LETTRE CXLII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 4. December 1751.

Ew. Schwierigkeit, betreffend die Auswickelung der Formul $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$, wird sogleich gehoben, wenn man die Formul $\sqrt{(1-4a)} = (1-4a)^{\frac{1}{2}}$ nach gewöhnlicher Art in eine seriem verwandelt. Denn da

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 4a - \frac{1.1}{2.4}\cdot 4^2 a^2 - \frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot 4^3 a^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot 4^4 a^4 - \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot 4^5 a^5 - \text{etc.}$$

oder wenn ein jeder coëfficiens numericus des termini antecedentis, die potestatem von 4 mit eingeschlossen, durch P angedeutet wird, so wird

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - 2a - \frac{4}{4}Pa^2 - \frac{12}{6}Pa^3 - \frac{20}{8}Pa^4 - \frac{28}{10}Pa^5 - \text{etc.}$$

oder

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - 2a - \frac{2}{2}Pa^2 - \frac{6}{3}Pa^3 - \frac{10}{4}Pa^4 - \frac{14}{5}Pa^5 - \text{etc.}$$

folglich

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - 2a - 2\cdot\frac{2}{2}a^2 - 2\cdot\frac{2.6}{2.3}a^3 - 2\cdot\frac{2.6.10}{2.3.4}a^4 - 2\cdot\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}a^5 - \text{etc.}$$

Dahero bekommt man

$$\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa} = \frac{2}{2} + \frac{2.6}{2.3}a + \frac{2.6.10}{2.3.4}aa + \frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}a^3 + \text{etc.}$$

wobey merkwürdig ist, dass alle diese Coëfficienten ganze Zahlen werden, welches zu besondern Betrachtungen Anlass geben kann.

Also gibt auch $\sqrt[3]{(1-9a)}$ eine seriem, deren alle Coëfficienten ganze Zahlen werden, nehmlich

$$\sqrt[3]{(1-9a)} = 1 - 3a - 3\cdot\frac{6}{2}a^2 - 3\cdot\frac{6.15}{2.3}a^3 - 3\cdot\frac{6.15.24}{2.3.4}a^4 - 3\cdot\frac{6.15.24.35}{2.3.4.5}a^5 - \text{etc.}$$

und generaliter geschiehet dieses

$$\sqrt[n]{(1-nna)} = 1 - na - n\frac{(nn-n)}{2}a^2 - n\cdot\frac{(nn-n)(2nn-n)}{2.3}a^3 - n\cdot\frac{(nn-n)(2nn-n)(3nn-n)}{2.3.4}a^4 - \text{etc.}$$

Ew. casus, quo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8 =$ quatuor $\square$, nehmlich $\delta = \frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$, hat allerdings etwas Besonderes an sich, welches ich sogleich nicht bemerket, und noch jetzt nicht sehe, wie derselbe in den von mir angeführten Fällen enthalten ist. Nun sehe ich zwar, dass derselbe herauskommt, wenn von den gesuchten 4 quadratis zwey dergestalt angenommen werden: $(\delta+2)^2+(\delta-2)^2$, da dann noch übrig ist $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2$ in zwey quadrata zu resolviren. Setzt man nun dieselben $(\delta+p)^2+(\delta+q)^2$, so wird

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=3\delta\delta+2(p+q)\delta+pp+qq$$

und

$$3\delta+p+q=\sqrt{(3\alpha\alpha+3\beta\beta+3\gamma\gamma-2pp-2qq+2pq)}.$$

Es sey nun ferner $p=\gamma+m$, $q=\gamma+n$, so wird

$$3\delta+2\gamma+m+n=$$
$$\sqrt{(\gamma\gamma-2(m+n)\gamma+3\alpha\alpha+3\beta\beta-2mm-2nn+2mn)}.$$

Damit nun dieses radicale gleich werde

$$\sqrt{(\gamma\gamma-2(m+n)\gamma+(m+n)^2)},$$

oder

$$3\alpha\alpha+3\beta\beta=3mm+3nn,$$

so darf man nur setzen $m=\alpha$ und $n=\beta$, und bekommt $3\delta+2\gamma+\alpha+\beta=\pm(\gamma-\alpha-\beta)$ oder $\delta=-\left(\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}\right)$.

