2}{ds^2}$ ponatur

itaque $dN = \frac{dy^2}{ds^2}$, habebitur $r \frac{dy^2}{ds^2} + ar dx + ay ds$
 $= C ds$. Cum autem sit $r = \frac{ds dy}{adx}$ erit $dy^3 + ads dy dx$
 $+ ay ds dx = C ds dx$. Est autem $ddx = \frac{dy ddy}{dx}$ ergo

$dy^2 dx + ads dx^2 - ay ds ddy + C ds ddy = 0$ ponatur $ds =$
 $p dy$; erit $ddy = \frac{dp dy}{p}$ et $dx = dy \sqrt{pp - 1}$. Vnde erit dy
 $\sqrt{pp - 1} + ap(pp - 1) dy = cdp - ay dp$, seu $\frac{dy}{c - ay} =$

$\frac{dp}{\sqrt{(pp - 1) + ap(pp - 1) - 4q dq}}$. Sit $\sqrt{pp - 1} = p - q$; erit $\frac{dy}{c - ay} =$
 $\frac{dp}{4qq + a - aq^2}$ resoluat $4qq + a - aq^2$ in duos facto-

res $1 + \beta qq$ et $a + \delta qq$; vbi est $\beta = \frac{2}{a} + \sqrt{\left(\frac{4}{aa} + 1\right)}$ et

$\delta = 2 - \sqrt{4 + aa}$. Et hinc erit $\frac{dy}{c - ay} = \frac{mq dq}{1 + \beta qq} + \frac{nq dq}{a + \delta qq}$,
 vbi $m = \frac{-4 - 2\sqrt{4 + aa}}{a\sqrt{4 + aa}}$ et $n = \frac{4 - 2\sqrt{4 + aa}}{\sqrt{4 + aa}}$. Erit igitur

$\frac{1}{a}(c - ay) = \frac{m}{2\beta} l(1 + \beta qq) + \frac{n}{2\delta} l(a + \delta qq) =$

$\frac{l(1 + \beta qq) + l(a + \delta qq)}{\sqrt{4 + aa}} = \frac{1}{\sqrt{4 + aa}} \frac{a^2 + aqq(2 - \sqrt{4 + aa})}{a + qq(2 + \sqrt{4 + aa})}$ est au-

tem $q = p - \sqrt{pp - 1} = \frac{ds - dx}{dy}$ vnde habebitur $\left(\frac{c - ay}{D}\right)^{\sqrt{4 + aa} : a}$

$\frac{ady^2 + (ds - dx)^2 (2 + \sqrt{4 + aa})}{ady^2 + (ds - dx)^2 (2 - \sqrt{4 + aa})}$ pro velaria graui.

Si ventus incidat deorsum iuxta TM, erit eius vis in velum vt quadratum sinus anguli AMT: id est

vt $\frac{dx^2}{ds^2}$. Ponatur igitur $DN = \frac{dx^2}{ds^2}$ habebitur $r \frac{dx^2}{ds^2} +$
 $ardx + ay ds = C ds$. Quia autem $r = \frac{ds dy}{adx}$, erit $dx^2 dy$

+

$+adsdxdy + aydsddx = Cdsddx$, unde $\frac{dy}{Cds - ayds} = \frac{dxdx}{dx^2 + adsdx} = \frac{1}{ads} \frac{dxdx}{dx} = \frac{1}{ads} \frac{dxdx}{dx + ads}$ quae integrata abit
 in hanc $\frac{1}{ads} \int (eds - ayds) \frac{1}{ads} \frac{dx + ads}{dx} + \frac{1}{ads} \int bds$. Ergo
 $\frac{e - ay}{b} \frac{dx + ads}{dx}$ seu $cdx - aydx = bdx + abds$. Sit $c - b = e$,
 erit $dx^2 (e - ay)^2 = aabbs^2$ consequenter $dx = \frac{abdy}{\sqrt{(e - ay)^2 - aabb}}$. vt AP sit axis, oportet fit $dy:dx = 0$. i. si
 $y = 0$ erit ergo $e = +ab$. Ideoque $dx = \frac{bdy}{\sqrt{(ay + 2by)}}$

Quae est aequatio pro catenaria eademque manet quomodocunque a varietur, vt ergo non a pondere fili pendeat. Hoc autem ita accidere oportere ex eo patet, quod tam vis venti, quam grauitatis seorsim eandem catenariam producant.

