Ferner ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$ das integrale:

$$xx+yy+ccxxyy = 4c-4cc(x+y)+2xy-2cxy(x+y).$$

Aus solchen Formuln habe ich folgendes theorema hergeleitet (Fig. 41):

In quadrante elliptico $ACB$, si ad punctum quodvis $M$ ducatur tangens $VMT$, alteri axi $CB$ occurrens in $T$, eaque capiatur $TV = CA$, et ex $V$ ipsi $CB$ agatur parallela $VN$; itemque ex centro $C$ in tangentem perpendiculum $CP$, dico fore differentiam arcuum $BM$ et $AN$ rectificabilem, scilicet $BM - AN = MP$.

Dieses Jahr habe ich wieder den auf den Saturnum gesetzten Preis, welcher doppelt war, nemlich von 5000 ℔. allein erhalten.

Euler.



# LETTRE CXLV.

## Euler à Goldbach.

Sommaire. Développement ultérieur du théorème de géométrie précédent. Opinion de Formey sur la question de syntaxe.

Berlin d. 3. Juni 1752.

Seit dem vorigen Posttag hat mir auch M. Formey seine Meynung über die gemeldte Stelle des P. Bouhours zugeschickt, welche also Ew. nicht habe ermangeln wollen zuzustellen.

Die Eigenschaft der ellipsis, dass darin zwey arcus, deren differentia rectificabilis ist, können angegeben werden, scheinet um so viel mehr merkwürdig zu seyn, da bisher die arcus elliptici auf keinerley Art haben unter sich verglichen werden können. Seitdem habe ich aber angemerkt, dass wenn man das problema umgekehrt vorträgt und diejenige krumme Linie sucht, welcher die gedachte Eigenschaft zukommt, die Solution durch die gewöhnlichen Methoden gefunden werden kann.

*

Quaeratur scilicet (Fig. 41) curva $AMB$ hujus indolis, ut ducta in quovis puncto $M$ tangente $TMV$, axi $CB$ in $T$ occurrente, indeque sumta $TV = CA$, si ex $V$ ad axem $CA$ perpendicularis agatur $VNq$ curvam in $N$ secans, differentia arcuum $BM$ et $AN$ fiat rectificabilis, scilicet $= \frac{CQ.Cq}{b}$.

*Solutio.* Pro puncto $M$ sit abscissa $CQ = x$, arcus $BM = s$; pro puncto autem $N$ sit abscissa $Cq = X$ et arcus $BN = S$, et ob curvae continuitatem relatio inter $X$ et $S$ similis esse debet relationi inter $x$ et $s$. Ponatur totus arcus $AMB = A$, erit arcus $AN = A - S$, ideoque oportet sit

$$BM - AN = s - A + S = \frac{xX}{b};$$

hincque differentiando $ds + dS = \frac{Xdx + xdX}{b}$. Deinde quia $TV = CA = a$ est tangens curvae in $M$, erit

$$ds : dx = TV : Cq = a : X, \text{ ergo } ds = \frac{adx}{X}.$$

Cum autem puncta $M$ et $N$ sint inter se permutabilia ob curvae continuitatem, erit pari modo $dS = \frac{adX}{x}$; sicque habebitur $ds + dS = \frac{adx}{X} + \frac{adX}{x}$. At invenimus

$$ds + dS = \frac{Xdx + xdX}{b}, \text{ unde fit } \frac{adx}{X} + \frac{adX}{x} = \frac{Xdx + xdX}{b},$$

seu $ab(xdx + XdX) = Xx(Xdx + xdX)$, quae aequatio integrata dat $ab(xx + XX) = XXxx \pm c^4$, ideoque

$$XX = \frac{abxx \mp c^4}{xx - ab} = \frac{\pm c^4 - abxx}{ab - xx} \text{ et } X = \sqrt{\frac{c^4 - abxx}{ab - xx}}.$$

Consequenter

$$ds = \frac{adx}{X} = \frac{adx\sqrt{(ab - xx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Sit applicata $QM = y$, ob $dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$ erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^3b - aaxx - c^4 + abxx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$



