existimat potius, multos deceptos fuisse a flamma quadam ex sepulchris clausis & post longum demum annorum cursum apertis eructante, quam pro ardente lucernæ flamma habuerunt, præsertim quando simul lampada invenerunt, quam veteres Romani ex superstitiosa religione in honorem animæ immortalis sepulchris suorum indiderunt. Usum in Medicina Amiantho nullum adscribit, qui ei ab autoribus tribuitur, de alumine plumoso potius interpretandum ratus, operam etiam illos atque oleum perdere, qui oleum incombustibile ex eo destillare allaborant, perhibet.

LEONHARDI EULERI, A. L. M. METHODUS inveniendi Trajectorias reciprocas Algebraicas.

QUum temporis spatium, quod Anonymo illi Anglo ad aperiendam, quam invenire potuerit, trajectoriam algebraicam illam tertii ordinis sequentem, concesseram, elapsum sit, meam hujus quæstionis solutionem, una cum aliis insuper ad algebraicas trajectorias reciprocas pertinentibus inventis cum publico communicare constitui. Cum primum istud problema examinare atque de solutione ejus meditari animum subiit, præcipue eam, quam commendavit Celeb. D. Joh. Bernoullius, Præceptor meus hisce in rebus atque Patronus summe colendus, selegi viam per rectificationes curvarum; & strenuam, quantam potui, navavi operam in indagatione ejusmodi curvarum algebraicarum, quæ rectificari possent, ut exinde æquationes algebraicas pro trajectoriis reciprocis eruerem. Hoc in negotio occupatus, in istam incidi æquationem, $yy + \frac{2}{3}aa = a\sqrt[3]{axx}$, quæ est ad curvam, diametro & vertice in diametrum normali gaudentem, ac insuper rectificabilem. Ut itaque ex ista æquatio algebraica pro trajectoria reciproca inveniri possit, sit (Fig. 4) MBM ista curva, ABP diameter & A initium abscissarum, ut scilicet AB sit, $a\sqrt{\frac{8}{27}}$, atque est $AP = x$. $PM = y$. Sit curva $BM = S$. & ex M ducatur diametro parallela MQ, occurrens lineæ AQ normali in diametrum in Q, assumaturque in ea $MN = BM$ erit N in trajectoria quæsita. Sit $AQ = t = y$, & $QN = z = x - s$.

TAB. V. Fig. 4.

Est

Est autem per æquationem $x=\frac{(yy+\frac{2}{3}aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}$ ideoque $dx=\frac{3ydy\sqrt{yy+\frac{2}{3}aa}}{aa}$, ergo $ds^2=dx^2+dy^2=\frac{9y^4dy^2+6aayydy^2+a^4dy^2}{a^4}$, ergo $ds=\frac{3yydy+aady}{aa}$, consequenter $s=\frac{y^3}{aa}+y$ posito loco y, t, invenietur substituendo in ista æquatione $z=x-s$, pro x & s valores inventos, habebitur $z=\frac{(tt+\frac{2}{3}aa)^{\frac{3}{2}}}{aa}-t-\frac{t^3}{aa}$. Ergo $aaz+aat+t^3=(tt+\frac{2}{3}aa)^{\frac{3}{2}}$ & reducendo ad rationalitatem reperietur ista æquatio pro trajectoria reciproca, $a^4zz+2a^4tz+2aat^3z=\frac{1}{3}a^4tt+\frac{8}{27}a^6$; quæ dividendo per aa reducitur ad hanc $aazz+2aatz+2t^3z=\frac{1}{3}aatt+\frac{8}{27}a^4$, seu ponendo $aa=\frac{3}{2}bb$, ad hanc, $12t^3z+18bbtz+9bbzz-3bbtt-4b^4=0$). Quæ est æquatio ad quarti ordinis curvam. Ad istam ergo æquationem perventum est ope rectificationis curvæ, quæ solutio proinde soli fortunæ esset adscribenda, nisi comperta mihi fuisset peculiaris methodus inveniendi curvas algebraicas rectificabiles, unde & æquatio illa, quam ad constructionem istius trajectoriæ reciprocæ selegeram, promanavit.

