es memoriter hingeschrieben, von dem wahren Sinn des Mersenni abgegangen ist.

Dass keine formula algebraica lauter numeros primos geben könne, hatte ich schon in einem meiner vorigen Briefe angemerket; denn es sey z. Ex. die formula

$$x^3 + bxx + cx + e,$$

so ist offenbar, dass so oft x ein multiplus des termini absoluti e ist, so oft auch (und folglich infinitis modis) die formula einen numerum non primum geben wird, sollte aber $e = 1$ seyn, so setze ich nur $x + p$ anstatt x, alsdann wird die formula transmutiret in

$$\begin{array}{l} x^3 + 3pxx + 3ppx + p^3 \\ \quad + \; bxx + 2bpx + bpp \\ \qquad\qquad + \; cx + cp \\ \qquad\qquad\qquad + 1 \end{array}$$

und so oft x ein multiplus numeri $p^3 + bpp + cp + 1$ ist, so oft gibt die formula einen numerum non primum. Da nun dieser casus, wo die potestas maxima ipsius $x = 3$ ist, auf alle andere *lusus naturae*, quaecunque fuerit potestas ipsius x, appliciret werden kann, so ist es unmöglich eine seriem algebraicam anzugeben, in welcher nicht infiniti termini aus numeris non primis bestehen sollten.

Noch habe ein kleines ganz neues theorema beyzufügen, welches so lange vor wahr halte, donec probetur contrarium: Omnis numerus impar est = duplo quadrati + numero primo, sive $2n - 1 = 2aa + p$, ubi a denotet numerum integrum vel 0, p numerum primum, ex. gr. $17 = 2.0^2 + 17$, $21 = 2.1^2 + 19$, $27 = 2.2^2 + 19$, etc.

Goldbach.

LETTRE CLI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches numériques et autres relatives à la résolution des équations algébriques.

Berlin d. 16. December 1752.

Ich bin weit davon entfernt, dass ich die wahre Summ dieser seriei

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} \text{ etc.}$$

sollte anzeigen können. Ich habe diese Summ nur per approximationem gesucht, von deren Beschaffenheit ich mich nicht mehr erinnern kann. Meine Absicht war dabey nur, zu erforschen, ob etwan diese Summ simpel seyn möchte, weil ich schon vorher gemerket hatte, dass dieselbe beynahe $\frac{1}{3}$ ist.

Ew. theorema, quod omnis numerus impar $2n - 1$ sit aggregatum ex quadrato duplicato $2aa$ et numero primo p, hat bey mir alle Aufmerksamkeit verdienet, und nach angestellter Probe habe ich dasselbe für alle numeros $2n-1$ unter 1000 würklich wahr befunden. Kraft desselben kann man also behaupten, quod dato numero $2n-1$, semper detur duplum quadratum $2aa$, ut $2n-1-2aa$ evadat numerus primus.

Um die Demonstration davon zu finden, fiel mir ein, ob man etwan nicht beweisen könnte, dass je grösser die Zahl $2n-1$, je mehr numeri primi aus der Form $2n-1-2aa$ erwachsen müssten. Denn, da das theorema wahr ist für die kleinen Zahlen, so würde man um so viel sicherer auf die grossen Zahlen schliessen können. Ich habe demnach pro quovis numero non primo $2n-1$ bemerket, wie viel numeri primi daraus entstehen, allein ich habe befunden, dass, wenn auch $2n-1$ eine sehr grosse Zahl, doch bisweilen nur ein einziger numerus primus entspringt.

Also wenn $2n-1=785$, so wird $785-2aa$ unico casu numerus primus, nehmlich quo $a=18$. Eben dieses geschiehet auch, wenn $2n-1=1703=13.131$, und der casus ist $1703-2.21^2=821$; wenn also 821 kein numerus primus wäre, so fände hier das theorema nicht Statt. Ich habe auch hier noch viel andere und grössere Zahlen untersucht, von welchen ich vorhersahe, dass die daher entstehenden numeri primi sparsam seyn müssen; doch habe ich aber keine Ausnahme finden können. Ich glaube also dieses theorema, ungeacht ich nicht darauf schwören wollte.

