$$\frac{(ePyy+2eQy-P)^2+e(Q+2Py-eQyy)^2}{(eyy+1)^2},$$

wenn ich vor y einen numerum quemcunque rationalem annehme, als z. Ex. weil $89=\frac{9^2}{2^2}+\frac{11.5^2}{2^2}$, allwo $P=\frac{9}{2}$, $Q=\frac{5}{2}$, $e=11$, so wird posita $y=2$, der numerus primus $89=\frac{607^2+11.179^2}{90^2}$; welches vielleicht noch zu andern Anmerkungen Gelegenheit geben wird.

Goldbach.

LETTRE CLIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Développements ultérieurs. Intégration d'équations différentielles analogues à celle de Riccati. Nomination d'Euler à l'Académie de Paris et lettre du comte d'Argenson. Sommation d'une série qui se rencontre dans le tome II de la Mécanique.

Berlin d. 23. August 1755.

Es muss allerdings die reductio numeri primi $1+4f$ ad formam $PP+QQ$ pro possibili gehalten werden, ungeacht keine Regul gegeben werden kann, in jedem Fall die quadrata PP und QQ selbst zu finden, sondern die Sache auf blosses Probiren ankommt. Ich hatte aber dieses nur angeführt um zu zeigen, dass um dieses theorema zu beweisen, quod $1+4f=PP+QQ$, die Demonstration nicht aus der wirklichen Resolution hergeleitet werden könne. Nehmlich dato numero f in genere, halte ich für unmöglich die Zahlen P und Q per f zu bestimmen. Eben so verhält sich auch die Sach mit diesem theoremate, quod $1+8f=2PP+QQ$ (wenn nehmlich $1+8f$ ein numerus primus ist) dessen Demonstration unmöglich so beschaffen seyn kann, dass die valores P und Q würklich durch f ausgedrückt würden. Mein Beweis davon gründet sich auf folgende Sätze:

I. Numerus $2aa + bb$, si non est primus, alios non admittit divisores nisi qui ipsi sint formae $2pp + qq$ (posito scilicet, quod a et b sint numeri inter se primi).

II. Si $1 + 8f$ est primus, forma $a^{8f} - b^{8f}$, quicunque numeri pro a et b accipiantur, semper est divisibilis per $1 + 8f$ (dummodo neuter numerorum a et b sit per $1 + 8f$ divisibilis). Cum jam sit $a^{8f} - b^{8f} = (a^{4f} - b^{4f})(a^{4f} + b^{4f})$, alteruter factor $a^{4f} - b^{4f}$ vel $a^{4f} + b^{4f}$ per $1 + 8f$ erit divisibilis.

III. At non omnes numeri formae $a^{4f} - b^{4f}$ per $1 + 8f$ sunt divisibiles; nam si singuli hi numeri

$$2^{4f} - 1,\ 3^{4f} - 1,\ 4^{4f} - 1,\ 5^{4f} - 1, \ldots (8f)^{4f} - 1$$

per $1 + 8f$ essent divisibiles, eorum quoque differentiae tam primae quam secundae et sequentes omnes essent etiam per $1 + 8f$ divisibiles: at differentiae ultimae seu constantes sunt $2.3.4.5 \ldots 4f$, quae cum non sit per $1 + 8f$ divisibilis, sequitur etiam non omnes illos numeros per $1 + 8f$ esse divisibiles.

IV. Dantur ergo numeri pro a et b, quibus $a^{4f} - b^{4f}$ non est divisibilis per $1 + 8f$; iis ergo casibus numerus $a^{4f} + b^{4f}$ certe est per $1 + 8f$ divisibilis. At est

$$a^{4f} + b^{4f} = (a^{2f} - b^{2f})^2 + 2a^{2f}b^{2f},$$

ideoque numerus formae $PP + 2QQ$, qui cum sit per $1 + 8f$ divisibilis, necesse est per (I), ut divisor $1 + 8f$ ipse sit numerus ejusdem formae $PP + 2QQ$.

