LETTRE CXXXVII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches sur la décomposition des nombres. Le célèbre joueur aux échecs Philidor. Nouveau mémoire sur Jupiter et Saturne.

Berlin d. 3. Juli 1751.

Ich beklage von Herzen, dass bey Ew. die Lust zu mathematischen Speculationen abzunehmen beginnt, woran ohne Zweifel der Mangel eines vertrauten Umgangs über dergleichen Untersuchungen grossen Antheil haben wird. Denn die mir gütigst überschriebenen Anmerkungen über das theorema Fermatianum zeigen nichts weniger, als eine Verminderung in der Kraft dergleichen Sachen nachzudenken an. Dieselben haben mir Anlass gegeben diese Bestimmung allgemeiner zu machen und den Werth von δ zu bestimmen, dass $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e$ eine summa quatuor quadratorum werde. Setze ich nun

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e=(\alpha-kx)^2+(\beta-mx)^2+(\gamma-nx)^2+(\delta+x)^2,$$

so wird

$$\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma-\tfrac{1}{2}x(kk+mm+nn+1)+\frac{e}{2x}.$$

Damit nun diese Formul in ganzen Zahlen bestehe, setze ich $e(kk+mm+nn+1)=ab$, oder ich resolvire

$$e(kk+mm+nn+1)$$

in zwey factores, die entweder beyde grad oder beyde ungrad sind, so wird

$$\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+\frac{a-b}{2}\ \text{und}\ x=\frac{e}{a}.$$

Ist nun, wie bey Ew. $e=8$, so können in genere die vier quadrata, deren Summ $=\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$, angegeben werden, wenn $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+f$, und f so angenommen wird, dass $f=c-d$, existente

$$2(kk+mm+nn+1)=cd;$$

und da wird $x=\frac{4}{c}$, oder $x=-\frac{4}{d}$.

Für k, m und n können nun Zahlen nach Belieben angenommen werden, da immer für f ein, zwei oder mehr taugliche Werthe herauskommen. Als setzt man

$$k=1,\ m=0,\ n=0,\ \text{so wird}\ cd=4\ \text{und}\ f=0,\ \text{oder}\ f=3;\ \delta=\alpha+\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}0^*\\3\end{matrix}\right.$$

$$k=2,\ m=0,\ n=0,\ \text{„}\ cd=10\ \text{„}\ f=3,\ \text{„}\ f=9;\ \delta=2\alpha+\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}3\\9\end{matrix}\right.$$

$$k=3,\ m=0,\ n=0,\ \text{„}\ cd=20\ \text{„}\ f=1, f=8, f=19;\ \delta=3\alpha+\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}1\\8^*\\19\end{matrix}\right.$$

$$k=1,\ m=1,\ n=0,\ \text{„}\ cd=6\ \text{„}\ f=1, f=5;\quad \delta=\alpha+\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$$

$$k=2,\ m=1,\ n=0,\ \text{„}\ cd=12\ \text{„}\ f=1, f=4, f=11;\ \delta=2\alpha+\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}1\\4\\11\end{matrix}\right.$$

$$k=2,\ m=2,\ n=0,\ \text{„}\ cd=18\ \text{„}\ f=3,\ 7,\ 17;\ \delta=2\alpha+2\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}3^*\\7\\17\end{matrix}\right.$$

$$k=3,\ m=1,\ n=0,\ \text{„}\ cd=22\ \text{„}\ f=9,\ 21;\quad \delta=3\alpha+\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}9\\21\end{matrix}\right.$$

$$k=3,\ m=2,\ n=0,\ \text{„}\ cd=28\ \text{„}\ f=3,\ 12,\ 27;\ \delta=3\alpha+2\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}3\\12\\27\end{matrix}\right.$$

$k=3, m=3, n=0$, so wird $cd=38$ und $f=17, 37$; $\quad \delta=3\alpha+3\beta+\ldots\ldots \begin{cases} 17 \\ 37 \end{cases}$

$k=1, m=1, n=1$, „ $cd=8$ „ $f=2, 7$; $\quad \delta=\alpha+\beta+\gamma+\begin{cases} 2* \\ 7* \end{cases}$