Es fiel mir dabey ein ziemlich ähnliches theorema ein, nehmlich: dass a numero impari non primo $2n-1$ allzeit eine potestas binarii abgezogen werden könne, dass der Rest ein numerus primus sey. Nach angestellter Probe hat sich dieses auch noch bis auf sehr grosse Zahlen wahr befunden; als ich aber auf $959=7.137$ kam, so fand sich eine Ausnahme, indem $959-2^a$ nullo modo primus werden kann.

Ich bin letztens auf folgende theoremata negativa gefallen.

I. Si n non est numerus formae $\square+2\triangle$, tum $4n+1$ certe non est primus.

II. Si n non est numerus formae $\square+\triangle$, tum $8n+1$ certe non est primus.

III. Si n non est numerus formae $2\triangle+\triangle$, tum $8n+3$ certe non est primus.

Der Grund der zwey letztern beruhet darauf, dass wenn $8n+1$ oder $8n+3$ primus ist, so sey derselbe auch in hac forma $2\square+\square$ enthalten; als $3=2.1+1$, $11=2.1+9$, $17=2.4+9$, $19=2.9+1$. Dieses aber kann ich nicht beweisen, ungeacht ich es für eben so gewiss halte, als dass $4n+1=\square+\square$, siquidem $4n+1$ sit primus, welches ich bewiesen habe.

Ew. bin ich für die mir gütigst ertheilten Nachrichten über den Leunenschloss gehorsamst verbunden. Ich habe mich geirrt, wenn ich geglaubt, das Buch selbst bey Ew. gesehen zu haben; es werden nur einige excerpta gewesen seyn, so Dieselben mir zu communiciren die Güte gehabt. Hier habe ich dieses Buch nicht finden können. Des Bungi Buch erinnere ich mich auch nicht gelesen zu haben; ich werde es aber auf der hiesigen Bibliothec aufsuchen. Den II tomum Novor. Comment. habe ich noch nicht bekommen, um darin nachsehen zu können, was der seel. Winsheim von den numeris perfectis geschrieben. Ich glaube, dass man keine andere numeros perfectos für gewiss angeben könne, als folgende: I. $2^0(2-1)=1$; II. $2^1(2^2-1)=6$; III. $2^2(2^3-1)=28$; IV. $2^4(2^5-1)$; V. $2^6(2^7-1)$; VI. $2^{12}(2^{13}-1)$; VII. $2^{16}(2^{17}-1)$; VIII. $2^{18}(2^{19}-1)$.

weil man von den folgenden Formuln $2^p - 1$ (existente p primo) nicht gewiss seyn kann, ob dieselben primi sind, oder nicht. Der folgende wäre $2^{30}(2^{31}-1)$, wenn nur $2^{31}-1$ ein numerus primus wäre, welches aber weder behauptet noch untersuchet werden kann. So viel ist gewiss, dass diese Zahl $2^{31}-1$ keine andere divisores haben kann, als welche in dieser Formul $62n+1$ enthalten sind, woraus ich so viel gefunden, dass kein divisor unter 2000 Statt findet.

Aus Anlass der aequationum Moivreanarum habe ich noch viel ähnliche formulas gefunden, deren radix angegeben werden kann, ungeacht die Aequation keine divisores rationales hat.

Als von dieser Aequation $x^5 = 5\alpha xx + 5\beta x + \frac{\beta\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}$ ist radix $x = \sqrt[5]{\frac{\beta\beta}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}$. Also von dieser $x^5 = 10xx + 10x + 6$ ist radix $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Ferner von dieser aequatione 6^{ti} gradus

$$x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18xx - 12x + 2$$

ist $x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. Diese casus scheinen um so viel mehr merkwürdig zu seyn, weil diese Aequationen nicht in factores (rationales) zergliedert werden können.

