

LETTRE CLV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Lettre d'un Officier de la flotte russe. Lettre de Frédéric II. à Euler. Observations sur les problèmes et théorèmes de la lettre précédente. Théorème de Fermat.

Berlin d. 4. August 1755.

Die verlangten exemplaria von der Lettre d'un Officier de la flotte russe sind schon vor einigen Posttagen von hier weggeschickt worden, und werden also verhoffentlich schon bey Ew. eingelaufen seyn. Gedachte Schrift ist mir auf ordre des Hn. Hettmanns Hochgräfl. Excellenz zugeschickt worden, um solche hier drucken zu lassen, wovon ich auch die deutsche Uebersetzung besorget. Inzwischen können Ew. versichert seyn, dass ich hievon mit keinem Wort nach St. Petersburg Meldung thun werde, als wohin ich mit Niemand mehr correspondire, als an den Hn. Rath Schumacher, an welchen auch niemals einige Neuigkeit überschreibe. Seit der Abwesenheit unseres Hn. Präsidenten sind

auch meine Geschäfte so angewachsen, dass ich wenig Briefe mehr beantworte, weil ich nicht nur die ganze Administration der Akademie auf dem Halse habe, sondern auch alle Posttage an den Präsidenten rapportire und über alles noch unmittelbar an S. Königl. Majestät Bericht abstaten muss.

Weil ich weiss, dass Ew. auf grosser Herren Briefe aufmerksam sind, so nehme die Freyheit ein Königl. Handschreiben zu communiciren, welches ich erhalten, als ich im Frühjahr einige Pfirsiche aus dem akademischen Garten an S. Königl. Majestät überschickt hatte:

„J'ai bien reçu votre lettre du 24 de ce mois avec les „présens qui l'accompagnoient. Quelque plaisir que la „beauté et la bonté des fruits que Vous M'avez en- „voyés M'ait causé, J'en ai encore ressenti davantage „de l'attention que vous avez bien voulu Me témoigner „par-là. Je vous en remercie et Je verrai avec satis- „faction les occasions pour vous en marquer Ma recon- „noissance. A Potsdam le 26 mai 1753“.

Ew. Manier die Formel $1 + 4ef = P^2 + 4Q^2$ zu entwickeln scheint allerdings weit mehreres in ihrem Umfang einzuschliessen, woraus vielleicht gar eine bündige Demonstration herzuleiten wäre. Ich getraue mir aber kaum, bey meinen gegenwärtigen Zerstreungen, mich an diese Untersuchung zu wagen. Die Art, um die Zahl $1 + 4ef$ auf diese Form $\frac{ss + eQQ}{vv}$ zu bringen, in welchen Fällen nemlich diese Auflösung in ganzen Zahlen nicht geschehen kann, scheint mir auch alle Aufmerksamkeit zu verdienen. Ich habe gesucht dieses etwas generaler zu bewerkstelligen auf folgende Art:

Es sey $1 + 4ef = \frac{SS + eQQ}{\nu\nu}$; weil nun daher

$$\nu\nu - SS = eQQ - 4ef\nu\nu = e(QQ - 4f\nu\nu),$$

so sehe ich, dass $\nu\nu - SS$ durch e theilbar seyn muss. Es sey daher $S = ne - \nu$, so wird $2nev - nnee = e(QQ - 4f\nu\nu)$ oder $Q^2Q - 4f\nu\nu + enn - 2n\nu = 0$ und mit $4f$ multiplicirt $16ff\nu\nu + 8nfv + nn = 4efnn + 4fQQ + nn$, woraus man erhält $n + 4fv = \sqrt{(1 + 4ef)nn + 4fQQ}$. Die ganze Sach kommt also darauf an, dass man in einem jeglichen Fall, da die Zahlen e und f gegeben sind, solche Zahlen für n und Q suche, dass $(1 + 4ef)nn + 4fQQ$ ein Quadrat werde.

Will man sich mit Probiren behelfen, so wird es nicht schwer fallen in jeglichem Fall, wofern nur die Zahlen e und f nicht gar zu gross sind, n und Q zu finden; allein wenn e und f grosse Zahlen sind, so wird man mit dem Probiren schwerlich zurecht kommen. Eine sichere Methode aber scheint mir kaum möglich zu seyn, weil es Fälle gibt, da die Auflösung gar nicht einmal Statt findet, nemlich wenn $1 + 4ef$ kein numerus primus ist, und ich sehe nicht ab, wie diese Bedingung in die Methode gebracht werden könnte.

Dass dergleichen problemata sehr schwer werden können, ist aus diesem zu ermesen, wenn eine ganze Zahl x gesucht wird, dass $nxx + 1$ ein Quadrat werde, wenn nemlich n ein numerus integer positivus non quadratus ist. Wenn z. Ex. $61xx + 1$ ein Quadrat werden soll, so ist die kleinste ganze Zahl für x , wodurch dieses erhalten wird, $x = 226153980$. Wie sollte nun diese erstaunliche Zahl durch Probiren gefunden werden können.

