abstraction de toutes forces qui pourraient agir sur le corps. J'espère que vous aurez bien reçu ma dernière lettre; pour celle-ci je la fais passer par la main d'un ami à Genève, M. Bertrand (1), qui s'est appliqué aux Mathématiques avec un très grand succès.

J'ai l'honneur d'être, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. Euler.

A Monsieur de La Grange Tournier, Professeur en Mathématiques et membre de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, de Prusse à Turin.

12.

LAGRANGE À EULER.

De Turin, 24 novembre 1759 (2).

Monsieur,

Rien ne pouvait m'arriver de plus agréable que l'honneur de vos lettres, qui m'assurent de la continuation de votre précieuse amitié; j'ai été charmé surtout d'apprendre que vous ayez enfin reçu le Livre que j'avais pris la liberté de vous envoyer comme un témoignage du respectueux attachement que je conserve sans cesse pour votre illustre personne. Notre Société vous est infiniment redevable de la bonté que vous avez eue d'examiner ses travaux, et du jugement honorable que vous en portez; vos suffrages, monsieur, sont pour nous les plus flatteurs, et ce n'est que sur eux que nous croyons pouvoir justement apprécier notre Ouvrage. Le succès de cette première entreprise nous encourage à ne pas l'abandonner, et nous espérons de donner au public un semblable Volume au milieu de l'année prochaine. Nous avons d'ailleurs tout lieu de croire que le Gouvernement ne manquera pas de

(1) Louis Bertrand, géomètre, membre de l'Académie de Berlin, né à Genève le 3 octobre 1731, mort le 15 mai 1812.

(2) *Lettres inédites*, p. 29.

soutenir une Société naissante, qui, sans un établissement convenable, ne saurait pas subsister longtemps; mais ce qui pourrait l'engager le plus ce serait de voir que ceux mêmes qui tiennent les premiers rangs dans les Sciences daignassent y concourir, et l'appuyer par leurs noms et leur crédit. M. Haller vient de nous faire cet honneur en nous promettant deux Dissertations pour le Tome suivant (¹). Oserais-je vous supplier aussi, monsieur, d'une faveur semblable, au nom de toute la Société? Les Lettrés de notre Pays seront sans doute fidèles à conserver une vive reconnaissance de ceux qui les auront les premiers honorés et protégés. En cas que vous vouliez vous daigner nous envoyer quelque pièce, vous pouvez, s'il n'y a pas d'autre voie plus commode et plus sûre, nous la faire tenir directement par la poste en l'adressant à Genève, sans craindre nullement la grosseur du paquet.

Je me crois extrêmement heureux d'avoir pu contribuer à mettre votre solution de *chordis vibrantibus* à l'abri de toutes les objections de MM. Bernoulli et d'Alembert. Il est vrai que les calculs en sont assez longs et compliqués; mais je ne sais pas si, en envisageant les choses comme j'ai cru devoir faire, on pourrait les abréger ou simplifier. J'ai cependant imaginé depuis peu une autre solution analytique, par laquelle je parviens directement de la formule différentielle $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ à la même construction générale que j'ai donnée dans l'article 45, sans que la nature du calcul puisse porter la moindre atteinte à sa généralité; car cette nouvelle méthode est fondée sur les mêmes principes que celle que j'ai expliquée pour le cas d'un nombre indéterminé de corps mobiles, avec cette différence que les opérations, ici roulant toujours sur des termes infiniment petits, ne sont composées que des intégrations et différentiations convenables. Cette solution, étant d'un genre tout à fait nouveau, ne sera peut-être pas aussi indigne de votre attention, et elle servira encore plus à établir l'usage des fonctions irré-

(¹) Albert de Haller, anatomiste, botaniste et poète, né à Berne en 1708, mort en 1777. Il tint parole à Lagrange, car dans le IIᵉ Volume, qui comprit les années 1760-1761, le premier Mémoire est de lui. Il est intitulé : *Emendationes et auctaria ad stirpium helveticarum historiam*.

gulières et discontinues dans une infinité d'autres problèmes. Je la réserve pour le second Tome de nos Mémoires [1]. À propos de la solution générale, lorsque la corde a au commencement une figure quelconque avec des vitesses données à tous ses points, vous verrez que je l'ai donnée dans l'article cité, et je ne doute pas qu'elle ne soit entièrement conforme à celle que vous avez inventée; mais il faut avoir égard à l'errata qui se trouve à la fin de tout le Livre. Si l'on suppose que, dans le premier état de la corde, on ait

$$y = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad u = \Delta x,$$

on aura généralement

$$y = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct) + \int \Delta(x+ct)\,dt + \int \Delta(x-ct)\,dt}{2},$$

d'où l'on tire par la différentiation la valeur de u.

