serai jamais d'être, avec une très respectueuse considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

Mes compliments les plus empressés à mon très digne ami, M. le professeur Beguelin.

M. Bernoulli aura bien la bonté de faire parvenir l'incluse à son adresse, et nous vous prions, Monsieur, de lui présenter nos civilités.

24.

EULER A LAGRANGE.

Saint-Pétersbourg, $\frac{16}{27}$ janvier 1770 (1).

MONSIEUR MON TRÈS CHER CONFRÈRE,

Je suis extrêmement ravi que vous ayez reçu avec tant de bonté mon Ouvrage sur le Calcul intégral, dans lequel j'ai tâché de ramasser tout ce que j'ai observé sur ce sujet de remarquable. Mais j'espère de vous envoyer au plus tôt la troisième Partie de cet Ouvrage, qui appartient presque uniquement à vous, et je ne doute pas que vous ne la portiez bientôt à un plus haut degré de perfection.

M. Formey m'a envoyé les feuilles du dernier Volume des Mémoires de Berlin, qui contiennent les excellentes pièces dont vous me parlez dans votre lettre. Comme je ne suis pas en état de les lire moi-même, j'ai prié notre habile M. Lexell de m'en faire la lecture, que j'ai entendue avec la plus grande avidité. J'y ai non seulement admiré la profondeur de toutes vos recherches, mais aussi surtout leur multiplicité, qui à tout autre aurait fourni de quoi remplir une douzaine d'excellents Mé-

(1) Ms. f° 25. — *Opera postuma*, t. II, p. 571.

moires différents. Vous savez, Monsieur, que j'ai beaucoup travaillé dans cette espèce d'analyse et que j'en connais parfaitement toutes les difficultés, et partant j'ai vu avec la plus grande satisfaction que vous en avez surmonté quelques-unes très heureusement. La méthode que vous employez pour résoudre l'équation $A = p^2 \pm Bq^2$ est d'autant plus ingénieuse qu'elle ne suppose rien qui ne soit fondé que sur l'induction. J'ai été curieux d'appliquer d'abord vos méthodes à des exemples, qui ont pour la plupart très bien réussi; mais l'exemple suivant m'a causé quelque embarras, où il s'agit de résoudre en nombres entiers $101 = p^2 - 13q^2$. Selon votre méthode, il faut donc chercher un nombre α plus petit que $\frac{101}{2}$, de sorte que $\alpha^2 - 13$ soit divisible par 101, où j'ai trouvé $\alpha = 35$ et de là $A_1 = 12 = p_1^2 - 13q_1^2$, pendant que $A = 101$ et $B_1 = 13$, d'où l'on tire $p_1 = 5$ et $q_1 = 1$; donc, selon votre méthode, on trouverait

$$p = \frac{\alpha p_1 \mp B q_1}{A_1} = \frac{35.5 \mp 13}{12} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{\alpha q_1 \mp p_1}{A_1} = \frac{35 \mp 5}{12};$$

et partant, ces nombres n'étant pas entiers, on devrait conclure que ce cas n'est pas possible; cependant, on satisfait à cette question en prenant $p = 123$ et $q = 34$, ce qui me faisait croire que votre méthode était insuffisante.

Mais, en écrivant cela, je vois que je n'ai pas assez bien observé les préceptes que vous donnez; car, puisque $A_1 = 12$ est divisible par le carré 4, il faut poser $\frac{12}{4} = 3 = t^2 - 13u^2$, ce qui donne $t = 4$ et $u = 1$, d'où l'on doit prendre $p_1 = 8$ et $q_1 = 2$, et alors on aura

$$p = \frac{35.8 \mp 13.2}{12} = \frac{140 \mp 13}{6} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{35.2 \mp 8}{12} = \frac{35 \mp 4}{6};$$

or ces formules ne sauraient donner des nombres entiers. Cependant je vois bien qu'on parviendrait à ma solution, si l'on prenait $p_1 = 47$ et $q_1 = 13$ vu que $12 = 47^2 - 13.13^2 = 2209 - 2197$, car de là on tirerait

$$p = \frac{35.47 \mp 13.13}{12} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{35.13 \mp 47}{12},$$

où les signes supérieurs donnent $p = 123$ et $q = 34$, mais quelle raison nous conduit à supposer $q_1 = 47$ et $p_1 = 13$?

J'ai aussi fort admiré votre méthode d'employer les nombres irrationnels et même les imaginaires dans cette espèce d'analyse, qui est uniquement attachée aux nombres rationnels. Il y a déjà quelques années que j'ai eu de semblables idées; mais je n'en ai encore rien donné là-dessus ni dans nos Commentaires, ni dans les Mémoires de Berlin; cependant, ayant publié ici une Algèbre complète en langue russe, j'y ai développé cette matière fort au long, où j'ai fait voir que, pour résoudre l'équation $x^2 + ny^2 = (p^2 + nq^2)^\lambda$, on n'a qu'à résoudre celle-ci : $x + y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^\lambda$. Cet Ouvrage s'imprime actuellement aussi en allemand, en 2 vol. in-8° (1), et, quand je vous expédierai le Volume III du *Calcul intégral*, j'y ajouterai un exemplaire de cette Algèbre ou en russe ou en allemand.

