

avancé assez bien; mais, comme il y en aura trois Volumes in-4°, il faudra attendre encore plus qu'un an, avant que tout soit achevé. Le troisième Volume renferme la nouvelle partie du Calcul intégral, dont le public sera toujours redevable à votre sagacité, et j'espère que, par vos soins, cette partie que je n'ai fait qu'ébaucher sera bientôt portée à un plus haut point de perfection. Tant la faiblesse de ma vue que mon emploi présent, qui m'oblige de passer tous les matins à la Direction de l'Académie, me mettent absolument hors d'état de continuer mes recherches sur cette matière; mais, à l'aide de mon fils Albert, je serai toujours en état de profiter des éclaircissements que vous me voudrez bien communiquer tant sur ce sujet que sur tous les autres, auxquels vous vous appliquerez; je vous en supplie même avec le plus grand empressement, dans la confiance que vous serez déjà suffisamment convaincu que personne ne saurait faire plus de cas de l'importance de vos découvertes. Je vous prie donc, Monsieur, de me conserver toujours votre amitié et votre affection, et d'être assuré que je serai toujours avec la plus parfaite considération et le plus inviolable attachement, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

A Monsieur de Lagrange, membre de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, et Directeur de la Classe de Mathématiques, à Berlin.

23.

EULER A LAGRANGE.

Saint-Petersbourg, ce $\frac{5}{10}$ février 1768 (1).

MONSIEUR,

Votre lettre du 29 décembre de l'année passée m'a été remise à peu

(1) Ms. f° 23. — *Opera postuma*, t. II, p. 569.

près en même temps que j'ai reçu le dernier Volume des *Mémoires de l'Académie de Berlin*, où je me suis d'abord fait lire votre excellent Mémoire sur le tautochronisme ⁽¹⁾, puisque cette matière m'a autrefois tenu fort au cœur, et que j'ai aussi fait une analyse de la méthode de M. Fontaine, que vous trouverez dans le Volume X de nos Commentaires ⁽²⁾. Mais votre méthode est beaucoup plus ingénieuse, et la lecture m'en a causé un vrai plaisir, quoique l'espérance d'y trouver des tautochrones pour toutes les hypothèses possibles de la résistance n'a pas été entièrement remplie. Or j'en ai d'abord découvert la source dans la formule $\frac{X}{A}$, à une fonction quelconque de laquelle vous égalez le temps par un arc indéfini, ou bien à une fonction de nulle dimension des quantités X et A. Mais vous conviendrez aisément que la supposition d'une telle fonction apporte à la solution une très grande limitation, attendu qu'on pourrait imaginer une infinité d'autres expressions également propres à représenter le temps $\frac{X_1}{A_1}, \frac{X_2}{A_2}$, et qu'on supposât le temps égal à une fonction quelconque de toutes ces formules ensemble, mais l'exécution mènerait à des calculs presque insurmontables.

J'ai aussi déjà remarqué, dans le Volume II de ma Mécanique, que les cas où la résistance serait comme le cube ou quelque puissance plus haute de la vitesse ne sauraient être résolus par de telles fonctions de nulle dimension, mais qu'il faut recourir à des fonctions de plusieurs dimensions, où je crois avoir indiqué la vraie route pour parvenir à la résolution de tels cas, mais qui, cependant, est trop embarrassante pour que j'aie pu en faire l'application à d'autres cas que celui où la résistance en elle-même est extrêmement petite. J'ai aussi vu que les trois méthodes de M. d'Alembert, dans le même Volume de Mémoires ⁽³⁾, sont assujetties à la même restriction. Au reste, je crois devoir avertir que feu M. J. Bernoulli n'a trouvé la tautochrone pour

⁽¹⁾ *Sur les courbes tautochrones* (voir t. II, p. 317 de la présente édition).

⁽²⁾ *Dilucidationes de tautochronis in medio resistente*, année 1766, t. X.

⁽³⁾ *Sur les tautochrones*, année 1765, t. XXI, p. 381-413.

la résistance proportionnelle au carré de la vitesse qu'après que je lui en avais communiqué ma solution, et il n'a jamais dit qu'il en avait fait le premier la découverte.

Je suis extrêmement ravi, Monsieur, que mes recherches sur le mouvement d'un corps attiré à deux centres de forces fixes aient mérité votre attention; mais vous n'en avez vu que ce qui a été inséré dans les Mémoires de Berlin et qui regarde principalement les courbes algébriques que ma solution renferme (1). Or j'en ai composé encore deux autres Mémoires, dont l'un se trouve dans le Volume X de nos Commentaires et l'autre dans le Volume XI (2). Dans le dernier, j'ai réussi à déterminer le mouvement dudit corps, lorsqu'il ne se meut pas dans le même plan, et je suis extrêmement curieux d'apprendre, à quel égard vous avez donné à ce problème une plus grande étendue. Si vous avez réussi de donner à l'un des deux centres de force un mouvement autour de l'autre, quoiqu'il ne fût que circulaire et uniforme, je le regarderai comme la plus importante découverte dans l'Astronomie.

L'impression de mon Calcul intégral avance assez passablement, et le premier Tome est déjà achevé, que je tâcherai de vous envoyer au plus tôt et peut-être accompagné du second; il y en aura trois Volumes en tout.

Je n'ai reçu qu'un exemplaire du Volume III des Mémoires de Turin et je vous en ai déjà, si je ne me trompe, présenté mes très humbles remerciements. Comme je suis hors d'état de lire et d'écrire moi-même, je suis d'autant plus curieux de profiter des écrits des autres, mais principalement de vos recherches, qui sont toujours marquées d'un très éminent degré de profondeur. Je vous prie donc de me conserver toujours votre amitié et bienveillance, et d'être assuré que je ne ces-

(1) PROBLÈME. — *Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver le cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique.* T. XVI, année 1760, p. 228-249.

(2) Ces deux Mémoires sont compris sous le même titre : *De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti.* T. X, année 1766, p. 207, et tome XI, année 1767, p. 152 des *Novi Commentarii.*

serai jamais d'être, avec une très respectueuse considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

Mes compliments les plus empressés à mon très digne ami, M. le professeur Beguelin.

M. Bernoulli aura bien la bonté de faire parvenir l'incluse à son adresse, et nous vous prions, Monsieur, de lui présenter nos civilités.

24.

EULER A LAGRANGE.

Saint-Petersbourg, $\frac{1}{2}$ janvier 1770 ⁽¹⁾.

MONSIEUR MON TRÈS CHER CONFRÈRE,

Je suis extrêmement ravi que vous ayez reçu avec tant de bonté mon Ouvrage sur le Calcul intégral, dans lequel j'ai tâché de ramasser tout ce que j'ai observé sur ce sujet de remarquable. Mais j'espère de vous envoyer au plus tôt la troisième Partie de cet Ouvrage, qui appartient presque uniquement à vous, et je ne doute pas que vous ne la portiez bientôt à un plus haut degré de perfection.

M. Formey m'a envoyé les feuilles du dernier Volume des Mémoires de Berlin, qui contiennent les excellentes pièces dont vous me parlez dans votre lettre. Comme je ne suis pas en état de les lire moi-même, j'ai prié notre habile M. Lexell de m'en faire la lecture, que j'ai entendue avec la plus grande avidité. J'y ai non seulement admiré la profondeur de toutes vos recherches, mais aussi surtout leur multiplicité, qui à tout autre aurait fourni de quoi remplir une douzaine d'excellents Mé-

⁽¹⁾ Ms. n° 25. — *Opera postuma*, t. II, p. 571.