Bey Fermat findet sich noch ein sehr schönes theorema, dessen Demonstration er sagt gefunden zu haben. Nehmlich bey Anlass der Diophantaeischen Aufgabe, zwey quadrata zu finden, deren Summ ein Quadrat ist, sagt er, dass es unmöglich sey zwey cubos zu finden, deren Summ ein cubus sey, und zwey biquadrata, deren Summ ein biquadratum, und generaliter, dass diese Formul $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wenn $n > 2$. Ich habe nun wohl Demonstrationen gefunden dass $a^3 + b^3 \mp c^3$ und $a^4 + b^4 \mp c^4$, wo $\mp$ unmöglich gleich bedeutet. Aber die Demonstrationen für diese zwey casus sind so von einander unterschieden, dass ich keine Möglichkeit sehe, daraus eine allgemeine Demonstration für $a^n + b^n \mp c^n$ si $n > 2$ herzuleiten. Doch sieht man quasi per transennam ziemlich deutlich, dass je grösser n ist, je unmöglicher die Formul seyn müsse. Inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, dass summa duarum potestatum quintarum keine potestas quinta seyn könne. Dieser Beweis beruhet allem Ansehn nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn. Da aber diese Aequation $aa + bb = cc$ möglich ist, so ist auch diese möglich $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$, woraus zu folgen scheint, dass auch diese $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ möglich ist, doch habe ich bisher noch keinen Fall davon ausfindig machen können. Es können aber fünf biquadrata angegeben werden, deren Summ ein Biquadrat ist.

Euler.

LETTRE CLVI

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Décomposition des nombres premiers en quarrés. Suite.

St. Petersburg d. 26. April 1755.

Wenn ich mich nicht irre, ist mein letztes Schreiben an Ew. vom 28 Junii st. n. 1753 gewesen, und folglich eine geraume Zeit verflossen, darin mir nichts beygefallen, das ich Deroselben zu communiciren werth gehalten hätte, ohngeachtet ich die Proprietät, dass ein numerus primus hujus formae $1 + 4ef$ zu dieser $PP + eQQ$, allwo P et Q rationales sind, gebracht werden kann, öfters consideriret und auf unterschiedene Formen reduciret habe, als z. Ex. wenn $1 + 4ef = RR + 2abe\,SS$, so kann solcher numerus primus allezeit in $PP + eQQ$ verwandelt werden; oder auch wenn zwey numeri irrationales h et m gefunden werden können, so dass $h - m$ und hm rationales seyen und $h =$

$\frac{\sqrt{(4f-mm)}}{\sqrt{(emm+1)}}$, können gleichfalls die numeri quaesiti P et Q in rationalibus angegeben werden; imgleichen wenn $QQ = 4fvv + 2mv - emm$ gefunden werden kann, so wird $1 + 4ef = \frac{(4fv+m)^2 - 4fQQ}{mm} = \frac{(emm-v)^2 + eQQ}{vv}$, und endlich, weil der numerus primus $1 + 4ef =$ ist duobus quadratis $aa + bb$, quae in quocunque casu determinari possunt, so ist genug, wenn man nur einen numerum rationalem k finden kann hac lege, ut $aa(e+kk) + bb(e-kk)$ fiat quadratus, da es alsdann nicht schwer ist die numeros quaesitos P et Q zu finden, denn es wird

$$aa + bb = \frac{(hh+1)^2 aa}{4hh} + \frac{ekk(hh-1)^2 aa}{hh(e-kk)^2}$$

si sumatur

$$h = \frac{b(e-kk) \pm \sqrt{(aa(e+kk)^2 + bb(e-kk)^2)}}{a(e+kk)}.$$

Ferner ist auch diese Proprietät merkwürdig, ungeachtet ich mich um deren Demonstration nicht bemühet: Si quadratum aliquod divisum per numerum primum p hujus formae $4n+1$, relinquat numerum r, dabitur etiam aliud quadratum, quod divisum per eundem numerum p, det residuum $p - r$.

Imgleichen numerus primus $4n+1$, dividens numeros quadratos quoscunque, tot relinquere potest diversa residua quot $2n$ continet unitates, als z. Ex. wenn $n = 1$, so kann der divisor 5 nur zwey residua nachlassen, nehmlich 1 und 4; wenn $n = 3$, so lässet der divisor 13, dividens quadratos, sex residua, nehmlich 1, 3, 4, 9, 10, 12, et ita reliqui.

Goldbach.

LETTRE CLVII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 17. Mai 1755.

Ew. Betrachtungen über das theorema, dass die Zahl $1 + 4ef$, so oft sie ein numerus primus ist, immer in dieser Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sey, habe ich mit dem grössten Vergnügen zu ergründen gesucht und darin sehr wichtige Kunstgriffe wahrgenommen; nur ist es schad, dass dieselben noch so weit von einer vollständigen Demonstration entfernt sind. Doch ist es schon von keinem geringen Nutzen, dass, da man von der Wahrheit des theorematis versichert ist, auch alle die daraus hergeleiteten Formuln gewiss resolvirt werden können, welches sonsten sehr schwer fallen würde. Aus allen Bemühungen, die ich hierüber angewandt, deucht mich so viel sicher schliessen zu können, dass man niemals