Cum nunc constans $c$ pro lubitu accipi queat, dantur infinitae curvae problemati satisfacientes, inter quas erit curva algebraica, si $c^4 = a^3b$, quo casu fit $dy = \frac{xdx\sqrt{(ab - aa)}}{\sqrt{ab(aa - xx)}}$, et integrando $y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)}(aa - xx)$, quae est aequatio pro ellipsi, existente $CA = a$ et $CB = a\sqrt{\frac{b-a}{b}}$; hincque $b = \frac{a^3}{aa - CB^2}$. Ita vicissim ellipsis proprietas ante memorata hinc colligitur. Scilicet sumta tangente $TMV = CA$, unde punctum $N$ definitur, erit

$$BM - AN = \frac{CQ.Cq(CA^2 - CB^2)}{CA^3},$$

cujus expressionis valor reducitur ad portionem tangentis inter punctum $M$ et perpendiculum ex $C$ in eam dimissum interceptam.

Euler.

(Billet de Formey annexé à cette lettre).

La critique qui concerne le P. Bouhours ne paroît point fondée, et son expression est grammaticale, aussi bien que convenable à ce qu'il veut exprimer. *Je devois* n'aurait pas exprimé une simple convenance, mais une obligation étroite. Or ce n'est que par raison de convenance que le P. Bouhours auroit dû ne pas trop s'enfoncer dans la lecture des auteurs profanes. Et sa façon de parler suppose qu'il les lisoit bien encore, mais moins qu'auparavant. Dans le cas où il y auroit tout à fait renoncé, l'expression propre seroit: „ce que je n'aurois pas dû lire.“ Berlin ce 30 mai 1752.

Formey.

# LETTRE CXLVI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse aux deux lettres précédentes. Formules de Maupertuis pour les lois du mouvement.

Sans date (juillet 1752?)

Ew. beyde mir sehr angenehme Schreiben vom 30. Mai und 3. Juni habe ich allhie d. 10. und 14. ejusd. wohl erhalten. Was die von Ew. angeführte series betrifft, deren progressiones ich durch gewisse formulas determiniret hatte, sehe ich mit Vergnügen, dass Sie selbigen auch die terminos generales bestimmt haben. Ich erinnere mich hiebey, dass ich schon ehemals mündlich gegen Ew. erwähnet, dass alle quantitates finitae, tam rationales quam quovis modo irrationales, durch die einige seriem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. exprimiret werden könnten, und die ganze Kunst nur darauf ankommen würde, wie die Abwechselungen der signorum $+$ et $-$ zu determiniren sind. Solchergestalt ist z. Ex.



$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\text{etc.};$$

die signa $+$ und $-$ werden allhie so abgewechselt, dass in terminis, qui locis imparibus exstant, die signa alterniren, nehmlich

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}-\text{etc.}$$

in terminis vero, qui locis paribus exstant, eadem signa occurrunt, quibus dupla eorum affecta sunt; also hat der terminus $\frac{1}{8}$ das signum $+$, weil $\frac{1}{4}$ das signum $+$ hat; $\frac{1}{12}$ hat das signum $-$, weil $\frac{1}{6}$ das signum $-$ hat etc.

Was übrigens Ew. von den zwey seriebus, allwo

$$XX+bYY=(aa+b)^n,$$

imgleichen von

$$\square+\square+\square=f\square+g\square+h\square$$

melden, zeiget alles von der grossen Fertigkeit, welche Sie, für unzähligen Andern, erlanget haben, dergleichen calculos einzusehen und unendlich generaler zu machen.

Ich habe vorher nicht gewusst, auch vielleicht niemals daran gedacht, ob es möglich sey, den quadrantem ellipsis in aliquot partes aequales zu theilen. Aus demjenigen aber, was Ew. in Dero Schreiben anführen, lässt sich leicht schliessen 1. dass es zwar möglich, diesen quadrantem in zwey gleiche Theile zu theilen, wenn $PM=0$ genommen wird, aber 2. schlechterdings unmöglich sey, den quadrantem in mehrere partes aliquotas zu theilen, ohne zugleich eine partem assignabilem hujus quadrantis zu rectificiren. Denn es sey nach Ew. Figur (Fig. 41) $AN=BE$ eine pars aliquota quaecunque totius quadrantis, so wird der arcus

$$EM=BM-BE=\text{rectae } PM.$$