fietque $A = xx + yy + zz + vv + 2(fp + gq + hr + ks) + m(pp + qq + rr + ss)$; at reperitur hinc

$$A = (ap + bq + cr + ds + x)^2 + (aq - bp + cs - dr - y)^2 + (ar - bs - cp + dq - z)^2 + (as + br - cq - dp - v)^2$$

ergo $A = \boxed{4}$ in integris. Q. E. D.

Ita si $7A = (2 + 7p)^2 + (2 + 7q)^2 + (2 + 7r)^2 + (3 + 7s)^2$ erit $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $xx + yy + zz + vv = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $v = 0$, unde $f = 4$, $g = -2$, $h = 0$, $k = 1$. Ergo si

$$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2 \text{ erit}$$
$$A = (2p + q + r + s + 1)^2 + (2q - p + s - r - 1)^2 + (2r - s - p + q - 1)^2 + (2s + r - q - p)^2.$$

Neulich ward in den Braunschweiger Anzeigen diese Frage aufgegeben: Wie viel ein Capital von 1000 Rthlrn. in 640 Jahren zu 5 pro cento, Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?

Weil die herauskommende Zahl sehr gross, und die Rechnung nach der ordentlichen Art auszuführen fast unmöglich ist, so ist die Auflösung gewiss nicht leicht. Ich habe folgende Summ gefunden: 36404192715744080 Rthlr. 22 Ggr. $11\frac{9}{10}$ Pf., welche nicht um $\frac{1}{10}$ Pf. von der Wahrheit fehlen soll. — Der Aufgeber verlangt, dass man die Antwort in einer halben Stund finden soll, mich hat aber dieselbe wohl eine ganz Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könnte.

Euler.

LETTRE CXXIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

St. Petersburg d. 24. März 1750.

Es sind schon mehr als sieben Monate verflossen, seitdem ich Ew. letztes Schreiben erhalten habe, und dieses würde nicht geschehen seyn, wenn nicht einestheils unterschiedene Abhaltungen dazwischen gekommen wären, anderntheils aber dasjenige, so ich hätte schreiben können, auch nach meinem eignen Urtheil von gar zu geringem Werth gewesen wäre. Die Methode, so Ew. gefunden um zu zeigen, dass wenn $mA = \boxed{4}$ auch $A = \boxed{4}$ sey, halte ich vor ein inventum inventorum, und ob ich zwar geglaubet, dass die propositio: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, auf eine leichtere Art würde können demonstrirt werden, so habe doch dergleichen Demonstration nicht gefunden. Ich lasse aber dahin gestellt seyn, ob nicht einige kleine theoremata, so mir en passant vorgekommen, hiezu dienlich seyn möchten, von welchen ich Ew. einige anzeigen will:

I.

$\beta\beta+\gamma\gamma+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$. Diese transmutatio trium quadratorum in tria alia scheinet mir von ziemlichem Nutzen zu seyn, nam inter quatuor quadrata $aa+bb+cc+4kk$, ubi omnes litterae denotant numeros impares, semper erunt tria quadrata, quorum summa radicum est divisibilis per 3; folglich können diese vier quadrata nach solcher Methode auf viele, und vielleicht auf alle mögliche Arten transformiret werden, wie denn z. Ex. die Zahl 335 durch diese Methode in alle modos possibiles verwandelt wird, nemlich $3^2+7^2+9^2+14^2=3^2+13^2+11^2+6^2=9^2+13^2+9^2+2^2=15^2+7^2+5^2+6^2=15^2+1^2+3^2+10^2=15^2+9^2+5^2+2^2=3^2+1^2+1^2+18^2=3^2+1^2+17^2+6^2=7^2+13^2+9^2+6^2$ ($=14^2+11^2+3^2+3^2$ *N. m. d'Euler*), so dass in diesen transmutationibus alle quadrata paria et imparia, in quae resolvi potest numerus 335, begriffen sind. Es wäre aber schon genug, wenn man ein Mittel hätte diese vier quadrata $3^2+\beta\beta+\gamma\gamma+4\varepsilon\varepsilon$ in nachfolgende vier zu verwandeln $1+\eta\eta+\vartheta\vartheta+4\varkappa\varkappa$; denn so hätte man demonstriret, dass alle numeri $8n+7$ summae quatuor quadratorum sind. Mir ist aber gleichwohl noch kein exemple vorgekommen, da nicht die quadrata $3^2+\beta\beta+\gamma\gamma+4\varepsilon\varepsilon$ post primam aut secundam transmutationem in quatur quadrata, quorum unum sit unitas, hätten verwandelt werden können; denn also findet man:

