

vois marcher sur vos illustres traces, et je suis avec la plus parfaite considération

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LOUIS DE LA GRANGE.

A monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

13.

LAGRANGE A EULER.

Turin, 26 décembre 1759 (1).

MONSIEUR,

Dans la dernière Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire vous m'avez proposé à résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + c \frac{\partial z}{\partial Z} - c \frac{z}{Z^2}$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + c \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{z}{Z} \right),$$

qui renferme les lois de la propagation du son dans le cas que les ébranlements se répandent en forme d'ondes circulaires. Comme je n'avais pas alors tout le loisir nécessaire pour entreprendre une telle recherche, j'ai été obligé de la remettre à un autre temps; c'est pourquoi je n'en ai point du tout parlé dans la réponse que je vous fis alors, et que je me flatte que vous aurez bien reçue. Maintenant, voici les principaux résultats de mes réflexions sur ce sujet.

Ayant trouvé, quelque temps avant, le moyen de simplifier ma méthode *De chordis vibrantibus*, dans le cas de la corde uniformément épaisse, et de parvenir directement de l'équation différentielle à la construction géométrique par deux intégrations diverses; l'une en x , et l'autre en t , je crus devoir essayer si les mêmes procédés auraient

(1) *Lettres inédites*, p. 37.

aussi été applicables à l'équation proposée; mais, comme le calcul devenait assez compliqué et incertain, à cause de quelque équation qui tombait dans le cas de Riccati ⁽¹⁾, j'ai aimé mieux de considérer d'abord la question dans l'état qui peut avoir lieu dans la nature, savoir en supposant que les ébranlements se répandent en forme d'ondes sphériques.

Pour cela, après avoir trouvé l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + 2c \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{z}{Z} \right),$$

et l'avoir maniée par un grand nombre d'opérations que ma méthode exigeait, je suis enfin parvenu à une construction géométrique assez simple par laquelle, étant donnés les ébranlements primitifs de l'air dans un tuyau conique infiniment prolongé, il était aisé d'en déterminer tous les suivants.

J'ai trouvé que l'air n'étant ébranlé d'abord que par un très petit espace au sommet du cône, cet ébranlement, qui peut être regardé comme une onde sonore, se communique d'une partie de l'air à l'autre et avance toujours avec une vitesse constante, et la même que celle qui convient au cas d'une simple ligne physique; mais, en même temps, la force de l'ébranlement ira en décroissant dans la raison inverse des carrés des distances, ce qui semble s'accorder avec les expériences ordinaires sur la diminution du son. En examinant ensuite plus intimement la même construction, je me suis aperçu que je pouvais aussi assigner l'intégrale de l'équation proposée en termes algébriques. La voici :

$$z + \frac{\partial}{\partial Z}(zZ) = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}),$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{\int Z \varphi(Z \pm t\sqrt{c}) dZ}{Z^2},$$

où la fonction φ peut être continue ou discontinue, comme l'on voudra.

(1) Voir, sur lui, la Note de la p. 138 du t. XIII.

Cette équation, si on la traite d'une manière convenable, suffira pour nous découvrir tous les mouvements de l'air dans un tuyau conique d'une longueur quelconque, pour quelque agitation primitive qu'on veuille imaginer; mais aussi, il ne sera pas fort difficile de voir que le système dans ce cas ne pourra jamais plus reprendre sa première position, si ce n'est par hasard ou par le moyen de certaines conditions dans les ébranlements primitifs, puisque les branches de la courbe *génératrice*, qui doivent être tracées de part et d'autre à l'infini, ne se trouvent pas semblables entre elles comme celles des cordes vibrantes.

Vous pouvez, monsieur, avec peu d'attention, découvrir toutes les conséquences qui résultent de cette formule, et qui pourraient se dérober à mes efforts. Après avoir ainsi rempli mon objet, je suis revenu au cas des ondes circulaires, mais j'ai été tout étonné de trouver que le problème dans cette hypothèse, en apparence plus simple que l'autre, se refusait néanmoins à une exacte solution. Je pris donc à considérer la question dans le sens le plus général, en supposant la figure conoïdale du tuyau rempli d'air telle que chaque section perpendiculaire à l'axe soit proportionnelle à Z^m , Z étant la distance du sommet du conoïde donné.

En ce cas, j'ai trouvé l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + mc \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{z}{Z} \right),$$

et, de là, par ma méthode, j'ai tiré la formule

$$z + \frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{m-2}{2(m-1)} \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + \frac{(m-2)(m-4)}{2 \cdot 3(m-1)(m-2)} \frac{\partial^3 z}{\partial Z^3} + \dots = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}).$$

J'ai aussi trouvé, en même temps, une autre formule pour la valeur de z , savoir :

$$zZ^m = \psi(Z \pm t\sqrt{c}) - Z \frac{\partial}{\partial Z} \psi(Z \pm t\sqrt{c}) + \frac{m-2}{2(m-1)} Z^2 \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \psi(Z \pm t\sqrt{c}) - \frac{(m-2)(m-4)}{2 \cdot 3(m-1)(m-2)} Z^3 \frac{\partial^3}{\partial Z^3} \psi(Z \pm t\sqrt{c}) + \dots,$$

où la fonction ψ dépend de φ par un nombre d'intégrations relatif au

nombre m . On voit par ces formules que z n'aura jamais une valeur exacte que dans les cas de m pair et positif; dans tous les autres, la série ira à l'infini, et, si m est impair positif, il y aura toujours quelques termes qui s'évanouiront au commencement d'elle. Les cas de m pair négatif admettent néanmoins une solution exacte lorsque m ...

On trouvera la formule, pour ce cas, en posant dans la sup....

$\frac{z}{Z^{m+1}}$ au lieu de z , et puis $-m-2$ au lieu de m ; car on peut voir que par ces transformations l'équation différentielle demeurera la même.

Au reste, j'ai reconnu que, dans toutes les équations d'une semblable nature, on peut souvent abrégé le calcul en supposant d'abord

$$z = A \psi(Z + kt) + B \frac{\partial}{\partial Z} \psi(Z + kt) + C \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \psi(Z + kt) + \dots,$$

où A, B, C, \dots étant des fonctions de Z qu'on déterminera après la substitution par la simple comparaison des termes; mais, si l'équation renfermait quelque terme qui ne contient point le z , ou quelque-une de ses différences, il serait peut-être alors indispensable d'avoir recours à une méthode directe; la mienne serait encore utile, quelle que fût la nature de ce terme. Je compte d'expliquer cette matière dans une dissertation particulière que je prépare pour le Volume de nos Mélanges de l'année prochaine. En attendant, je commence par soumettre ce petit essai à votre jugement que je regarde comme le premier dans le petit nombre de ceux qui peuvent véritablement me flatter ou me donner de la peine.

Daignez, monsieur, d'accepter les vœux que j'ose joindre avec ceux de toute la République des Lettres pour la conservation de votre précieuse vie.

Je suis avec le plus respectueux attachement, monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LOUIS DE LA GRANGE.

A monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, à Berlin.