

et j'ai réussi d'en trouver la solution en général, dont j'ajoute ici un exemple particulier.

+ 68	- 29	+ 41	- 37
- 17	+ 31	+ 79	+ 32
+ 59	+ 28	- 23	+ 61
- 11	- 77	+ 8	+ 49

Enfin, j'ai l'honneur d'être, avec la plus parfaite considération,
Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

P. S. — Lorsque M. le Directeur (1) voudra bien répondre à cette Lettre, on le prie de donner sa réponse ou au professeur Formey, ou de l'envoyer sous l'adresse du Secrétaire de l'Académie impériale des Sciences.

(Au bas du dernier feuillet, on lit : *Répondue*, de la main de Lagrange.)
Cette réponse manque.

26.

EULER A LAGRANGE.

Saint-Petersbourg, ce $\frac{20}{31}$ mai 1771 (2).

MONSIEUR ET TRÈS HONORÉ CONFRÈRE,

Comme je suis hors d'état d'écrire moi-même, et que les occasions de me servir d'une autre main se présentent rarement, vous me par-

(1) Lagrange était devenu directeur de la Classe de Mathématiques.

(2) Ms. f° 34. — *Opera postuma*, t. I, p. 577.

donnerez, Monsieur, que j'aie différé si longtemps de répondre à l'obligeante Lettre dont vous m'avez honoré. D'ailleurs, depuis environ un an, la théorie de la Lune m'a tellement occupé que je n'ai presque pu penser à d'autres choses (1). Trois habiles calculateurs m'ont bien voulu assister pendant tout ce temps, et, quoique nous y ayons rencontré mille obstacles, nous les avons surmontés presque tous assez heureusement, de sorte que nos travaux sur cette matière se trouvent actuellement sous presse. Jamais une recherche n'a demandé tant de pénibles calculs et tant d'adresse dans l'exécution; cependant, il s'en faut de beaucoup que cette matière soit entièrement épuisée; nous devons nous contenter, si les Tables que nous en avons tirées s'accordent encore mieux avec le ciel que celles de MM. Mayer et Clairaut (2), et que leur usage soit beaucoup plus aisé.

Malgré ces pénibles recherches, je n'ai point manqué de profiter de quelques moments pour étudier vos excellents Mémoires, qui m'ont été communiqués par M. Formey; et d'abord, ce qui m'a frappé le plus et que je ne puis pas assez admirer, c'est la beauté et l'étendue infinie de votre théorème général, lorsque

$$x = t + \varphi(t) + \frac{1}{2}d\varphi^2(t) + \frac{1}{6}d^2\varphi^3(t) + \frac{1}{24}d^3\varphi^4(t) + \dots,$$

et marquant par $\psi(x)$ une fonction quelconque de x et prenant $\psi(t)$ une semblable fonction de t , on aura toujours

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \psi(t) + \varphi(t)\psi'(t) + \frac{1}{2}d\varphi^2(t)\psi'(t) \\ & + \frac{1}{6}d^2\varphi^3(t)\psi'(t) + \frac{1}{24}d^3\varphi^4(t)\psi'(t) + \dots, \end{aligned}$$

en omettant les divisions par les puissances de dt . Ce théorème me paraît déjà de la dernière importance sans même avoir égard à l'équation $t = x - \varphi(x)$, dont il fournit la résolution et dont vous vous servez avec le plus heureux succès pour résoudre toutes sortes d'équa-

(1) Le sujet proposé par l'Académie des Sciences de Paris avait été, en 1768, remis une seconde fois au concours pour 1770. La moitié du prix fut alors adjugée à Euler, et la question remise au concours pour 1772; cette fois, le prix fut partagé entre Euler et Lagrange; voir t. XIII, lettres 43, 48, 50, 55 et suiv., 61 et suiv., 71 et suiv., 80 et suiv., 102.

