

J'ai l'honneur d'être, avec une parfaite considération et un entier dévouement,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

DE LA GRANGE.

---

16.

LAGRANGE A EULER.

A Turin, ce 14 juin 1760 <sup>(1)</sup>.

MONSIEUR,

Voici le second Volume des *Mélanges* de notre Société que le Roi a bien voulu honorer du titre de *Société Royale*. Elle m'a chargé de vous l'envoyer, et de vous prier de l'accepter comme un tribut qu'elle vous doit et qu'elle est bien glorieuse de vous devoir. Comme j'ai quelque part à cet Ouvrage, je vous prie encore, Monsieur, de me permettre de vous le présenter comme un témoignage du respect et de l'attachement avec lequel je suis et je serai toute ma vie, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

DE LA GRANGE.

*A Monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.*

---

17.

EULER A LAGRANGE.

Berlin, 24 juin 1760 <sup>(2)</sup>.

MONSIEUR,

Je suis bien flatté de l'approbation dont votre illustre Académie, et

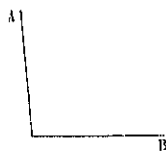
<sup>(1)</sup> *Lettres inédites*, p. 45.

<sup>(2)</sup> Ms. n° 16. — *Opera postuma*, t. II, p. 56r.

vous en particulier, avez bien voulu honorer mon essai sur les ébranlements dans un milieu élastique; l'honneur de ces profondes recherches est uniquement dû à votre sagacité, et je n'y ai rien fait que profiter des lumières que votre excellent Mémoire m'a fournies. Vous y avez ouvert une carrière tout à fait nouvelle, où tous les géomètres qui viendront après nous trouveront toujours abondamment de quoi occuper leur adresse, et, à mesure qu'ils y réussiront, l'Analyse en acquerra des accroissements très considérables. Or la matière même est sans doute la plus importante dans la Physique : non seulement tous les phénomènes de la propagation du son en dépendent, mais je suis assuré que la propagation de la lumière suit les mêmes lois. On n'a qu'à substituer l'éther au lieu de l'air, et les ébranlements qui y sont répandus nous donneront la propagation de la lumière. Maintenant il serait à souhaiter qu'on pût déterminer les altérations que les ébranlements excités dans un milieu souffrent lorsqu'ils passent dans un autre milieu dont la densité et l'élasticité sont différentes. Je ne sais pas si l'on peut espérer la solution de ce problème, mais je suis convaincu qu'on y découvrirait infailliblement non seulement les véritables lois de la réfraction, mais aussi la plus complète explication de la réflexion dont la réfraction est toujours accompagnée : on verrait qu'il est impossible que les rayons passent d'un milieu dans un autre, sans qu'une partie rebrousse chemin. Peut-être que cette considération pourrait faciliter le développement de l'analyse et fournir au moins quelques solutions particulières; mais on rencontrera ici une nouvelle difficulté. Comme il faut estimer tant la densité que l'élasticité des autres milieux transparents, comme par exemple du verre, la densité, étant si grande par rapport à celle de l'éther sans qu'on puisse supposer plus grande son élasticité que la vitesse des rayons dans le verre, deviendrait extrêmement petite; cependant je crois que la réfraction même prouve suffisamment que la vitesse des rayons dans le verre à celle dans l'éther doit être dans la raison de 2 à 3. Si les pores du verre sont remplis d'un éther pur par lequel se ferait la propagation, il semble que la matière du verre n'y contribuerait en rien. ce qui est pourtant faux. De là je voudrais bien conclure qu'il faut

tenir compte des particules du verre même, mais d'une manière tout à fait différente de celle dont nous concevons la propagation des ébranlements par l'air, où nous supposons les moindres particules parfaitement liquides. Or il doit y avoir une différence très essentielle entre les particules fluides et solides dont le milieu est composé : par les particules fluides, les impressions ne sont transmises que successivement, pendant qu'une particule solide, étant frappée par un bout, transmet le coup quasi dans un instant à l'autre bout; et je crois que c'est la raison pourquoi les rayons de lumière traversent le verre avec une si prodigieuse vitesse, que si la densité était des milliers de fois plus petite qu'elle n'est effectivement. Cette pensée me semble conduire à l'explication de cet étrange phénomène, que la vitesse du son par l'air est plus grande que le calcul nous l'indique. Tous les efforts que vous avez faits pour déterminer la propagation des ébranlements finis prouveront incontestablement qu'aucune accélération n'en saurait résulter, comme je l'avais soupçonné. Il faut donc que cette accélération actuelle que l'expérience nous découvre dans la propagation du son provienne d'une autre cause. Ne pourrait-on donc dire que l'air n'est pas un milieu parfaitement liquide dans ses moindres particules, mais qu'il renferme des particules solides ou rigides qui, étant frappées d'un côté, communiquent l'impulsion dans un instant à l'autre côté, et que la propagation successive, sur laquelle est fondé le calcul, n'a pas lieu dans ces particules solides? Je crois que cette explication pourrait être vérifiée par quantité d'expériences, où le son est transmis par d'autres corps que l'air. Nous savons que le son pénètre par tous les corps, pourvu qu'ils ne soient pas trop épais. On entend parler à travers des murailles, et l'on ne saurait dire que la communication se fasse par les particules d'air renfermées dans les pores de la muraille; la propagation du son se fait plutôt par la substance de la muraille. Et il me semble que tous les corps sont, par rapport au son, la même chose que les corps transparents par rapport à la lumière; et comme tous les corps, si sont assez minces, sont transparents, et que réciproquement les corps transparents, si sont trop épais, perdent la

