CORRESPONDANCE

DE

LAGRANGE AVEC EULER.

1.

LAGRANGE A EULER.

Taurini, 4[to] cal. Julii (1754?) (¹).

Cogitanti mihi persæpe, ac sedulo animo inquirenti, nunc et in differentialibus, ut in potestatibus, certus aliquis insit ordo, factum tandem est, ut in seriem a newtoniana parum discrepantem inciderim, quæ ad cujusvis gradus differentiationes æque ac integrationes possit accommodari, non secus ac illa Newtoni ad potestates, et radicalia. En itaque utrasque, primam newtonianam, alteram meam, ut si quid in ipsis inest similitudinis, totum uno oculi ictu perspiciatur :

$$(a+b)^m = a^m b^0 + m a^{m-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} a^{m-4} b^4 + \ldots,$$

$$(xy)^m = x^m y^0 + m x^{m-1} y^1 + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} y^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} x^{m-4} y^4 + \ldots.$$

Jam vero, quod ad hujusce seriei explicationem pertinet, animadver-

(¹) *Lettres inédites*, p. 5.

tendum imprimis exponentes, si positivi, gradus differentiationis, sin negativi, gradus integrationis denotare; sin autem æquales nihilo, tunc argumentum esse, quantitatem illam, cui hujusmodi additur exponens neque differentiatione, neque integratione opus habere, sed potius uti est, relinquendam; verum hæc omnia clarius exemplis aliquot perspici posse existimo. Habendum sit itaque differentiale 1^{mum} ipsius xy facto $m = 1$, series hunc indicat valorem $x^1 y^0 + x^0 y^1$, seu

$$y\,dx + x\,dy;$$

si $m = 2$, series fiet

$$x^2 y^0 + 2x^1 y^1 + x^0 y^2,$$

unde obtinebitur differentiale 2^{dum}

$$y\,d^2x + 2\,dy\,dx + x\,d^2y;$$

eodem modo, si $m = 3$, fiet differentiale 3^{tium}

$$y\,d^3x + 3\,dy\,d^2x + 3\,d^2y\,dx + x\,d^3y;$$

existente nempe etiam dx fluente; atque idem dicitur de cæteris differentiationis gradibus. Veniamus nunc ad integrationes. Quæratur integrale hujus quantitatis $y\,dx$, substituto itaque in serie dx loco x et facto $m = -1$ (quoniam integrale quod quæritur est 1^{mum}) in hanc ipsam transformabitur

$$dx^{-1}y^0 - dx^{-2}y^1 + dx^{-3}y^2 - dx^{-4}y^3 + dx^{-5}y^4 - dx^{-6}y^5 + \dots.$$

Porro $dx^{-1} = x$, dx^{-2} integrale $2^{\text{dum}}\,dx$, seu integrale 1^{mum} ipsius $x = \dfrac{x^2}{2\,dx}$, $dx^{-3} = \dfrac{x^3}{2.3\,dx^2}$, $dx^{-4} = \dfrac{x^4}{2.3.4\,dx^3}$, et generatim

$$dx^{-m} = \frac{x^m}{2.3.4\ldots m\,dx^{m-1}},$$

posito nempe semper dx constanti; hoc enim per harum quantitatum differentiationem videre est, namque

$$d\frac{x^2}{2\,dx} = x, \qquad d\frac{x^3}{2.3\,dx^2} = \frac{x^2}{2\,dx}, \qquad \dots;$$

substitutis igitur hisce valoribus in serie mox inventa, fiet integrale quæsitum, seu