(2) Voir tome XIII, lettres 27, 49, 62, 84.

tions. J'avais déjà composé, avant mon départ de Berlin, un Mémoire sur le même sujet à l'occasion d'une excellente pièce de M. Lambert, insérée dans les *Actes helvétiques* (1). Cette idée me parut d'abord susceptible d'une beaucoup plus grande étendue, que j'ai tâché de développer dans ledit Mémoire, qui, actuellement, se trouve imprimé dans le XV^e Volume de nos Mémoires ou Commentaires. Mais vous avez poussé, Monsieur, cette recherche beaucoup plus loin à l'aide de votre admirable théorème. Après y avoir réfléchi tant soit peu, j'ai d'abord reconnu que sa vérité est indépendante de la résolution des équations et des rapports qui règnent entre les racines. J'avais d'abord formé le dessein d'en rechercher une démonstration directe, tirée des premiers principes généraux de l'Analyse, mais j'y ai d'abord rencontré de trop grands obstacles. Or notre habile académicien M. Lexell y a bientôt parfaitement réussi, et en a trouvé une telle démonstration qui répondait parfaitement à mes souhaits. C'est dommage que ce beau théorème soit tellement caché entre vos nombreuses recherches, Monsieur, que peu de monde l'y observera et en remarquera toute l'importance. Pour moi, je le crois bien loin préférable à mon théorème général sur l'intégrabilité, que j'avais tiré de la théorie des isopérimètres, et que vous avez jugé digne, Monsieur, d'insérer dans les *Mémoires de Berlin*, avec une Note touchant M. le marquis de Condorcet.

A cette occasion, j'ai aussi l'honneur de vous marquer que M. Lexell a pareillement donné une très belle démonstration de ce même théorème, que vous lirez dans le XV^e Volume de nos Commentaires. Vous avez bien voulu dire à M. Formey que les extraits des lettres de M. d'Alembert, insérés dans les *Mémoires de Berlin* (2), ne sont rien moins que ce que porte le titre, mais que ce grand homme vous les avait, Monsieur, adressés exprès pour les publier dans cette forme, quoique, à mon avis, elles ne renferment que des observations assez légères. Or, comme les dernières lettres que j'ai eu l'honneur de vous adresser, Monsieur, contiennent quelques articles qui ont mérité votre

(1) *Observationes varice in Mathesim puram*, dans le t. III des *Acta helvetica*, p. 128.

(2) Voir année 1769, p. 254 et 265.

approbation, il me semble que vous les pourriez également faire insérer dans vos Mémoires sous le titre d'Extraits, sans que j'aie besoin de l'y mettre moi-même à la tête.

Ne doutant pas que vous n'avez, Monsieur, poussé encore plus loin vos premières recherches sur le problème de deux nombres dont tant la somme que la différence, étant ou ajoutée ou retranchée du produit de ces mêmes nombres, produise des nombres carrés, je suis fort curieux d'apprendre si vous en avez découvert une solution plus générale que la mienne, que j'avais trouvée par bien des détours.

On expédiera d'ici, avec les premiers vaisseaux, le III^e Volume de mon Calcul intégral avec le III^e Volume de ma Dioptrique, qui enseigne la plus parfaite construction des microscopes (1). Vous verrez alors aussi le Volume XIV de nos Commentaires divisé en deux Parties, dont la dernière est presque uniquement remplie des recherches sur la parallaxe du Soleil, tirées des observations du dernier passage de Vénus sur le disque du Soleil, que M. Lexell a bien voulu exécuter sur les idées que je lui avais communiquées (2). Ce même académicien a aussi composé un Traité à part sur la comète de l'année 1769, qui vient de paraître il y a quelques mois (3).

Vous voyez, Monsieur, que je profite amplement de la belle occasion que M. Lexell me fournit en me prêtant ses yeux et sa main.

J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

A Monsieur de Lagrange, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, à Berlin.

(1) *Dioptrica*, Pétersbourg, 1769, 1770, 1771, 3 vol. in-4°.

(2) Année 1769.

(3) *Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la comète de 1769 et de son temps périodique, exécutés sous la direction de M. L. Euler*, par M. Lexell, Saint-Pétersbourg, 1770, in-4°.