Postmodum vero problema istud inveniendarum trajectoriarum algebraicarum reciprocarum, ex immediata earum natura discutiens, in istam incidi æquationem, (Fig. 5) appellando AQ, x; QN, y. $dy=dx(x+\sqrt{xx+1})$ denotante, n, numero quocunque. Quæ æquatio, ut facile patet, est ad trajectoriam reciprocam, ponendo enim in expressione ipsius dy, pro x, −x. invenietur $dy=-dx(-x+\sqrt{xx+1})^n$, quæ duæ æquationes respective invicem ductæ dant $dy^2=-dx^2$, id quod est de essentia trajectoriarum reciprocarum. Est autem ista æquatio $dy=dx(x+\sqrt{xx+1})^n$ generaliter integrabilis, exceptis duobus casibus, ubi n est vel 1 vel −1, quibus in casibus integratio dependet a logarithmis. Antequam vero integretur ista æquatio

TAB. V. Fig. 5.

tio, monendum est, sive, n, sit affirmativum sive negativum, æquationem ad candem esse curvam, una quippe obtinet, cum abscissæ A Q cis axem conversonis A B sumuntur, altera cum illæ trans A B accipiuntur. Conveniens scilicet deprehendetur hæc æquatio, $dy = dx\,(x + \sqrt{xx+1})^{-n}$ cum ista $dy = dx\,(-x + \sqrt{xx+1})^{n}$. Ideo vero istud præmoneo, ne quis substituendo pro, n, valores negativos, se problematis solutionem ulterius promovisse existimet. Integretur jam æquatio ista $dy = dx\,(x + \sqrt{xx+1})^{n}$ id quod facile fieri poterit ponendo $x + \sqrt{xx+1} = t$ ut habeatur $x = \frac{tt-1}{2t}$ & $dx = \frac{dt}{2} + \frac{dt}{2tt}$ ut adeo esset $2dy = t^{n}dt + t^{n-2}dt$. Quocirca erit $2y = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + \frac{1}{n-1}t^{n-1} = \frac{1}{n+1}(x + \sqrt{xx+1})^{n+1} + \frac{1}{n-1}(x + \sqrt{xx+1})^{n-1}$.

Quæ æquatio generalis pro trajectoriis reciprocis ad casus speciales applicata suppeditat ex quolibet curvarum ordine, exceptis secundo & tertio, ad minimum unam trajectoriam reciprocam. Si enim pro n ponatur, Q. reperietur hæc quarti ordinis æquatio, conveniens cum jam inventa $12yx^{3} + 18xy - 9yy + 8xx + 4 = 0$. Si substituatur loco n, 3, reperietur ista quinti ordinis trajectoria reciproca, $128yx^{4} + 192yxx + 48y - 64yy - 8xx - 9 = 0$. Sit $n = 4$, reperietur ista sexti ordinis $720yx^{5} + 1200yx^{3} + 450yx - 225yy + 15xx + 16 = 0$. Si $n = 5$, reperietur æquatio septimi ordinis, & in genere quicunque numerus loco n substituatur, curva inde generata erit ordinis $n+2$, si n sit numerus integer, sin vero sit fractus, $n+2$, reducitur ad fractionem in minimis terminis, & indicabit numerator fractionis ordinem curvæ inde natæ. Ex. gr. sit $n = \frac{1}{2}$ invenietur ista ordinis 5, cum sit $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$. $72yyx^{3} - 81y^{4} + 144x^{4} - 216yyx - 96xx + 16 = 0$. Hinc itaque colligi potest, quot, beneficio istius æquationis generalis, ex quovis ordine trajectoriæ reciprocæ inveniri queant. Scilicet ex 4 unam, ex 5 duas, ex sexto unam, ex 7 tres, ex 8 duas, &c. Superest mihi præterea