$$3^2+13^2+15^2+2^2=407=1^2+9^2+15^2+10^2$$
$$3^2+9^2+15^2+10^2=415=1^2+5^2+17^2+10^2$$
$$3^2+5^2+17^2+10^2=423=1^2+5^2+19^2+6^2$$
$$3^2+5^2+19^2+6^2=431=1^2+3^2+15^2+14^2$$

die folgenden vier quadrata werden alsofort durch eine einige Operation, eben wie die vorhergehende, in quatuor quadrata, quorum unum est unitas, transmutiret, bis auf $3^2+3^2+21^2+2^2=463$, allwo man per primam transmutationem bekommt $15^2+15^2+3^2+2^2$, und aus diesen, per secundam transmutationem, $1^2+13^2+17^2+2^2$.

II.

Wie schwer es auch ist zu sagen, was datis quatuor quadratis, in quae resolvi potest numerus $2m-1$, die quatuor quadrata $=$ numero $2m+1$, seyn werden, so haben doch die erstern vier quadrata mit den letztern einen ganz genauen nexum, welcher in den tribus quadratis $=8m+3$ gegründet ist; datis enim his, dantur simul quatuor quadrata pro $2m-1$ et pro $2m+1$.

III.

Wenn α, β, γ, δ quatuor numeri impares quicunque sind, und man selbige gleich setzen kann folgenden numeris: $\alpha=2er+1$, $\beta=b+fr$, $\gamma=c+gr$, $\delta=r-eer-e-bf-cg$, so dass b, c, r numeri integri seyen, so kann man auch demonstriren omnem numerum $8m+4$ oder generatim omnem numerum esse summam quatuor quadratorum: Denn es ist

$$(2er+1)^2+(b+fr)^2+(c+gr)^2+(r+e^2r-e-bf-cg)^2=1^2+(b-fr)^2+(c-gr)^2+(r+e^2r+e+bf+cg)^2.$$

Dass derjenige, welcher das problema in den Braunschweigischen Anzeigen aufgegeben, bessere compendia als

Ew. zu dessen Solution haben sollte, kann ich mir nicht vorstellen, und bitte mir zu melden, ob der autor ferner etwas davon bekannt gemacht? In den Amsterdamer französischen Zeitungen vom 5. Aug. 1749 war folgendes avertissement: M. Quin Mackenzie Quin.... a inventé, à l'âge de 8 ans, et il a eu l'honneur de présenter au Roy une méthode par laquelle il multiplie et divise quelque nombre de figures que ce soit, et en vérifie le produit et le quotient en une seule ligne. Il fait cette opération en moins de trois minutes, quand même il s'agiroit de multiplier 20 figures par 20 figures, ou 40 par 20. Ceux qui voudront souscrire pour avoir cette méthode seront tenus de donner d'abord une guinée, et une autre après que cette méthode leur aura été communiquée ou à leurs correspondans. Nach der Zeit habe ich nichts mehr hiervon gehört.

Goldbach.

LETTRE CXXX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Résolution de chaque nombre en quatre quarrés. Série dont les termes sont les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 9. Juni 1750.

Ew. theorema

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$$

hat mir Anlass gegeben folgende theoremata zu finden, unter welchen dieses das erste ist

I. Si $a+b+c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2$$

II. Si $a+b+2c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2$$

III. Si $a+2b+2c=9m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2$$

IV. Si $a+b+3c=11m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2$$