Theorema demonstrandum. — Si formula differentialis $\frac{(x-1)\,dx}{\log x}$ ita integretur ut, facto $x=0$, integrale evanescat, tum vero statuatur $x=1$, ejus valor æqualis est logarithmo binarii, ubi quidem logarithmi hyperbolici sunt intelligendi.

De la main de Lagrange : *reçu le* 26 *janvier* 1775,
répondu le 10 *février*.

30.

EULER A LAGRANGE.

A Saint-Pétersbourg, ce 23 mars 1775 [1].

Monsieur et très honoré Confrère,

Il est bien glorieux pour moi d'avoir pour successeur à Berlin le plus sublime géomètre de ce siècle, et il est certain que je n'aurais pu rendre à l'Académie un plus grand service qu'en prenant mon congé, et, à cet égard, je puis me vanter d'une grande supériorité sur vous, vu que vous ne lui sauriez jamais rendre un tel service.

J'ai parcouru avec la plus grande avidité les excellents Mémoires dont vous avez enrichi les derniers Volumes de Berlin et de Turin, où je n'ai pu assez admirer l'adresse et la facilité avec lesquelles vous traitez tant d'objets épineux qui m'ont coûté bien de la peine. Tel est le mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes, et surtout l'intégration de cette équation différentielle

$$\frac{m\,dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{n\,dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}},$$

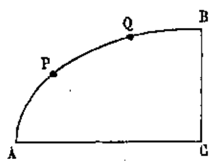
toutes les fois que les deux nombres m et n sont rationnels. Cette

[1] Ms. f° 44. — *Opera postuma*, t. II, p. 586.

recherche renferme encore une autre branche, lorsqu'on y ajoute des numérateurs semblables, où il s'agit de trouver un tel rapport entre les variables x et y, que la somme ou la différence de deux telles formules deviennent algébriques; d'où j'ai tiré autrefois la solution de cette question :

Le quart d'une ellipse ACB étant donné (*fig.* 1), y trouver deux points P et Q tels que l'arc PQ soit précisément la moitié de l'arc AB.

Fig. 1.



Cette matière me paraît avoir encore beaucoup *in recessu.*

Ce que vous me marquez, Monsieur, à l'occasion du petit théorème

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{\log x} = \log^2,$$

en prenant $x = 1$, m'a extrêmement réjoui, et j'ai vu avec la plus grande satisfaction que vous en avez d'abord pénétré tout le mystère, et que vous avez poussé ces recherches beaucoup plus loin que je n'avais fait en quelque Mémoire composé sur ce sujet. J'ai été frappé surtout de cet excellent théorème que, en prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$,

$$\int \frac{(x^n - x^m)\,dx}{(1+x^r)\log x}$$

est égal à

$$\int \left[\operatorname{tang}\frac{(n+1)\pi}{2r} \operatorname{tang}\frac{(m+1)\pi}{2r}\right],$$

de la vérité duquel je me suis d'abord convaincu par des séries infinies, qui m'ont fait connaître que cette intégrale $\int \frac{x^n\,dx}{(1+x^r)\log x}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, est toujours égale à $\log\operatorname{tang}\frac{(n+1)\pi}{2r}$, après avoir trouvé que $\int \frac{dz}{(1+z^2)\log z}$, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$, est toujours égal à zéro. Comme vous aurez tiré sans doute ce beau théorème de celui-ci : que $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{1+x^r}$, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, est égal à $\frac{\pi}{r \sin \frac{n\pi}{r}}$, je suis curieux d'apprendre où s'en trouve la démonstration; car, quoiqu'il me soit connu depuis plus de quarante ans, je n'en ai néanmoins pu trouver une démonstration formelle que depuis peu de temps, et que je n'ai pas encore publiée.

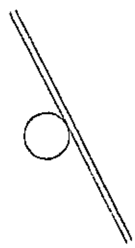
J'attends avec beaucoup d'impatience de voir les profondes recherches que vous aurez communiquées sur ce sujet à l'Académie royale de Berlin.