alia

alia methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas, ex qua quidem difficilius æquationes pro illis eruuntur, verum hoc ea se commendare potest, quod sit universalis, & omnes, quotquot existunt, curvas satisfacientes algebraicas suppeditare queat. Est illa quidem affinis methodo per rectificationes, a Celeb. D. Joh. Bernoullio detectæ, & non difficulter exinde elicitur. Dependet scilicet ea ab inventione curvarum diametro & cuspide in vertice gaudentibus; quas curvas possibiles omnes cujusvis ordinis cum invenire in promtu sit, omnes trajectoriæ reciprocæ algebraicæ possibiles inde elicientur. Cum enim omnes trajectoriæ algebraicæ inveniri queant, ex curvis rectificabilibus diametro & vertice in diametrum perpendiculari præditis, ejusmodi vero curvæ omnes sint evolutæ totidem curvarum algebraicarum cuspidatarum & diametro instructarum, hinc quoque trajectoriæ reciprocæ reperientur, hoc nempe modo. (Fig. 6) Sit C A M curva ejusmodi cuspidata, A B ejus diameter, ducatur A Q eidem normalis, & sumtæ pro lubitu abscissæ A P ducatur respondens applicata P M, ducatur radius M S circuli osculantis curvam in M, erit punctum S in evoluta A S, eritque M S = curvæ A S. Si itaque radius M S circa centrum S moveatur in S N ita ut fiat diametro A B parallelus, erit punctum N in trajectoria reciproca, cujus axis conversionis erit linea A B. Sequenti vero modo æquatio pro ea reperietur, data æquatione ad curvam A M. Dicantur A P, x. P M, y. A Q, t, & Q N, z. Sit brevitatis gratia $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, invenietur instituto calculo, posito elemento dy. constante, quod sit A Q, $t = x + \frac{ds^2}{ddx}$ & Q N, $z = y + \frac{ds^2 . \overline{ds - dx}}{dy\,ddx}$ unde data relatione y ad x, reperiri poterit æquatio inter t & z, seu coordinatas trajectoriæ reciprocæ.

TAB. V. Fig. 6.

Sunt autem æquationes ad curvas ejusmodi cuspidatas ex quovis ordine sequentes. I. Ex ordine tertio, $\overline{a + by}.\ xx = y^3 + cy^2$. II Ex ordine quarto, $ax^4 + \overline{b + cy + eyy}.\ xx = y^4 + fy^3 + gy^2$. Sunt scilicet in æquationibus generalissimis ad cujusvis ordinis curvas omittendi sequentes termini. Primo illi termini in quibus continentur potentiæ ipsius x imparium exponentium. Secundo terminus in quo meræ constantes, & tertio terminus in quo y unius tantum est dimensionis. Cum autem ex istis æquationibus difficulter ad æquationes pro trajectoriis reciprocis perveniatur, etiamsi eæ admodum faciles atque simplices reperiantur, operæ pretium esset, si quis ad ulteriorem rei analyticæ promotionem, perpendat, quomodo minori negotio æquationes pro trajectoriis reciprocis, determinatis t & z in x & y, dataque insuper relatione inter x & z, erui possent, quomodo exterminata alterutra x vel y, altera quoque exterminanda sit, atque æquatio, quam nonnisi t & z una cum constantibus ingrediantur, inde elici possit.

JO. HENR. A SEELEN, SS. THEOL. LIC. ET Gymn. Lub. Rect. Selecta Litteraria, quibus varia Sacra, Civilia, Philologica, Philosophica ac alia continentur, libri MSS. rarissimique accurate recensentur, & præ reliquis notabilia ex iisdem suppeditantur. Editio secunda, novorum speciminum Pentade multisque accessionibus aliis aucta.

Lubecæ, sumpt. Petr. Bœckmann, 1726, 8.
Alph. 2 pl. 8.

CL. Autor, apum ad instar, quotidiana diligentia ex rarioribus monumentis, quasi ex optimis floribus, loculos suos complere annisus, in communes quoque usus, quæ prodesse judicat, liberalissime effert. Selecta hæc maximam partem sunt Programmata in Gymnasii Lub. solennioribus actibus edita, totusque horum numerus XXV observationibus continetur. Alteri huic editioni se multa inseruisse, in nova Præfatione fatetur, quam alteram, quam priori editioni præmiserat, excipit, de moderato rei litterariæ studio. Primum locum in Selectis his concessit pleniori notitiæ Bibliothecæ Hispanicæ *Nicolai Antonii*, Equitis S. Jacobi Regiique Consiliarii, cujus vitam & scripta recenset, & eun-
p. 4. dem 1617 natum & 1684, contracto multo ære alieno, denatum esse, commemorat. Inter scripta ejus eminet, quam Seelenius hic recenset, Bibliotheca illa, quam in veterem & novam distinxit, qua-