Hernach habe ich auch wahrgenommen, wenn eine solche Formul vorgegeben wird

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4},$$

welche von den signis radicalibus befreyt werden soll, solches geschehen könne, ohne dass man nöthig hat über die fünfte Potestät des x herauf zu steigen. Dieses scheint deswegen paradox zu seyn, da vier signa radicalia und das

surde solida vorhanden, welche durch eine einige Elevation ad 5^{tam} dignitatem nicht gehoben werden können. Doch kommt nun diese aequatio rationalis 5^{ti} gradus heraus:

$$\begin{aligned} x^5 = 55(AD+BC)x^3 &+ \left.\begin{matrix} 5As(AC+BB) \\ +\,5Dss(CC+BD) \end{matrix}\right\} xx + \left.\begin{matrix} +\,5A^3Bs \\ +\,5ss(AC^3+B^3D) \\ -\,5ss(A^2D^2+B^2C^2) \\ +\,5ABCDss \\ +\,5CD^3s^3 \end{matrix}\right\} x \\ &+ A^5s + B^5s^2 + C^5s^3 + D^5s^4 \\ &- 5ACss(A^2D+B^3) \\ &+ 5ABss(ABD+AC^2) \\ &- 5BDs^3(C^3+AD^2) \\ &+ 5CD^2s^3(B^2+AC) \end{aligned}$$

also ist auch hinwiederum die radix aus dieser Aequation $x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4}$. Und da die obige Aequation general ist, so glaube ich, dass in dieser Form alle radices aequationum 5^{ti} gradus enthalten sind, und in einem jeglich vorgelegten Fall kommt es nur auf die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D und s an, und zuletzt wird s nur per aequationem 4^{ti} ordinis bestimmt werden, wie ich vermuthe. Daraus schliesse ich ferner, dass proposita aequatione quacunque

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} - \varepsilon x^{n-5} \text{ etc.} = 0$$

die radix allzeit diese Form haben werde

$$x = \frac{1}{n}\alpha + A\sqrt[n]{s} + B\sqrt[n]{s^2} + C\sqrt[n]{s^3} + D\sqrt[n]{s^4} + \text{etc.}$$

und es ist so viel gewiss, dass wenn $n=2$, oder 3, oder 4, die Bestimmung des Buchstabens s von einer aequatione 1^{mi} oder 2^{di} oder 3^{tii} ordinis dependire, woraus zu schliessen, dass in genere s durch eine aequationem $(n-1)^{ti}$ ordinis bestimmt werde.

In meinen Papieren habe ich noch ein ander theorema, so Ew. mir vormals communicirt, gefunden. Nehmlich dass ein jeder numerus impariter par $4a+2$ allzeit gleich sey einer Summ von zwey numeris primis formae $4n+1$, als $6=1+5$, $10=5+5$, $14=1+13$, $18=1+17=5+13$, $22=5+17$, $26=13+13$, $30=1+29=13+17$, $34=5+29=17+17$, wobey ich bemerke, dass nicht nur bey kleinen Zahlen keine Ausnahme vorkommt, sondern bey grössern um so viel weniger eine zu vermuthen. Denn die Zahlen, bey welchen eine solche Zergliederung nur einmal angehet, sind 2, 6, 10, 14, 22, 26, 38, 50, 62, 86 und von hier bis 150 gibt es keine mehr, auch nicht bis 230, daher auch unter den folgenden um so viel weniger zu vermuthen, indem die Anzahl der Resolutionen immer zunimmt, als 210 lässt sich auf 9 Arten resolviren.

Euler.

LETTRE CLII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

Moscau d. 12. März 1753.

Dass sich das theorema: omnem numerum imparem resolvi posse in duplum quadrati et numerum primum, bis auf die Zahl 1000 wahr befunden, auch in grössern Zahlen sich annoch keine Ausnahme geäussert, ist mir sehr lieb; jedoch muss es bishero für eine blosse conjecture passiren und hat man Ursach zu zweifeln, ob die Demonstration davon, wenn sie ja possibilis wäre, jemals gefunden werden wird.

Weil Ew. melden, dass Sie, ob a numero impari *non primo* allezeit eine potestas binarii abgezogen werden könne, so dass ein numerus primus überbleibe? hatten versuchen wollen, so schliesse ich aus der Restriction *non primo*, dass Sie es von den numeris primis falsch befunden, und

*