Wenn man einen einigen casum gefunden, quo formula $xx + eyy$ fit aequalis dato numero N, so können daraus infiniti alii in fractis scilicet gefunden werden. Als wenn

$aa + ebb = N$, ponatur $x = a + pz$ et $y = b - qz$, fietque $aa + 2apz + ppzz + ebb - 2ebqz + eqqzz = N$; at $aa + ebb = N$, ergo $2apz + ppzz - 2ebqz + eqqzz = 0$, unde fit $z = \frac{2ebq - 2ap}{pp + eqq}$. Ergo sumendo pro p et q numeros quoscunque, erit $x = \frac{eaqq + 2ebpq - app}{pp + eqq}$ et $y = \frac{bpp - ebqq + 2apq}{pp + eqq}$. Wenn aber e ein numerus negativus, so können aus einem einigen casu $aa - ebb = N$, in integris invento, infiniti alii etiam in integris gefunden werden, welches ich also kürzlich zeige:

Theorema. Si fuerit $aa - ebb = N$, tum infiniti casus in numeris integris x et y assignari possunt, quibus fiat $xx - eyy = N$ (dummodo e non sit numerus quadratus).

Demonstratio. Quicunque sit numerus e, dum non quadratus, semper assignari possunt numeri p et q, ut sit $pp - eqq = 1$ seu $pp = eqq + 1$. Cum jam sit per hypothesin $aa - ebb = N$, erit quoque $(aa - ebb)(pp - eqq) = N$. At est $(aa - ebb)(pp - eqq) =$

$$aapp - ebbpp - eaaqq + eebbqq =$$
$$(ap \pm ebq)^2 - e(bp \pm aq)^2.$$

Capiatur ergo $x = ap \pm ebq$ et $y = bp \pm aq$, erit

$$xx - eyy = N.$$

Jam quemadmodum ex primo casu $x = a$ et $y = b$, hinc duo adeo novi sunt inventi, ex his simili modo porro novi, ex iisque deinceps alii in infinitum elici poterunt. Q. E. D.

Die ganze Sache kommt also darauf an, dass pro quovis numero e die Zahlen p und q angegeben werden, ut sit $pp = eqq + 1$, welches in numeris integris allzeit geschehen kann, wie schon Pell und Fermat gezeiget. Dazu kann beygesetzte Tabelle dienen.

Ut sit $pp = eqq + 1$

si sit	erit	et
$e=2$	$q=2$	$p=3$
$e=3$	$q=1$	$p=2$
$e=5$	$q=4$	$p=9$
$e=6$	$q=2$	$p=5$
$e=7$	$q=3$	$p=8$
$e=8$	$q=1$	$p=3$
$e=10$	$q=6$	$p=19$
$e=11$	$q=3$	$p=10$
$e=12$	$q=2$	$p=7$
$e=13$	$q=180$	$p=694$
etc.		

Diese Tabelle enthält die kleinsten Werthe für p et q, welche durch die sogenannte Pellianische Methode gefunden werden. Diese Methode ist aber ziemlich beschwerlich, wenn die Zahlen für p und q, wie bey dem casu $e=13$ geschieht, gross werden, und ich habe Mittel gefunden dieselbe sehr abzukürzen. Denn es geschieht in einigen Fällen, dass die kleinsten Zahlen p und q ungeheuer gross werden, als wenn $e=61$, so ist $q=226153980$ und $p=1766319049$; — wenn $e=109$, so ist $q=15140424455100$ und

$$p = 158070671986249.$$

Ew. haben vormals auch solche Zahlen $\square + \triangle$ oder $\square + 2\triangle$ in Betrachtung gezogen, und neulich haben mich dieselben auf curieuse theoremata exclusiva geleitet. Als

I. Cum non omnes numeri sint aggregata ex quadrato et trigonali, seu formae $\square + \triangle$, dantur infiniti numeri in hac

forma non contenti, ejusmodi numerus si fuerit n, tum numerus $8n+1$ certe non est primus.

II. Infiniti dantur numeri in forma $\square + 2\triangle$ non contenti. Sit n hujusmodi numerus, et $4n+1$ certe non erit numerus primus.

Letztens bin ich ungefähr auf dieses problema gefallen:

Invenire aequationem cubicam $x^3 - Axx + Bx - C = 0$, quae habeat omnes suas radices rationales, et in qua coëfficientes A, B, C sint numeri quadrati. Vel si p, q, r sint ejus radices, eas ita comparatas esse oportet, ut primo $p+q+r$, secundo $pq+pr+qr$ et tertio pqr sint numeri quadrati.

Ich halte dieses problema um so viel schwerer, da ich glaube, dass für p, q, r nicht wohl kleinere Zahlen gefunden werden können, als diese: $p = 252782198228$, $q = 1633780814400$, $r = 3474741058973$.