Le paradoxe dont vous me parlez mérite sans doute toute l'attention des géomètres : que la différence entre ces deux formules intégrales $\int \frac{dy}{\log y}$ et $\int \frac{dz}{\log z}$, comprise entre les mêmes termes 0 et 1, soit égale à $\log \frac{n+1}{m+1}$, dont le dénouement consiste sans doute en ce que l'une et l'autre intégrale devient infiniment grande, où l'égalité n'empêche point que leur différence ne puisse être indéterminée, comme il arrive dans ces formules plus simples $\int \frac{dy}{y}$ et $\int \frac{dz}{z}$, prises depuis 0 jusqu'à ∞ où la différence peut devenir égale à une quantité quelconque, comme en prenant $y = az$, il y aura, sans doute,

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dz}{z} = \log a.$$

Je suis tombé ces jours-ci sur un problème mécanique qui m'a tourmenté beaucoup, quoiqu'il paraisse fort simple au premier coup d'œil. Il s'agit de déterminer le mouvement dont une barre descend en glissant sur un axe cylindrique, comme cette figure représente (*fig.* 2). L'analyse m'a d'abord conduit à deux équations différentio-différentielles, assez semblables à celles qui expriment le mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes; mais, jusqu'ici, je n'en ai pu tirer qu'une seule équation intégrale, en négligeant même le frottement; mais, si l'on en voulait tenir compte, je ne vois d'autre ressource que de poursuivre le mouvement de la barre quasi pas à pas, et c'est sur ce pied que j'ai développé un cas déterminé.

Fig. 2.



En parcourant le dernier Volume des *Mémoires de Berlin*, je ne fus pas peu surpris qu'il puisse encore être question d'un satellite de Vénus et même d'un tel, qui renverserait tous les principes de l'Astronomie; et je n'aurais pas cru non plus que le principe de la raison suffisante osât encore paraître sur le théâtre.

Je suis entièrement convaincu, qu'à moins que vous ne réussissiez à retrouver les démonstrations perdues de Fermat, elles resteront perdues à jamais. Tous mes soins là-dessus ont été inutiles jusqu'ici, sans en exclure celui où il s'agit de prouver que cette égalité

$$x^n \pm y^n = z^n$$

est toujours impossible, à moins que l'exposant n ne soit au-dessous de 2. Nous avions cru autrefois que cette impossibilité s'étendait plus loin, à ces formules

$$a^3 \pm b^3 = z^3, \qquad a^4 \pm b^4 \pm c^4 = z^4, \qquad a^5 \pm b^5 \pm c^5 \pm d^5 = z^5, \qquad \ldots;$$

mais il n'y a pas longtemps que j'ai été convaincu de la fausseté de la seconde, ayant trouvé quatre nombres a, b, c, d, tels que $a^4 + b^4 \pm c^4 + d^4$.

Vous recevrez en peu de temps le Volume XVIII de nos *Commentaires*, et la première classe du Tome XIX est déjà imprimée. J'y ai donné une idée d'étendre la Table des nombres premiers jusqu'au delà d'un million, où j'ai même donné tous les nombres premiers entre

1000000 et 1002000; un tel Ouvrage demanderait un Volume in-4°
de la même épaisseur que nos Commentaires.

Je finis, Monsieur, ayant l'honneur d'être, avec les sentiments du plus parfait dévouement,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

P.-S. — Permettez-moi, Monsieur, d'ajouter encore deux théorèmes qui me paraissent vrais, quoique je n'en aie pu encore trouver la démonstration :

THÉORÈME I. — *Il n'y a point de courbe algébrique dont un arc quelconque soit égal au logarithme d'une fonction quelconque.*

THÉORÈME II. — *Hormis le cercle, il n'y a point de courbe algébrique dont un arc quelconque soit égal à un arc de cercle.*