Mais je n'y ai pas poussé mes recherches au delà des racines carrées; et l'application aux racines cubiques et ultérieures vous a été réservée uniquement. C'est de là que j'ai tiré cette formule très remarquable

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz,$$

dont les trois facteurs sont $x + y\sqrt[3]{n} + z\sqrt[3]{n^2}$; d'où l'on voit qu'on peut toujours aisément déterminer les lettres x, y et z pour que cette formule devienne un carré, ou un cube, ou un carré-carré, ou quelque plus haute puissance. Au reste, pour juger si l'équation $A = p^2 \pm Bq^2$ est possible ou non, j'ai trouvé cette règle pour les cas où A est un nombre premier : ôtez du nombre A un multiple quelconque de $4B$, et, toutes les fois que le reste est un nombre premier a, l'équation proposée sera possible si celle-ci $a = p^2 \pm Bq^2$ l'est, et de plus si le reste $A - 4nB$ devient un tel nombre ab^2, de sorte que a soit un nombre premier, ou même l'unité; alors la possibilité ou impossibilité de l'équation $a = p^2 - Bq^2$ déclare la nature de l'équation proposée. Ainsi, ayant

(1) *Anleitung zur Algebra*, Pétersbourg, 1770, 2 vol. in-8°.

l'équation $109 = p^2 - 7q^2$, puisque $109 - 4 \times 7 = 81$, ou $a = 1$ et $B = 9$, je forme cette équation $1 = p^2 - 7q^2$, qui, étant possible, prouve la possibilité de la proposée; et dans l'exemple rapporté ci-dessus $101 = p^2 - 13q^2$, puisque $101 - 4 \times 13 = 49$ et partant $a = 1$, le jugement se réduit à cette équation $1 = p^2 - 13q^2$, qui est sans doute possible; mais je dois avouer à ma confusion que je ne saurais démontrer cette règle, et, quand même on en trouverait une démonstration, cela ne servirait en rien à la solution actuelle de l'équation $A = p^2 - Bq^2$.

J'attends avec la plus grande impatience le IV^e Volume des *Mémoires de Turin,* que vous aurez la bonté, Monsieur, de m'envoyer, ne pouvant douter qu'ils ne soient remplis de vos très excellentes recherches, et je vous en présente d'avance mes remercîments les plus empressés, ayant l'honneur d'être, avec la plus parfaite considération, Monsieur, votre très humble serviteur,

L. Euler.

P. S. Il y a quelque temps, Monsieur, que j'ai trouvé une solution complète du problème suivant :

Il s'agit de trouver trois fonctions X, Y *et* Z *de deux variables* t *et* u, *telles que, posant* $dX = P\,dt + p\,du$, $dY = Q\,dt + q\,du$, $dZ = R\,dt + r\,du$, *on satisfasse aux conditions suivantes :*

I. $$P^2 + Q^2 + R^2 = 1,$$

II. $$p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

III. $$Pp + Qq + Rr = 0.$$

Or la nature des différentielles demande encore les conditions suivantes :

I. $$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial t},$$

II. $$\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial t},$$

III. $$\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial t}.$$

Comme une considération tout à fait singulière m'a conduit à la solution de ce problème, que j'aurais d'ailleurs jugé presque impossible, je crois que cette découverte pourra devenir d'une grande importance dans la nouvelle partie du Calcul intégral dont la Géométrie vous est redevable.

Voilà, Monsieur et très honoré Confrère, un théorème de la plus grande importance, et un problème très difficile à résoudre :

THEOREMA. — *Si formula* $mx^2 + ny^2$, *casu* $x = a$ *et* $y = b$, *præbeat numerum primum* α, *tunc omnes numeri primi in formula* $\alpha \pm 4mnp$, *quin etiam in hac formula generaliori* $\alpha q^2 \pm 4mnp$ *contenti, simul erunt numeri formæ* $mx^2 + ny^2$.

N. B. *Demonstratio adhuc desideratur.*

PROBLEMA. — *Invenire duos numeros quorum productum, tam summa quam differentia sive auctum sive minutum, fiat quadratum*

$$xy + x + y = \square, \qquad xy - x - y = \square,$$
$$xy + x - y = \square, \qquad xy - x + y = \square.$$

Solutio. — Quærantur duo numerorum paria p, q et r, s ut formulæ

$$2pq(p^2 - q^2)(p^2 + q^2) \quad \text{et} \quad 2rs(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)$$

teneant rationem quadrati ad quadratum. Tum enim numerorum quæsitorum alter erit $\frac{(p^2+q^2)(r^2+s^2)}{2pq(r^2-s^2)}$, alter vero $\frac{(p^2+q^2)(r^2+s^2)}{2rs(p^2-q^2)}$. Conditio præscripta impletur sumendo $p = 12$, $q = 1$ et $r = 16$, $s = 11$; tum enim eris

$$\frac{2pq(p^2 - q^2)(p^2 + q^2)}{2rs(r^2 - s^2)(r^2 + s^2)} = \frac{1}{36} = \square.$$

Hinc ergo numeri quæsiti erunt $\frac{13.29^2}{2^3.9^2}$ et $\frac{5.29^2}{2^5.11^2}$.

(Au-dessous de la dernière ligne on lit, de la main de Lagrange, *Répondue*.)
Cette réponse manque.