$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$, et hujusmodi formulis universa hydrodynamica innititur. Utilissimum ergo erit hanc partem Calculi integralis adhuc fere intactam accuratius evolvi, cujus equidem prima fundamenta jam fecisse videor. Incipiendum autem erat a differentialibus primi gradus, ut functio z binarum variabilium t et s definiatur ex data quacumque relatione inter z et has formulas $\frac{\partial z}{\partial t}$ et $\frac{\partial z}{\partial s}$, per differentiationem inde derivatas. Ex quo perspicuum est fere omnia quæ adhuc de integrandi methodo sunt prolata, etiam si binarum variabilium mentio fiat, ad primam tamen partem referri debere, quia altera ut functio alterius tractatur. Alio forte tempore plura de his commemorare continget. Vale ac fave

Tibi addictissimo,

L. Eulero.

Privatam adhuc Societatem litterarum taurinensem mox publicam fieri in augmentum Scientiarum magnopere opto.

Adresse :

A monsieur Durade, intendant des postes de S. M. le Roy de Sardaigne, pour la remettre à M. Louis de la Grange, à Turin, par la voye de M. Caroli, directeur général des postes pour tous les états du Roy de Sardaigne, à Genève.

11.

EULER A LAGRANGE.

Berlin, ce 23 octobre 1759 (1).

Monsieur,

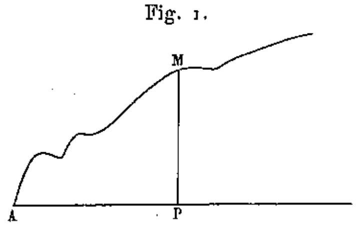
Ayant reçu l'excellent présent que vous avez eu la bonté de m'envoyer (2), je l'ai d'abord parcouru avec la plus grande avidité, et je n'ai

(1) Ms. t. IV, fº 11. — *Opera postuma*, t. II, p. 559.

(2) C'est le volume des *Miscellanea* dont il a été question plus haut et qui, entre autres, contient de Lagrange : *Recherches sur la nature et la propagation du son.*

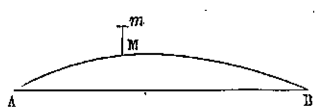
pu assez admirer votre adresse, dont vous maniez les plus difficiles équations, pour déterminer le mouvement des cordes et la propagation du son. Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toutes chicanes et c'est après vos profonds calculs que tout le monde doit à présent reconnaître l'usage des fonctions irrégulières et discontinues dans la solution de ce genre de problèmes. En effet, la chose me paraît à présent si claire, qu'il n'y saurait rester le moindre doute. Supposons qu'il faille chercher une telle fonction z des deux variables t et x, qu'il soit $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}$, et il est évident, que toute fonction de $t + x$ tant irrégulière que régulière peut être mise pour z : par exemple, ayant tracé à plaisir une ligne quelconque AM (*fig.* 1), si l'on

Fig. 1.



prend l'objectif AP $= t + x$, l'appliquée PM fournira une valeur pour z, et il en est de même du problème des cordes. A cette occasion, j'ai observé que ma solution n'est pas assez générale : car qu'on puisse donner à la corde au commencement une figure quelconque AMB (*fig.* 2) ma solution exige que dans cet état il n'y ait point de mou-

Fig. 2.



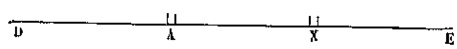
vement, mais à présent je puis résoudre le problème lorsqu'on a donné à la corde non seulement une figure quelconque AMB, mais qu'outre cela on ait imprimé à chaque point M une vitesse quelconque Mm. Je vois que vous avez traité ce cas lorsque la corde, au commencement, est tendue en ligne droite AB, mais je ne sais pas bien si votre solution s'étend aussi au cas où l'on suppose à la corde, outre le mouvement donné, une figure quelconque.