Sit vis normalis quoque constans, nempe $dN = bds$ erit $brds + ardx + ayds = cds$. quia vero $r = \frac{dsdy}{dxdx}$ erit $bdscy + adxdy + ayddx = cddx$, quae integra dat $\frac{eds}{c - ay} = bds + adx$. Sit $e = bc + ac$; erit $cds = cdx - byds - aydx$. atque $dx = \frac{(c + by)dy}{\sqrt{(c - ay) - (c + by)^2}}$.

Fig. II.

Problema. Si curuae AMB in quouis puncto M duae potentiae applicatae fuerint, quarum altera normalis in curuam vt MN, altera tangentialis MT; inuenire aequationem pro curua, quam format filum perfecte flexile.

Solutio. Resoluantur ambae potentiae in laterales, quarum vna verticalis altera horizontalis, nempe MN in MR et RN, et MT in MS et TS; Erit $dP = MR + MS$ et $dQ = NR - TS$. Sit autem $MN = dN$. et $MT = dT$. Erit $MR = \frac{dMdx}{ds}$, $NR = \frac{dNdy}{ds}$, $MS = \frac{dTdy}{ds}$ et $TS = \frac{dTdx}{ds}$. Ergo $dP = \frac{dNdx + dTdy}{ds}$ et $dQ =$

$\frac{dNdy - dTdx}{ds} ;$ vnde $ddP = \frac{dNddx + dxddN + dTddy + dyddT}{ds}$
 $\frac{dNdy - dTdx}{r} + \frac{dxddN}{ds} + \frac{dyddT}{ds}$. Et $ddQ = \frac{-dNdx}{r} - \frac{drdy}{r}$
 $\frac{dyddN}{ds} - \frac{dxddT}{ds}$. Quibus valoribus substitutis obtine-
 bitur sequens aequatio $dNdr + rddNd + Tds = 0$ seu
 post integrationem $rdN + Tds = Cds$; vnde obr $= \frac{dsdy}{ddx}$
 erit $dNdy + Tddx = Cddx$. Q. E. I.

Haec aequatio hunc habet vsum, vt, cum admo-
 dum simplex sit, facile ad omnes casus applicari
 possit, sed nihilominus generalis est, etenim om-
 nis potentia in normalem et tangentialem re-
 solui potest. Praeterea istud adhuc monendum es-
 se puto, aequationem generalissimam quoque hoc
 modo succinctiorem reddi, loco verticalium et ho-
 rizontalium normales et tangentiales in computum
 ducendo, haec autem oritur $dNdrds + rdsddN +$
 $dTds^2 = rd^3Z + drddZ + \frac{ds^2}{r} dz$ vbi $Z = \frac{\Lambda v}{r}$.

Fig. 12.

Problema. Inuenire aequationem generalem
 pro curuis, quas fila vtcunque elastica in singulis pun-
 ctis nullas potentias applicatas habentia, formare
 debent.

Solutio. Erit ergo hoc in casu et $dP = 0$, et dQ
 $= 0$. Ergo $rd^3z + drddz + \frac{ds^2}{r} dz = 0$, ex aequatio-
 ne generali modo concinnata; erit enim in ea $dN = 0$
 et $dT = 0$. vnde $rrddz + rdrddz^2 + ds^2 dzddz = 0$,
 quae integrata dat $rrddz^2 + ds^2 dz^2 = ads^4$ seu $rddz$
 $= ds\sqrt{(ads^2 - dz^2)}$ Est autem $r = \frac{dsdy}{ddx}$, vnde $\frac{ddz}{\sqrt{(ads^2 - dz^2)}}$
 $\frac{ddx}{dy} = \sqrt{\frac{dds}{ds^2 - dx^2}}$. Hac opelogarithmorum integra-