transparence; il en est de même de tous les corps à l'égard du son, qui tous, s'ils ne sont pas trop épais, transmettent les sons, les uns pourtant plus aisément que les autres. Je souhaiterais qu'on fit plus d'expériences sur cette matière et qu'on examinât surtout si le son, en traversant un autre corps, ne souffre point quelque réfraction. Je vois bien que la chose serait assujettie à de grandes difficultés, puisque nous ne pouvons pas si aisément juger de la direction du son que de la lumière. La question que notre Académie vient de proposer pour l'année 1762 est relative à cette matière. On demande une explication mathématique, comment la représentation du son se fait dans l'organe de l'ouïe; semblable ou analogue à celle dont on explique la représentation des objets visibles dans le fond de l'œil. Il faut bien que les rayons quasi sonores, qui partent d'un point sonore, soient réunis dans un seul point dans la cavité de l'oreille, et qu'ils y représentent une espèce d'image ou un simulacre, sans quoi il serait impossible que nous distinguassions tant de sons différents. Or une telle réunion des rayons sonores, qui sont divergents en entrant dans l'oreille, ne saurait arriver sans une espèce de réfraction; voilà donc à quoi se réduit notre question, c'est de montrer que les rayons sonores sont assujettis à quelque réfraction sous certaines circonstances. Quelques expériences nous pourraient fournir bien de la lumière là-dessus; par exemple, l'angle d'un bastion y pourrait servir. Si quelqu'un en A criait bien



fort, un autre en B devrait juger suivant quelle direction il écouterait le son. Or, ayant bien développé les circonstances sous lesquelles la direction du son souffre quelque changement, on ne manquera pas de rencontrer de pareilles circonstances dans la structure de l'oreille. Puissiez-vous vous résoudre, Monsieur, à travailler sur cette ques-

tion; je doute fort que tout autre que vous soit capable de travailler là-dessus.

Quoique la diminution des ébranlements transmis à de grandes distances suive la raison des distances, je crois pourtant que la force du son que nous apercevons soit proportionnelle réciproquement au carré des distances. Chaque particule d'air étant ébranlée se meut par un certain espace qui détermine son excursion, et tant cet espace que la plus grande vitesse même qu'elle y acquiert est réciproquement proportionnel à la distance (si je ne me trompe, car j'oublie aisément telles circonstances, et je n'ai pas le temps de consulter mes calculs); or il me semble que la force dont une telle particule frappe nos organes dépend conjointement de son excursion et de sa vitesse, ce qui produirait la raison inverse des carrés. Vous aurez vu sans doute la Photométrie de M. Lambert, où il prouve incontestablement que la force des lumières décroît en raison inverse du carré des distances; mais il parle de la force et non pas de la vitesse ou de l'excursion de chaque particule; et, partant, je ne trouve aucune contradiction entre ses expériences et nos calculs.

Ce que vous me marquez, Monsieur, sur les ébranlements de l'air dans un tuyau conoïdal, où vous supposez même l'air hétérogène, est extrêmement profond, et quoiqu'il ne puisse servir à nous éclairer sur la réfraction, vous en pourrez connaître, pour les cas où l'équation est résoluble, s'il n'y a point des ébranlements répandus aussi en arrière. Cela prouverait que, dans toutes les réfractions, ou lorsqu'un rayon passe d'un milieu dans un autre, il s'y fait toujours quelque réflexion.

Pour les formules que vous avez trouvées pour la figure d'un corps qui sous la même surface ait la plus grande solidité, où  $p$  et  $q$  doivent être telles fonctions de  $x$  et  $y$ , pour que cette formule  $p dx + q dy$  devienne intégrable, j'ai remarqué que l'autre condition se réduit à ce que cette formule  $\frac{p dy - q dx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \frac{y dx}{a}$  doit aussi être intégrable, mais cela n'avance rien.

Au reste, la solution générale doit être telle que, posant  $z = 0$ ,

l'équation entre  $x$  et  $y$  donne une figure quelconque et même décrite par hasard, sans avoir quelque continuité.

J'ai l'honneur d'être avec la plus profonde considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. EULER.

18.

LAGRANGE A EULER.

Turin, ce 28 octobre 1762 <sup>(1)</sup>.

MONSIEUR,

Notre Société a fait paraître, il y a quelques mois, le second Volume de ses *Mélanges*, et elle s'est fait gloire d'y insérer votre excellent Mémoire sur les ébranlements dans un milieu élastique <sup>(2)</sup>. Je n'ai pas manqué, aussitôt que je l'ai pu, de m'acquitter du devoir dont elle m'avait chargé, en vous envoyant un exemplaire de cet Ouvrage, que j'ai aussi accompagné d'une de mes Lettres; mais de crainte de quelque accident qui pût l'empêcher de parvenir entre vos mains, j'ai cru devoir encore profiter d'une autre occasion qui s'est présentée depuis peu pour vous en faire tenir une autre copie. Si vous les recevez toutes deux, je vous prie d'en remettre une de ma part à M. Formey, secrétaire de votre Académie.

Je ne vous dirai rien sur la partie de ce Recueil qui m'appartient; et j'attends sur cela votre jugement avec la plus grande impatience.

Ayant appris, par une de vos Lettres de 1759, que vous aviez fait assez de cas de ma méthode *de maximis et minimis* pour l'étendre et la perfectionner dans un Traité particulier, j'ai cru devoir supprimer entiè-

<sup>(1)</sup> *Lettres inédites*, p. 49.

<sup>(2)</sup> Il est intitulé : *Lettre de M. Euler à M. de la Grange, contenant des recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique.*