Wenn, um die Sach generaler zu machen, zwey von den gesuchten vier Quadraten angenommen werden

$$(q\delta+2)^2+(q\delta-2)^2=2qq\delta\delta+8,$$

so muss

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma-(2qq-1)\delta\delta=2\text{ quadr.}=(\delta+f)^2+(\delta+g)^2,$$

das ist

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=(2qq+1)\delta\delta+2(f+g)\delta+ff+gg,$$

oder

$$2(qq+1)\delta+f+g=$$
$$\sqrt{(2fg-2qq(ff+gg)+(2qq+1)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma))}.$$

Nun sey ferner $f=\frac{q\gamma+m}{2q-1}$ und $g=\frac{q\gamma+n}{2q-1}$, so kommt eine weitläufige Formul heraus, welche ich nicht der Mühe werth achte zu entwickeln, weil ich nun sehe, dass daraus Ew. zweyte Formuln nicht entspringen. Es scheint aber, dass

unendlich viel dergleichen Operationen angestellt werden können, welche immer andere Formuln hervorbringen; und deswegen können unendlich viel Relationen zwischen den Buchstaben α, β, γ, δ angegeben werden, damit

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$$

in vier quadrata resolvirt werden könne. Da nun dies ohne einige Restriction wahr ist, so sehe ich nicht, was dergleichen Determinationen zur gesuchten Demonstration beytragen könnten. Ich habe rigorosissime bewiesen, dass wenn N ein numerus integer ist, allezeit seyn müsse

$$N=A^2+B^2+C^2+D^2,$$

wo aber A, B, C, D sowohl numeros fractos als integros andeuten. Es wäre also nur noch übrig zu zeigen, dass wenn quatuor quadrata fracta eine summam integram haben, dieselbe Summ sich auch nothwendig in quatuor (vel pauciora) quadrata integra müsse zerlegen lassen. Ich kann nun wohl beweisen, dass wenn $\frac{pp}{qq}+\frac{rr}{ss}=N$ numero integro, auch seyn müsse $N=aa+bb$ in integris; allein jenen Beweis kann ich nicht auf gleiche Art bewerkstelligen.

Wenn $2ee-ff+2$ ein Quadrat seyn soll, und dazu e gesucht wird, ohne darauf zu sehen, ob e ein numerus fractus oder integer wird, so habe ich diese solutionem generalem gefunden:

$$e=\frac{(mm-2mn+2nn)f+mm-4mn+2nn}{2nn-mm},$$

wo man für m und n numeros quoscunque annehmen kann.

Will man aber nur die valores integros für e haben, damit $2ee-ff+2$ ein Quadrat werde, so dienen dazu folgende formulae in infinitum:

$$\begin{aligned} e &= f \pm 1 \\ e &= 5f \pm 7 \\ e &= 29f \pm 41 \\ e &= 169f \pm 239 \\ e &= 985f \pm 1393 \\ e &= 5741f \pm 8119 \end{aligned}$$

etc.

Die lex progressionis ist diese, dass wenn zwey dergleichen formulae se immediate insequentes sind

$$e = Mf \pm m$$
$$e = Nf \pm n$$

die folgende seyn muss

$$e = (6N - M)f \pm (6n - m).$$

Inzwischen kann man doch alle diese Formuln durch eine einige Generalformul ausdrücken: Sit q numerus impar quicunque, dico fore

$$e = \frac{(\sqrt{2}+1)^q + (\sqrt{2}-1)^q}{2\sqrt{2}} f \pm \left(\frac{(\sqrt{2}+1)^q - (\sqrt{2}-1)^q}{2}\right)$$

und es ist auch gewiss, dass alle Fälle, in welchen e durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, in diesen Formuln enthalten sind. Gleichergestalt, wenn

$$(bb \pm 1)\, ee \mp 4aaff \pm 4cc\, (bb \pm 1)$$

ein Quadrat seyn soll, so ist:

$$e = \frac{(\sqrt{(bb \pm 1)} + b)^q + (\sqrt{(bb \pm 1)} - b)^q}{\sqrt{(bb \pm 1)}} \cdot af \pm$$
$$\left(\left(\sqrt{(bb \pm 1)} + b\right)^q - \left(\sqrt{(bb \pm 1)} - b\right)^q\right) c;$$

also in diesem Fall $3ee + ff - 3 =$ quadrato, wird

$$e = \frac{(\sqrt{3}+2)^q + (\sqrt{3}-2)^q}{2\sqrt{3}} f \pm \frac{((\sqrt{3}+2)^q - (\sqrt{3}-2)^q)}{2}.$$

Euler.

LETTRE CXLIII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet. Question de syntaxe de la langue française.

St. Petersburg d. 9. Mai 1752.

Ew. Dissertation de summis divisorum, welche Sie an die hiesige Akad. der Wiss. übersandt haben, ist mir von dem Hrn. Prof. Grischow communiciret worden. Ich befinde mich jetzo nicht im Stande davon pro dignitate zu urtheilen, allein Dero bekannte Einsicht in dergleichen Sachen, lässet mich an der Richtigkeit alles dessen, was in bemeldter Dissertation enthalten ist, nicht zweifeln. Insonderheit habe ich mit Vergnügen gesehen, dass in den numeris 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, etc. eine so schöne Ordnung von Ew. bemerkt worden, und glaube gänzlich, dass es series gibt, aus deren mehr als hundert terminis consequentibus die lex progressionis, ob sie gleich an sich selbst kurz und leicht ist,