Je passe à la propagation du son, dont je n'ai jamais pu venir à bout, quelques efforts que je me sois donnés, car ce que j'en avais donné dans ma jeunesse était fondé sur quelque idée illusoire, pour mettre d'accord la théorie avec l'expérience sur la vitesse du son. J'ai donc lu votre Mémoire sur cette matière avec la plus vive satisfaction, et je [ne] puis assez admirer votre sagacité en surmontant tous les obstacles. A présent, je vois bien qu'on pourrait tirer la même solution de la formule

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

en faisant usage des fonctions discontinues; mais alors M. d'Alembert me ferait les mêmes objections que contre le mouvement des cordes : ce n'est qu'après vos recherches que je pourrai faire valoir cette méthode. J'ai résolu par là le cas où l'on suppose au commencement non seulement un déplacement quelconque à autant de molécules d'air qu'on veut, mais en donnant, outre cela, à chacune un mouvement quelconque, tout comme dans les cordes, mais en ne regardant qu'une ligne physique d'air, ou bien un tuyau mince et droit, rempli d'air, comme vous avez fait. Cette généralisation me paraît d'autant plus utile qu'elle nous découvre plus clairement le mouvement dont toutes les particules d'air sont successivement ébranlées : on en peut aussi répondre à un doute bien important, qui m'a longtemps tourmenté, c'est qu'un ébranlement excité en A (*fig.* 3) se répand également des

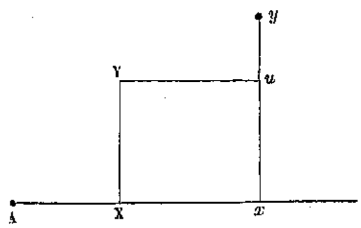
Fig. 3.



deux côtés du point A, mais étant parvenu en X, il ne se répand que vers E, on demande donc quelle différence il y a entre un ébranlement primitif en A et un dérivatif en X, pour que celui-là se répande vers D et E et celui-ci uniquement vers E. Ce doute est levé par la susdite solution générale, par laquelle on verra que le déplacement primitif des particules en A, avec le mouvement imprimé à chacune, pourrait être tel, que la propagation ne se fît que dans le sens E, et on s'apercevra ensuite que cette circonstance a toujours lieu dans les ébranlements dérivés. Il est bien remarquable que la propagation du son se fait actuellement plus vite que le calcul marque, et je renonce à présent à la pensée que j'eus autrefois, que les ébranlements suivants pourraient accélérer la propagation des précédents, de sorte que plus un son serait aigu, plus serait grande sa vitesse, comme vous aurez peut-être vu dans nos derniers Mémoires. Il m'est aussi venu dans l'esprit, si la grandeur des ébranlements n'y pourrait causer quelque accélération, puisque dans le calcul on les a supposés infiniment petits, et il est évident que la grandeur changerait le calcul et le rendrait intraitable. Mais autant que j'y puis entrevoir, il me semble que cette circonstance diminuerait plutôt la vitesse.

C'est dommage que ce même problème ne peut pas être résolu en donnant à l'air trois dimensions, ou seulement deux, car on a lieu de douter si la propagation serait alors la même. Au moins est-il certain que les ébranlements seraient alors d'autant plus faibles, plus ils s'écarteraient de leur origine. J'ai bien trouvé les formules fondamentales pour le cas où l'étendue de l'air n'a que deux dimensions, ou est contenue entre deux plans. Soit Y (*fig.* 4) une particule d'air dans l'état d'équilibre, qui après quelque agitation ait été transportée en y.

Fig. 4.



Posons $AX = X$, $XY = Y$; $Xx = Yu = x$ et $uy = y$. Cela posé, tant x que y seront certaines fonctions de XY et du temps t, et partant de trois variables, et je trouve pour leurs déterminations les deux équations suivantes :

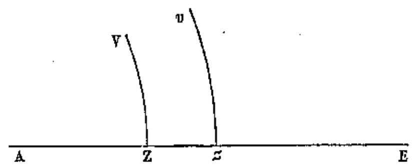
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y}$$

et

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} + \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial X \partial Y}.$$

De là, si je suppose que l'ébranlement primitif soit fait en A (*fig.* 5) et qu'il se répande de là, en forme des ondes circulaires, de sorte qu'un

Fig. 5.



arc ZV (dans l'état d'équilibre) ait été après l'agitation transporté en zv, posant $AZ = Z$ et $Zz = z$, la quantité z sera une certaine fonction des deux variables t et Z pour la détermination de laquelle je trouve cette équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial Z^2} + \frac{\alpha}{Z} \frac{\partial z}{\partial Z} - \frac{\alpha z}{Z^2}.$$

En rejetant ces deux derniers termes, il reste la même équation, qui convient au cas où l'air est étendu uniquement en ligne droite AE. Or de cette équation, il ne paraît pas que la propagation se fasse avec la même vitesse dans les deux cas. Il serait donc fort à souhaiter que l'analyse fût portée au point de pouvoir résoudre ces sortes d'équations, et j'espère que cette gloire vous est réservée. Ce que vous dites des échos est aussi important dans l'Analyse que dans la Physique, et tout le monde doit convenir que ce premier Volume de vos travaux est un vrai chef-d'œuvre, et renferme bien plus de profondeur que tant d'autres Volumes des Académies établies et jamais société particulière n'a plus mérité d'être soutenue par son souverain.