Soll aber $109xx + 1$ ein Quadrat werden, so ist die kleinste Zahl $x = 15140424455100$ und die Wurzel des daher entstehenden Quadrats $\sqrt{(109xx + 1)} = 158070671986249$. Diese grossen Zahlen habe ich vermittelst einer gewissen Methode neulich in etlichen Minuten gefunden.

Wie unendlich viel summae duorum quadratorum $aa + bb$ gefunden werden können, welche zugleich in dieser Form $\nu\nu + ezz$ enthalten sind, habe ich aus Anlass der mir von Ew. gütigst communicirten gebrochenen Formeln, noch diese in ganzen Zahlen gefunden. Es ist nemlich

$$(eqq - yy + rrr)^2 + 4rrryy = (eqq - yy - rrr)^2 + e.4qqrr.$$

Noch generaler kann ich auch solche Zahlen geben, welche zugleich in dieser Form $aa + mbb$ und dieser $\nu\nu + nzz$ enthalten sind; nemlich es ist

$$(nyy - mxx + uu)^2 + m.4uuuxx = (nyy - mxx - uu)^2 + n.4uuyy.$$

Bey der schönen serie, welche Ew. für $n^{\sqrt{2}}$ gefunden, ist nur schad, dass dieselbe immer divergens wird, so oft n ein numerus > 1 ist. Diesem kann aber leicht geholfen werden, wenn man für n setzt $\frac{1}{m}$, da dann m eine fractio unitate minor wird und $n^{\sqrt{2}} = \frac{1}{m^{\sqrt{2}}}$. Doch aber sind die summae

serierum $a + b + c + d + \text{etc.}$ item $b + 2c + 3d + 4e + \text{etc.}$ immer infinitae, dass also auch mit dieser Beyhülfe die practische Berechnung nicht erleichtert wird. Zu diesem Ende habe ich dieses Mittel gefunden: Man suche erst diese

$$\text{seriem } \frac{(n-1)}{1(n+1)} + \frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7} + \text{etc.} = s,$$

welche allezeit convergens ist. Hernach setze man $2s\sqrt{2} = h$, so wird

$$n^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{h}{1} + \frac{hh}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \frac{h^4}{1.2.3.4} + \frac{h^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}$$

Bey Fermat findet sich noch ein sehr schönes theorema, dessen Demonstration er sagt gefunden zu haben. Nämlich bey Anlass der Diophantaeischen Aufgabe, zwey quadrata zu finden, deren Summ ein Quadrat ist, sagt er, dass es unmöglich sey zwey cubos zu finden, deren Summ ein cubus sey, und zwey biquadrata, deren Summ ein biquadratum, und generaliter, dass diese Formul $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wenn $n > 2$. Ich habe nun wohl Demonstrationen gefunden dass $a^5 + b^5 = c^5$ und $a^4 + b^4 = c^4$, wo $=$ unmöglich gleich bedeutet. Aber die Demonstrationen für diese zwey casus sind so von einander unterschieden, dass ich keine Möglichkeit sehe, daraus eine allgemeine Demonstration für $a^n + b^n = c^n$ si $n > 2$ herzuleiten. Doch sieht man quasi per transennam ziemlich deutlich, dass je grösser n ist, je unmöglicher die Formul seyn müsse. Inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, dass summa duarum potestatum quintarum keine potestas quinta seyn könne. Dieser Beweis beruhet allem Ansehn nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn. Da aber diese Aequation $aa + bb = cc$ möglich ist, so ist auch diese möglich $a^5 + b^5 + c^5 = d^5$, woraus zu folgen scheint, dass auch diese $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ möglich ist, doch habe ich bisher noch keinen Fall davon ausfindig machen können. Es können aber fünf biquadrata angegeben werden, deren Summ ein Biquadrat ist.

Euler.

LETTRE CLVI

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Décomposition des nombres premiers en quarrés. Suite.

St. Petersburg d. 26. April 1755.

Wenn ich mich nicht irre, ist mein letztes Schreiben an Ew. vom 28 Junii st. n. 1753 gewesen, und folglich eine geraume Zeit verflossen, darin mir nichts beygefallen, das ich Deroselben zu communiciren werth gehalten hätte, ohngeachtet ich die Proprietät, dass ein numerus primus hujus formae $1 + 4ef$ zu dieser $PP + eQQ$, allwo P et Q rationales sind, gebracht werden kann, öfters consideriret und auf unterschiedene Formen reduciret habe, als z. Ex. wenn $1 + 4ef = RR + 2abe SS$, so kann solcher numerus primus allezeit in $PP + eQQ$ verwandelt werden; oder auch wenn zwey numeri irrationales h et m gefunden werden können, so dass $h - m$ und hm rationales seyen und $h =$