

LETTRE CXXXIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Amendement à la lettre précédente. Recherche de l'intégrale d'une équation différentielle au moyen d'une seconde différentiation.

Berlin d. 17. August 1750.

Ich kann nicht unterlassen den in meinem letzten Schreiben begangnen Rechnungsfehler anzuzeigen, dass ich die Summ der dort angeführten seriei kleiner als $\frac{1}{2}$ befunden, welche doch wirklich nach wiederholter Rechnung grösser ist als $\frac{1}{2}$. Ich habe seit der Zeit verschiedene casus mit allem Fleiss berechnet von dieser serie

$s = 1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \text{etc.}$
und befunden, dass

wenn $x = 0$ so ist $s = 1$, welches für sich klar;

$x = \frac{1}{2}$	„	$s = 0,5605621040$
$x = \frac{2}{3}$	„	$s = 0,5063351$
$x = \frac{7}{10}$	„	$s = 0,5029379861$
$x = \frac{8}{10}$	„	$s = 0,5000591683$
$x = \frac{9}{10}$	„	$s = 0,5000000005$
$x = 1$	„	$s = 0,5.$

Wenn also x nur um sehr wenig kleiner ist als 1, nehmlich $x = 1 - \omega$, so wird die summa s um etwas fast unmerkliches grösser als $\frac{1}{2}$. Denn wenn $\omega = \frac{1}{10}$, so ist $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{10}}$, und wenn man setzt $\omega = \frac{1}{20}$ oder $x = \frac{19}{20}$, so kann man sicher schliessen, dass der Excess der summae s über $\frac{1}{2}$ nur ungefähr $\frac{5}{10^{20}}$ betragen würde. Ich habe aber bisher umsonst einen sichern Weg gesucht um die Summe dieser seriei proxime in numeris zu bestimmen, wenn ω ein sehr kleiner Bruch ist. Denn wenn ich setzen wollte $\omega = \frac{1}{100}$ oder $x = \frac{99}{100}$, so müsste ich alle terminos seriei auf mehr als 100 Figuren in Decimalfractionen berechnen, weil $s = 0,5000000$ etc. und die Anzahl der nach der 5 folgenden Nullen sich bis auf hundert belaufen würde. Denn ungefähr wird seyn $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{100}}$. Es wäre also eine Methode hoch zu schätzen, vermittelt welcher man im Stande wäre den Werth von s proxime zu bestimmen, wenn ω ein sehr kleiner Bruch ist.

Die theoremata Fermatiana haben mich auf die Betrachtung dieser seriei

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.}$$

gebracht, als in welcher keine andere potestates ipsius x vorkommen als deren exponentes numeri quadrati sind. Nimmt man nun das Quadrat von dieser serie:

$$ss = 1 + 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + \text{etc.},$$

so enthält diese series keine andere potestates ipsius x , als deren exponentes summae duorum quadratorum sind. In der serie s^3 werden noch nicht alle potestates ipsius x vorkommen, sondern darin noch diese $x^7, x^{15}, x^{25}, x^{28}$, etc.

fehlen. Könnte man nun beweisen, dass in der serie s^4 gar alle potestates ipsius x nothwendig vorkommen, so wäre zugleich bewiesen, dass eine solche Zahl summa quatuor quadratorum pauciorumve wäre.

Ebenfalls pro resolutione numerorum in tres triangulares müsste man beweisen, dass posito

$$s = 1 + x^1 + x^5 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

die daraus entstehende series s^5 gar alle potestates ipsius x in sich fasse. Und pro numeris pentagonalibus müsste bewiesen werden, dass posito $s = 1 + x^1 + x^5 + x^{12} + x^{22} + \text{etc.}$ die daher entstehende series s^5 gar alle potestates ipsius x in sich fasse, etc. In diesen seriebus pro s assumtis habe ich alle coëfficientes gleich 1 gesetzt. Der Beweis aber wird einerley seyn, wenn man quosvis coëfficientes affirmativos annimmt, und es käme darauf an, solche coëfficientes zu erwählen, dass der Beweis erleichtert würde. Dieser Weg dünkt mir noch der natürlichste zu seyn, um zum Beweis der theorematum Fermatianorum zu gelangen.

Ew. werde noch ein curieuses paradoxon in analysi infinitorum vorlegen, welches darin bestehet, dass man öfters das integrale von einer Differential-Aequation finden kann, ohne dieselbe zu integriren, indem man dieselbe sogar noch weiter differentiirt, ungeachtet eine solche Operation dem Endzweck schnurstracks entgegen zu seyn scheineth. Denn wenn man eine aequationem differentialem nochmals differentiirt, so bekommt man ihr differentiale, oder das differentio-differentiale aequationis integralis quaesitae. So wunderbar muss es also scheinen, dass man durch eine solche Operation die aequationem integralem selbst bekommen sollte. Folgendes Exempel wird dieses paradoxon deutlich an den Tag legen.

Proposita sit haec aequatio differentialis

$$y dx - x dy = a \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

cujus integrale quaeratur.

Ponatur $dy = p dx$, haec aequatio abibit in

$$y - px = a \sqrt{(1 + pp)},$$

quae denuo differentiatia dat

$$dy - p dx - x dp = \frac{ap dp}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

Atqui est $dy = p dx$ (per hyp.) ergo $-x dp = \frac{ap dp}{\sqrt{(1 + pp)}}$, ideoque hinc habebitur $x = \frac{-ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Porro ex aequatione $y - px = a \sqrt{(1 + pp)}$ fit $y = px + a \sqrt{(1 + pp)}$, unde valore invento pro x substituto, obtinetur $y = \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}}$. Cum jam sit $x = \frac{-ap}{\sqrt{(1 + pp)}}$ erit $xx + yy = aa$, quae est aequatio integralis quaesita, atque per differentiationem eruta.

Euler.