Pour les sons de Musique, je suis parfaitement de votre avis, Monsieur, que les sons consonnants que M. Rameau prétend entendre d'une même corde (1) viennent des autres corps ébranlés : et je ne vois pas pourquoi ce phénomène doit être regardé comme le principe de la Musique plutôt que les proportions véritables qui en sont le fondement. Je crois encore avoir bien déterminé le degré d'agrément avec lequel on entend deux sons donnés, et de là deux sons en raison 8:9 s'aperçoivent (2) plus aisément que s'ils étaient en raison 7:8. Mais je crois qu'ici il faut avoir égard à un préjugé, par lequel on suppose d'avance la proportion des sons, et alors une aberration est insupportable. Comme celui qui accorde un violon, si deux cordes se trouvent dans l'intervalle d'une sixte, il les juge fausses, puisqu'il prétend que leur intervalle soit une quinte. Ainsi, pour l'intervalle 7:8, il sera fort difficile de prendre cet intervalle tel qu'il est; on s'imaginera toujours qu'il devrait être celui de 8 à 9, étant mal accordé. Il ne s'agit que de prévenir ce préjugé pour mettre en usage l'intervalle 7:8, mais il faudrait aussi pour cela des règles particulières de composition.

Je viens d'achever le IIIe Volume de ma *Mécanique*, qui roule sur le mouvement des corps solides inflexibles. J'y ai découvert des principes tout à fait nouveaux et de la dernière importance. Pour qu'un tel corps tourne librement autour d'un axe, il ne suffit pas que cet axe passe par le centre de gravité (ou plutôt par le centre d'inertie du corps); mais il faut outre cela que toutes les forces centrifuges se détruisent. Il est bien évident que, dans tous les corps, toutes les lignes qui passent par son centre d'inertie n'ont pas cette propriété. Or j'ai démontré que dans tous les corps, quelque irréguliers qu'ils soient, il y a toujours trois telles lignes perpendiculaires entre elles, que je nomme les trois axes principaux du corps, par rapport auxquels je détermine ensuite les *moments d'inertie*, et cette considération m'a mis en état de résoudre quantité de problèmes, qui m'avaient paru insolubles auparavant; comme, ayant imprimé à un corps quelconque un mouvement quelconque, de déterminer la continuation de ce mouvement, faisant

(1) *Voir* Rameau, *Génération harmonique ou Traité de Musique théorique et pratique*, Paris, 1737, in-8°, Chap. VIII, p. 105.

(2) *s'aperçoivent*, il aurait dû écrire : *se perçoivent*.

abstraction de toutes forces qui pourraient agir sur le corps. J'espère que vous aurez bien reçu ma dernière lettre; pour celle-ci je la fais passer par la main d'un ami à Genève, M. Bertrand [1], qui s'est appliqué aux Mathématiques avec un très grand succès.

J'ai l'honneur d'être, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

L. Euler.

A Monsieur de La Grange Tournier, Professeur en Mathématiques et membre de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, de Prusse à Turin.

12.

LAGRANGE À EULER.

De Turin, 24 novembre 1759 [2].

Monsieur,

Rien ne pouvait m'arriver de plus agréable que l'honneur de vos lettres, qui m'assurent de la continuation de votre précieuse amitié; j'ai été charmé surtout d'apprendre que vous ayez enfin reçu le Livre que j'avais pris la liberté de vous envoyer comme un témoignage du respectueux attachement que je conserve sans cesse pour votre illustre personne. Notre Société vous est infiniment redevable de la bonté que vous avez eue d'examiner ses travaux, et du jugement honorable que vous en portez; vos suffrages, monsieur, sont pour nous les plus flatteurs, et ce n'est que sur eux que nous croyons pouvoir justement apprécier notre Ouvrage. Le succès de cette première entreprise nous encourage à ne pas l'abandonner, et nous espérons de donner au public un semblable Volume au milieu de l'année prochaine. Nous avons d'ailleurs tout lieu de croire que le Gouvernement ne manquera pas de

(1) Louis Bertrand, géomètre, membre de l'Académie de Berlin, né à Genève le 3 octobre 1731, mort le 15 mai 1812.

(2) *Lettres inédites*, p. 29.