Ich habe neulich wieder einige Untersuchungen über solche Differentialaequationen, dergleichen die Riccatiana ist, angestellt, welche sich nur in gewissen Fällen integriren lassen. Wenn nun für i ein numerus integer quicunque angenommen wird, so sind folgende aequationes immer integrabel:

I. $dy + yydx = aax^{2n-2}dx + ((2i+1)n \pm 1)ax^{n-2}dx.$

II. $dy + yydx = \frac{(in \pm 1)(in + n \pm 1)\,abx^{n-2}dx}{(a-bx^n)^2}$, vel haec aequatio $dy + yydx = \frac{mabx^{n-2}dx}{(a-bx^n)^2}$ toties est integrabilis, quoties fuerit $n = \frac{\sqrt{(1+4i(i+1)m)} \pm (2i+1)}{2i(i+1)}$. Ita si $i=2$, $m=3$ erit $n = \frac{\sqrt{73}+5}{12}$; unde integrabilis haec aequatio

$$dy + yy\,dx = \frac{3abx^{\frac{\sqrt{73}-19}{12}}\,dx}{\left(a - bx^{\frac{\sqrt{73}+5}{12}}\right)^2}.$$

Porro sit $n = 2$, et $i = 2$, integrabilis erit haec aequatio (ponendo $a = 1$, $b = 1$) $dy + yy\,dx = \frac{15\,dx}{(1-xx)^2}$, est vero integrale $y = \frac{15x + 14x^3 - 2x^5}{(1-xx)(1+6xx+2x^4)}$.

III. $dy + yy\,dx = \frac{in\,(in \pm 1)\,bx^{n-2}\,dx}{a + bx^n}$;

IV. $dy + yy\,dx = \frac{in\,(in \pm 1)\,a\,dx}{xx\,(a + bx^n)}$;

V. Haec aequatio

$$dy + yy\,dx = \frac{\lambda(\lambda-1)\,aa - \mu abx^n + \nu(\nu-1)\,bbx^{2n}}{xx\,(a+bx^n)^2}\cdot dx,$$

semper est integrabilis quoties sumto pro i numero integro quocunque fuerit

$$\mu = i(i+1)\,nn - (2i+1)\,n\,(\lambda - \nu) + \lambda + \nu - 2\lambda\nu.$$

So viel ich weiss, geniesst hier Niemand die Postfreyheit und so lang ich hier bin, hat mich meine Correspondenz jährlich wohl 200 Rthlr. gekostet. Ich gebe aber für keine Briefe das Postgeld mit grösseren Freuden aus, als diejenigen, welche von Ew. zu erhalten die Ehre habe, und wünschte, dass, wofern solches ohne Dero Unbequemlichkeit geschehen könnte, ich dieses Vergnügens öfters theilhaftig werden könnte.

Jüngsthin hat mir die Königl. Pariser Akademie die Ehre gethan mich unter ihre auswärtige Mitglieder aufzunehmen. Der H. Graf v. Argenson hat mir diese Nachricht selbst in einem Schreiben gemeldet, wovon ich die Freyheit nehme Ew. eine Copie beyzulegen. Euler.

Copie de la lettre du Marquis d'Argenson.

A Monsieur Euler, Directeur de la classe des mathématiques de l'Académie de Berlin.

Le Roy vient de vous choisir, Monsieur, d'après le voeu de Son Académie royale des sciences, pour remplir une place d'associé étranger dans cette Académie, et comme elle a nommé en même tems Milord Macclesfield, Président de la Société royale de Londres, pour remplir une pareille place qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a décidé que la première place de cette espèce, qui vaquera, ne sera pas remplie. L'extrême rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop marquée, pour ne pas vous en faire l'observation et vous assûrer de toute la part que j'y prends. L'Académie désiroit vivement de vous voir associé à ses travaux et Sa Majesté n'a pu qu'adopter un témoignage d'estime que vous méritez à si juste titre. Soyez persuadé, Monsieur, qu'on ne peut vous être plus parfaitement dévoué que je le suis.

Mis D'Argenson.

P. S. In meiner Mechanica Tom. II. pag. 405 kommt diese series vor:

$$1 - \frac{n}{3} + \frac{n(n-2)}{3.5} - \frac{n(n-2)(n-4)}{3.5.7} + \frac{n(n-2)(n-4)(n-6)}{3.5.7.9} - \text{etc.}$$

deren Summ dort gegeben wird $= \frac{1}{n+1}$. Ich kann mich nicht mehr recht erinnern, wie ich damals auf diese Summ gekommen, glaube aber, dass damals mehrmals darüber mit Ew. zu conferiren die Ehre gehabt habe.