Ich will noch einige andere propositiones beyfügen, die mir schon längst bekannt gewesen, und sich selbst demonstriren:

I. $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + (2\delta + \alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \delta)^2 + (\alpha + \gamma + \delta)^2 + (\beta + \gamma + \delta)^2 + \delta\delta = (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \delta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$

woraus zugleich die Methode erhellet, wie data quatuor quadrata imparia (non aequalia inter se) in quatuor alia, sive paria sive imparia, verwandelt werden können, denn wenn δ in den gegebenen vier quadratis ein numerus par ist, so gilt die erste Aequation pro quadratis paribus, und die andere pro imparibus.

II. Si dantur in uno casu $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 8m + 3$, dantur etiam quatuor quadrata pro casu quocunque $2m + pp \pm p + 1$; nam si $8m + 3$ est $=$ tribus quadratis, erit $8m + 3 + (1 + 2p)^2 =$ quatuor quadratis et divisis omnibus per 4, $2m + pp \pm p + 1 =$ quatuor quadratis.

III. Nachfolgende drey quadrata in fractis

$$\frac{(\pm pp\alpha \mp 2qq\beta - 2pq\gamma)^2 + (\mp 2qq\alpha \pm pp\beta - 2pq\gamma)^2 + (\mp 2pq\alpha \mp 2pq\beta + (2qq - pp)\gamma)^2}{(pp + 2qq)^2}$$

allwo α, β, γ pro integris genommen werden, sind $=$ diesen drey quadratis integris $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$.

IV. Si $AA + BB + CC = 8m + 3$, erit

$$\frac{(A + B - C \pm 1)^2}{4.4} + \frac{(A - B + C \pm 1)^2}{4.4} + \frac{(-A + B + C \pm 1)^2}{4.4} + \frac{(-A - B - C \pm 1)^2}{4.4}$$

$= 2m + 1$.

und wenn man 3 anstatt 1 setzet, so kommen vier quadrata $= 2m + 3$ heraus.

Goldbach.

LETTRE CXXXII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. August 1750.

Die überschriebenen theoremata circa resolutionem numerorum in tria et quatuor quadrata sind alle merkwürdig und haben ihre völlige Richtigkeit; ich habe mich aber bisher umsonst bemühet aus solchen theorematibus den geringsten Nutzen für die bewussten Fermatiana zu ziehen. Ich habe zwar bewiesen omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum; allein es fehlet mir noch an diesem Beweise: Si numerus integer n fuerit summa quatuor fractorum quadratorum

$$\frac{aa}{pp} + \frac{bb}{qq} + \frac{cc}{rr} + \frac{dd}{ss},$$

tum eundem quoque semper esse summam quatuor quadratorum in integris. Und ich sehe wohl, dass ich ohne diese

Demonstration nichts pro resolutione numerorum in tres trigonales, quinque pentagonales, sex hexagonales, etc. auszurichten vermögend bin; und weil hier alles auf numeros integros ankommt, so können die formulae universales, als welche auch fractos in sich schliessen, nicht viel helfen. Die demonstrationem pro quadratis habe ich aus der Betrachtung der residuorum, welche post divisionem cujusque numeri per quadratum überbleiben, hergeleitet; allein diese Betrachtung kann bey den übrigen numeris polygonalibus nicht angewandt werden, dahero ich den sichern Schluss mache, dass Fermat durch ganz andere Speculationen auf seine theoremata geleitet worden, welche vielleicht aus fleissiger Erwägung seiner Werke zu errathen wären.

Ich habe neulich einen Einfall gehabt eine seriem

$$a+b+c+d+e+f+\text{ etc.}$$

daraus zu bestimmen, wenn die producta ex binis terminis contiguis gegeben sind, als:

Quaeratur series numerorum $a+b+c+d+e+f+$ etc. certa et uniformi lege procedens, ut sit: $ab=1$, $bc=2$, $cd=3$, $de=4$, $ef=5$, etc.

Hieraus ist sogleich klar, dass wenn nur ein terminus bekannt wäre, die übrigen alle daraus bestimmt werden. Also aus dem ersten a sind die folgenden:

$$b=\frac{1}{a},\ c=\frac{2a}{1},\ d=\frac{1.3}{2.a},\ e=\frac{2.4a}{1.3},\ f=\frac{1.3.5}{2.4.a},\text{ etc.}$$

Nun folgt ex natura seriei, dass die termini infinitesimi einander gleich seyn müssen, also wenn je zwey contigui einander gleich gesetzt werden, so müssen folgende valores der Wahrheit immer näher kommen:

$$aa=\frac{1.1}{2}=\frac{1.1.3}{2.2}=\frac{1.1.3.3}{2.2.4}=\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4}\text{ etc.}$$

also wird seyn

$$aa=\frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}}\text{ in inf.}$$

Diese Expression aber ist $=\frac{2}{\pi}$ (exist. $1:\pi=$ diam.: periph.), folglich wird $a=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Dahero ist dieses eine series uniformi lege procedens:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \frac{1.3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{2.4}{1.3}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\text{ etc.}$$

Von dieser serie:

$$1-x^1+x^4-x^9+x^{16}-x^{25}+x^{36}-x^{49}+\text{etc.}$$

halte ich für merkwürdig, dass wenn man setzt $x=1-y$, diese series herauskommt:

$$\tfrac{1}{2}+0y+0y^2+0y^3+0y^4+\text{ etc.}$$

nehmlich dass alle potestates finitae ipsius y evanesciren, welches aber bey den infinitis nicht geschehen kann, indem die summa derselben seriei unmöglich allzeit seyn kann $=\frac{1}{2}$. Solches mag wohl eintreffen casu $x=1$; aber wenn $x<1$, so ist die summa gewiss $>\frac{1}{2}$. Allein setze ich nur $x=\frac{9}{10}$, oder $y=\frac{1}{10}$, so wird die Summ $=0{,}4999492$, wofern ich im Rechnen nicht gefehlt.

Euler.