$k=2, m=1, n=1$, „ $cd=14$ „ $f=5, 13$; $\quad \delta=2\alpha+\beta+\gamma+\begin{cases} 5 \\ 13 \end{cases}$

$k=2, m=2, n=1$, „ $cd=20$ „ $f=1, 8, 19$; $\quad \delta=2\alpha+2\beta+\gamma+\begin{cases} 1 \\ 8 \\ 19 \end{cases}$

$k=2, m=2, n=2$, „ $cd=26$ „ $f=11, 25$; $\quad \delta=2\alpha+2\beta+2\gamma+\begin{cases} 11 \\ 25 \end{cases}$

$k=3, m=1, n=1$, „ $cd=24$ „ $f=2, 5, 10, 23$; $\quad \delta=3\alpha+\beta+\gamma+\begin{cases} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 23 \end{cases}$

$k=3, m=2, n=1$, „ $cd=30$ „ $f=1, 7, 13, 29$; $\quad \delta=3\alpha+2\beta+\gamma+\begin{cases} 1 \\ 7 \\ 13 \\ 29 \end{cases}$

$k=3, m=2, n=2$, „ $cd=36$ „ $f=0, 5, 9, 16, 35$; $\quad \delta=3\alpha+2\beta+2\gamma+\begin{cases} 0* \\ 5 \\ 9 \\ 16 \\ 35 \end{cases}$

wo ich die von Ew. überschriebenen Formeln mit einem * bemerkt. Man kann auch f nach Belieben annehmen, um daraus k, m und n zu bestimmen, als, wenn seyn soll $f=0$ oder $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma$, so wird $c=d$, folglich cd ein Quadrat. Dasselbe sey $=4pp$, so wird $kk+mm+nn=2pp-1$. Hier ist klar, dass wenn p ein numerus par, $2pp-1$ unmöglich die Summ von drey Quadraten seyn kann; also müssen für p nur ungrade Zahlen genommen werden, da dann für k, m, n, folgende Werthe herauskommen:

$2pp-1=1$	17	49	97	161	241	337
$k=1$	4, 3	7, 6	9, 6	12, 11, 10, 9	15, 14, 13, 12	18, 16, 12
$m=0$	1, 2	0, 3	4, 6	4, 6, 6, 8	4, 6, 6, 9	3, 9, 12
$n=0$	0, 2	0, 2	0, 5	1, 2, 5, 4	0, 3, 6, 4	2, 0, 7

Da nun solchergestalt, wenn α, β, γ gegeben sind, unendlich vielerley valores für δ gefunden werden können, nachdem entweder f oder k, m, n nach Belieben angenommen wird, und auch die Zahlen k, m, n und f negative genommen werden können, so wäre nun zu beweisen, dass auf solche Art alle mögliche Zahlen für δ herauskommen; und hieraus würde man einen sehr schönen Beweis für das theorema Fermatianum erhalten, welcher gewiss noch zu andern wichtigen Entdeckungen leiten würde.

Den grossen Schachspieler Philidor habe ich nicht gesehen, weil er sich mehrentheils in Potsdam aufhielt. Er soll noch ein sehr junger Mensch seyn, führte aber eine Maîtresse mit sich, wegen welcher er mit einigen Officiren in Potsdam Verdriesslickeiten bekommen, welche ihn genöthiget unvermuthet wegzureisen; sonsten würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben mit ihm zu spielen. Er hat aber ein Buch vom Schachspiel in England drucken lassen, welches ich habe, und darin gewiss sehr schöne Arten zu spielen enthalten sind. Seine grösste Stärke bestehet in Vertheidigung und guter Führung seiner Bauern, um dieselben zu Königinnen zu machen, da er dann, wenn die Anstalten dazu gemacht, pièce für pièce wegnimmt um seine Absicht zu erreichen und dadurch das Spiel zu gewinnen.

Seit einiger Zeit habe ich mich wiederum mit dem Jupiter und Saturnus gequälet, und darüber verschiedene Sachen entdecket, welche mir zu einer nähern Erkenntniss ihrer Bewegung den Weg gebahnet. Weil dieses wieder die Preisfrage bey der Pariser Akademie auf künftiges Jahr ist, so habe ich darüber eine neue Abhandlung dahin abgeschickt.

Euler.