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2\,dy}{2\,dx} + \frac{x^3\,d^2y}{2.3\,dx^2} - \frac{x^4\,d^3y}{2.3.4\,dx^3} + \frac{x^5\,d^4y}{2.3.4.5\,dx^4}, \ldots;$$

sed an non hæc est illa ipsa series, quam jampridem celeberrimus Leibnitius pro valore $\int y\,dx$ dedit? Verum hac methodo non hæc tantum, sed infinitæ prope mod... aliæ, in quibus, vel solum y, vel y et dy et dy^2... desint, pro ut opus fuerit, pro eadem quantitate $\int y\,dx$ poterunt inveniri; nempe loco $y\,dx$ accipiatur ejus differentialis $dy\,dx$, et substitutis in serie generali dy, loco y et dx loco x, et facto $m = -2$ (quia hic duplex requiritur integratio) ipsaque reducta habebitur

$$\int y\,dx = \frac{x^2\,dy}{2\,dx} - \frac{2\,x^3\,d^2y}{2.3\,dx^2} + \frac{3\,x^4\,d^3y}{2.3.4\,dx^3} - \frac{4\,x^5\,d^4y}{2.3.4.5\,dx^4} + \ldots.$$

Hanc autem seriem etiam verum esse ipsius $\int y\,dx$ valorem quivis potest experiri eam bis differentiando, restitui enim semper observabitur ipsam primam quantitatem $dx\,dy$, cæteris terminis se mutuo destruentibus. Vides igitur quomodo et ad altiores accommodari possit integrationes; interim tamen hoc firme tenendum loco x in serie generali semper substituendam esse aliquam quantitatem, cujus differentiale ut constans habeatur, vel saltem ipsummet differentiale constans; secus enim numquam obtineri possent valores veri quantitatum x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, ... Atque hæc quidem sunt, vir clarissime, quæ tibi hac de re nunc perscribenda judicavi; cæterum maximo meo erga te studio condonato, si hoc mihi censerim, ut ad te literas darem; ex quo enim præclarissima scripta tua, atque præstantissimum imprimis Mechanices opus (1) evolvere cœpi, ita semper in te animo affectus fui, ut nihil optatius ferme haberem, quam ut hujusce animi mei tibi per literas significandi occasionem nanciscerem; nunc vero, quoniam, hujusce novi inventi mei gratia sese mihi opportuna obtulit, ipsam certe de manibus dimittere nullo modo potui. Gratissimum porro mihi nunc

(1) *Mechanica sive motus scientia analytice exposita.* Pétersbourg, 1736, 2 vol. in-4°.

feceris, si hac de re quid sentias ejus me participem feceris, et præsertim, an, præter Mechanicam, theoriam musicam (¹), solutionem isoperimetrici problematis (²), et introductionem in infinitorum analysin (³), alia in lucem edideris; mitto enim, quæ Actis Academiæ Petropolitanæ et Berolinensis inserta reperiuntur: et præcipue eximium circa fluxum et refluxum maris calculum, hæc enim mihi fere omnia probe nota sunt. Haberem fortassis alia tibi mittenda, ac imprimis problema unum totam gnomonicam pro superficiebus quibuscunque, formulis duabus algebraicis, complectens, ex doctrina de superficiebus erutum; observationesque nonnullas circa maxima et minima, quæ in naturæ actionibus, insunt; verum ne majorem amplius molestiam, satietatemque tibi afferam epistolæ hujus meæ finem imponam. Vale.

De celeberrimo Wuolfii obitu velim me certiorem facias (⁴).

2.

LAGRANGE A EULER.

Die 12 augusti [1755] (⁵).

VIR AMPLISSIME ATQUE CELEBERRIME,

Meditanti mihi assidue, præteritis diebus, præclarissimum librum tuum de methodo maximorum et minimorum ad lineas curvas applicata (⁶), factum tandem est, ut, quod jamdudum mihi erat in deside-

(¹) *Tentamen novæ theoriæ musicæ*. Pétersbourg, 1739, in-4°.

(²) *Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis*, t. VI, année 1739 des *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*.

(³) *Introductio in Analysin infinitorum*. Lausanne, 1748, in-4°.

(⁴) Le célèbre philosophe, Jean Chrétien, baron de Wolf, qui était aussi mathématicien, né à Breslau le 24 janvier 1679, mort à Halle le 9 avril 1754. Si, comme cela est fort probable, le bruit de sa mort était fondé, la question adressée à Euler nous donne la date de cette lettre qui ne porte pas la mention de l'année.

(⁵) *Lettres inédites*, p. 9.

(⁶) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne et Genève, 1744, in-4°.