J'ai reconnu avec une grande satisfaction ce que vous dites de la différence entre les ébranlements primitifs et dérivatifs; c'est assurément une remarque bien importante tant pour le calcul que pour la Physique, et digne de votre profond génie. Après avoir presque achevé ma théorie sur la propagation du son, je me suis bien aperçu que j'aurais pu également la tirer de la construction des cordes; cependant, comme il s'agissait de fonctions tout à fait discontinues, j'ai aimé mieux la déduire directement de mes formules générales. Une chose qui, en y pensant de nouveau, m'a paru peu exacte, c'est la supposition que je fais qu'une seule particule d'air soit ébranlée à chaque vibration du corps sonore, d'où il n'en résulte dans les particules suivantes qu'un mouvement tout à fait instantané. Je crois donc que, pour se conformer de plus à la nature, il sera mieux d'imaginer que plusieurs particules d'air soient remuées à la fois par le corps sonore, et on trouvera dans ce cas que chacune des particules suivantes recevra un mouvement qui ne sera plus instantané, mais qui s'éteindra tout à fait après un certain

(1) *Voyez* dans ce second Tome, p. 2 de la IIe Partie : *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son*, et le t. I de la présente édition.

temps; et ce temps sera le même que celui que le son mettrait à parcourir la longueur de l'espace par lequel on suppose que les particules soient agitées dans le premier ébranlement. Or, le son parcourant à peu près 1200 pieds par seconde, et le son le plus aigu ne faisant qu'environ 1800 vibrations dans le même temps, il s'ensuit qu'à moins que l'étendue de la première onde d'air, pour ainsi dire, ne surpasse la longueur de deux tiers d'un pied, ce qui n'est nullement probable, chaque particule sera réduite au repos avant qu'elle puisse recevoir une seconde secousse. Ainsi, tout se passera de même comme dans l'hypothèse des ébranlements instantanés, et les lois de la propagation et de la réflexion du son demeureront aussi les mêmes. Je suis parfaitement d'accord avec vous, monsieur, que les vraies lois de la propagation du son dépendent de la considération d'une triple dimension dans l'air, et c'est de là qu'on doit aussi tirer la théorie de la diminution du son; car, en ne regardant qu'une ligne physique, il est tout naturel, et le calcul le montre aussi, que la force du son ne doit souffrir d'elle-même aucune diminution. Je doute que la proportion connue de la diminution en raison inverse des carrés des distances soit assez exacte, mais ce n'est que par un calcul tout à fait rigoureux qu'on pourra s'en assurer.

J'aurai l'honneur de vous parler une autre fois de ce que j'ai trouvé de nouveau touchant les isopérimètres, et l'application du principe de la moindre quantité d'action. Je suis ravi que vous continuiez à enrichir la république des Lettres par de nouveaux Ouvrages très importants, tels que le *Calcul différentiel et intégral*, et le troisième Tome de la *Mécanique*. Je tâcherai de les acquérir par la voie de Genève ou de Paris, s'il m'est possible. J'ai aussi composé moi-même des éléments de Mécanique et de Calcul différentiel et intégral à l'usage de mes écoliers, et je crois avoir développé la vraie métaphysique de leurs principes, autant qu'il est possible. Je vous supplie de faire agréer mes compliments et mes services à votre savant fils Albert [1] que je

[1] Jean-Albert, fils aîné d'Euler, né le 27 novembre 1734 à Pétersbourg, où il est mort le 6 septembre 1800.

vois marcher sur vos illustres traces, et je suis avec la plus parfaite considération

Votre très humble et très obéissant serviteur,

LOUIS DE LA GRANGE.

A monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

13.

LAGRANGE A EULER.

Turin, 26 décembre 1759 (1).

MONSIEUR,

Dans la dernière Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire vous m'avez proposé à résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + c\frac{\partial z}{Z\,\partial Z} - c\frac{z}{Z^2}$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + c\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{z}{Z}\right),$$

qui renferme les lois de la propagation du son dans le cas que les ébranlements se répandent en forme d'ondes circulaires. Comme je n'avais pas alors tout le loisir nécessaire pour entreprendre une telle recherche, j'ai été obligé de la remettre à un autre temps; c'est pourquoi je n'en ai point du tout parlé dans la réponse que je vous fis alors, et que je me flatte que vous aurez bien reçue. Maintenant, voici les principaux résultats de mes réflexions sur ce sujet.

Ayant trouvé, quelque temps avant, le moyen de simplifier ma méthode *De chordis vibrantibus*, dans le cas de la corde uniformément épaisse, et de parvenir directement de l'équation différentielle à la construction géométrique par deux intégrations diverses; l'une en x, et l'autre en t, je crus devoir essayer si les mêmes procédés auraient

(1) *Lettres inédites*, p. 37.