$$\begin{aligned}
 & \text{ta obtinebitur } \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{dz + \sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{ds\sqrt{-a}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{dx + \sqrt{(dx^2 - ds^2)}}{ds\sqrt{-b}} \\
 & \text{feu } \frac{dz + \sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{\sqrt{a}} = \frac{dx + \sqrt{(dx^2 - ds^2)}}{\sqrt{b}} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} \\
 & \text{vnde } \frac{dz}{\sqrt{a}} = \frac{dx}{\sqrt{b}} - \frac{dy\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{(dz^2 - ads^2)}}{\sqrt{a}}. \text{ Ex qua oritur} \\
 & \frac{dz^2}{a} = \frac{2dzdx}{\sqrt{ab}} + \frac{dx^2}{b} - \frac{2dy^2}{b} + \frac{dz^2}{a} - ds^2 = \frac{2\sqrt{(ads^2 dy^2 - dy^2 dz^2)}}{\sqrt{ab}} \\
 & \text{feu } \frac{b+1}{b} ds^2 = \frac{2dzdx}{\sqrt{ab}} - \frac{2\sqrt{(ads^2 dy^2 - dy^2 dz^2)}}{\sqrt{ab}}; \text{ porro } \frac{(b+1)^2 ds^4}{b} \\
 & + \frac{4dx^2 dz^2}{a} - \frac{4(b+1) ds^2 dx dz}{\sqrt{ab}} - \frac{4ads^2 dy^2}{a} - \frac{4dy^2 dz^2}{a} \text{ feu} \\
 & \frac{(b+1)^2 ds^2}{b} + \frac{4dz^2}{a} - 4dy^2 - \frac{4(b+1) dx dz}{\sqrt{ab}}. \text{ Et } \frac{2dz}{\sqrt{a}} = \frac{(b+1) dx}{\sqrt{b}} \\
 & + \sqrt{\left(\frac{(b+1)^2 dx^2}{b} - \frac{(b+1)^2 ds^2}{b} + 4dy^2\right)} = \frac{b+1}{\sqrt{b}} \frac{xd}{\sqrt{b}} + dy \\
 & \sqrt{4 - \frac{(b+1)^2}{b}} \text{ Ergo } \frac{2z}{\sqrt{a}} = \frac{b+1}{\sqrt{b}} \frac{x}{\sqrt{b}} + y\sqrt{4 - \frac{(b+1)^2}{b}} \text{ feu } z = \\
 & Ex + Fy = \frac{\Delta v}{r}.
 \end{aligned}$$

Eadem aequatio inuenitur ex primo inuenta aequatione, vbi Pdx et Qdy euanescent adeoque restat $Ex + Fy = \frac{\Delta v}{r}$ Q. E. I.

Fig. 13.

Problema. Inuenire curuaturam elateris grauitatis expertis, et vbiuis eiusdem vis elasticae.

Solutio. Cum vis elastica vbique sit eadem ponatur $v = a$; eritque $Ex + Fy = \frac{\Delta a}{r}$. Poni potest loco $Ex + Fy = Gt$, vbi t denotet abscissam alio loco assumptam, eritque $Gt = \frac{\Delta a}{r}$, quae aequatio praebet curuam elasticam iam cognitam, hoc vero modo integrabitur. Erit $Ex ds dy + Fy ds dy = A addx$ feu $x dy + \frac{Fy dy}{E} = \frac{A addx}{E ds}$. Etiam autem est $Ex ds dx + Fy ds dx = -A addy$ feu $y dx + \frac{Ex dx}{E} = -\frac{A addy}{E ds}$. Consequenter ad-

den-

Integrando et integrando habebitur $yx + \frac{Exx}{2F} + \frac{Fyy}{2E} = \frac{Aadx}{Ed}$
 $\frac{Aady}{rds} + C$. Ergo $2FE dx ds + EExx ds + FFyy ds =$
 $2AF dx - 2AE ady + 2EFC ds = ds(Ex + Fy)^2$. Quae
 dabit etiam elasticam. Q. E. I.

Problema. Inuenire curuam quam format filum, AMB aequabiliter graue, et aequabiliter vbiq̄ue elasticum. Fig. 12.

Solutio. Cum filum sit vbiq̄ue aequaliter graue, erit dP constans, nempe $= ads$: vnde $P = a$ et $Q = 0$. Praeterea quia elasticitas vbiuis eadem, ponatur $v = b$; erit $\frac{Ab}{r} = Ex + Fy + fas dx$. Augeatur as constanti E et aequatio non immutabitur, eritque $\frac{Ab}{r} = Fy + fas dx$ seu $\frac{Abdr}{rr} = Fdy + as dx$: atque abiiciendis superfluis constantibus $as dx + c dy + \frac{bdr}{rr} = 0$. Est autem $r = \frac{ds dy}{ddx}$, ergo $\frac{1}{r} = \frac{ddx}{ds dy}$: ex quo $\frac{dr}{rr} = \frac{ddx ddy - dy d^3 x}{ds dy^2} - \frac{dx ddx^2 - dy^2 d^3 x}{ds dy^3}$. Ergo $as ds dx dy^3 + c ds dy^4 = b dx ddx^2 + b dy^2 d^3 x$. Ponatur $dx = p ds$, erit $dy = ds \sqrt{(1 - pp)}$ et $ddx = dp ds$ et $d^3 x = ds ddp$. Quibus substitutis habebitur $aps(1 - pp)^3 = 2 ds^2 + c(1 - pp)^2 ds^2 = b p dp^2 + b ddp(1 - pp)$. Hanc vero aequationem nullo pacto eo reducere potui, vt constructi possit.

Caeterum elegans est hoc problema, quod veram curuam tam filorum perfecte flexibilium quam laminarum elasticarum exhibeat: etenim nullus extat funis, qui perfecte sit flexilis, neque vlla lamina elastica, quae non sit grauis, nisi forte in fluido aequalis grauitatis specificaeflectatur. Idem hoc problema in Act. Eruditorum Lips. A. 1724. pro-

positum est, vt curuatura funis elastici seu non perfecte flexilis inueniatur, nec vero quantum scio solutionem hucusque vllus dedit, praeter Clar. Dan. Bernoulli, qui eodem propemodum tempore, quo ego, solutionem nactus est.

Fig. 14.

Problema. Inuenire curuam, quam format lamina elastica BMA in B fixa proprioque pondere incuruata.

Solutio. Fluit ex praecedente, vbi duntaxat F et E pondera applicata euanescere debent, quare haec habebitur aequatio $\frac{Ab}{r} = \int as dx$ seu neglectio superfluis constantibus $\frac{A}{r} = \int s dx$ quae vt supra ad sequentem reducitur $sp^2(1-pp)^{\frac{3}{2}} ds^2 = A p dp^2 + A(1-pp) ddp$. At neque haec ad construendum accommoda effici potest.

Fig. 15.

Problema. Inuenire curuam fili AB in A fixi in B liberi, agitati a vento NM.

Solutio. Sit vis grauitatis in M $= ads$, et vis venti $= \frac{bay}{ds}$. Inuenietur haec aequatio $brdy^2 = ardsdx + ayds^2$. Est r radius osculi $= \frac{dsdy}{ddx}$. Quare $bdsdy^3 = ads^2 dx dy + ayds^2 ddx$. seu $bdy^3 = ads dx dy + ay ds ddx$. Ponatur $dx = p dy$ erit $ddx = pddy + dpdy = (\text{ob } dx ddx = -dyddy - \frac{p dx ddx}{dy} + dpdy)$, ex qua inuenitur $ddx = \frac{dpdy}{1+pp}$. His factis substitutionibus orietur aequatio $b dy \sqrt{(1+pp)} = apdy(1+pp) + aydp$ et $\frac{dy}{y} = \frac{adp}{b\sqrt{(1+pp)} - ap(1+pp)}$. In qua indeterminatae sunt a se inuicem separatae, et propterea curua quaesita construi potest.

