aus welchen zugleich die coordinatae pro puncto altero respondente $F$ gefunden werden, wenn man nur das signum des radicalis $\sqrt{(1+pp)}$ verwandelt. Will man curvas algebraicas haben, so darf man für $P$ nur eine solche functionem ipsius $p$ annehmen, dass $\int p\,dP$ integrabel wird. Zum Ex. setze man $P=2bp$, so wird

$$x=2b\int p\,dp-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}=bpp-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}+a$$

und $y=2bp+\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Erstere gibt

$$px=bp^3+ap-\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

welche zu jener addirt gibt $y+px=bp^3+(a+2b)p$. Wenn nun aus diesen zwey Aequationen der Buchstab $p$ eliminirt wird, so erhält man die Aequation zwischen $x$ und $y$. Zur Construction sind aber obige Formuln bequemer, weil in diesem Exempel seyn wird $AR=bpp+a+2b$, $PQ=\frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PR=2b+\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PE+QF=\frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Man kann aber auch in genere eine sehr leichte Construction geben, welche alle mögliche curvas, so diese Eigenschaft haben, in sich begreift, sie seyen algebraisch oder transcendentes.

Euler.



# LETTRE CXVIII.

## Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente.

St. Petersburg d. 15. Juli 1748.

Ew. danke ich dienstlich für die viele Mühe, welche Sie über sich nehmen wollen, damit mir die verlangte Beschreibung der Sonnenfinsterniss zu rechter Zeit übersandt werden möchte, und will hoffen, dass selbige noch intra terminum allhie eintreffen werde. Ich würde aber auf Dero geehrtes letzteres Schreiben so zeitig noch nicht geantwortet haben, wenn ich nicht die von mir angeführte, aber mit $(2\pm 2)^{2e}$ übel exprimirte Formul je eher je lieber zu corrigiren nöthig gefunden hätte, denn es ist

$$8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\square+\square,$$

allwo $e$ allezeit einen numerum integrum affirmativum bedeutet, oder auch $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\square+\square$, gleich-wie $8n+1=(1\pm1)^{2e}+(1\pm1)^{2f}+\Box$, allwo $e$ und $f$ integros affirmativos bedeuten; es ist auch sehr wahrscheinlich, dass sogar $4n+1=(1\pm1)^{2e+1}+\Box+\Box$. Insonderheit aber halte ich für merkwürdig, dass in dieser aequatione

$$4n+3=2aa+4bb+cc+2=2AA+4BB+CC,$$

allwo $a$ ein numerus par und $A$ impar ist, $a$ in quocunque casu numeri $n$ so angenommen werden kann, dass $A$ gleich sey $a+1$. In dem casu, wo $a=0$, ist solches offenbar, in den übrigen casibus aber fehlet es more solito an der Demonstration, jedoch ist wohl zu verstehen, dass, wie gesagt, der valor $a$ also angenommen werden kann und nicht nothwendig also beschaffen ist, als z. Ex. wenn $n=19$ und $4n+3=79$, so kann $a$ zwey valores haben, nehmlich 4 und 6. Nicht der andere, sondern der erste ist hier applicable, damit die aequationes

$$4.19+3=2.4^2+6^2+3^2+2=2(4+1)^2+2^2+5^2$$

Statt finden und $A=a+1=4+1$ werde.

Meine vorige formulas habe ich auf folgende Art herausgebracht, so in der That mit Ew. Methode übereinstimmet: Wenn man annimmt

1.) $4aa+2bb+4cc+4c+1=2n+1$,

so wird

2.) $n=2aa+bb+2cc+2c=2\Box+\Box+4\triangle$.

Es sey $n$ ein numerus par $=2m$, so muss auch $b$ ein numerus par $=2d$ seyn, ergo

3.) $m=aa+2dd+cc+c=2\Box+\Box+2\triangle$.

Es sey $m=2p$, so muss auch $a=2e$ seyn, ergo

4.) $p=2ee+dd+\frac{cc+c}{2}=2\Box+\Box+\triangle$.

Sit in formula 2.) $n=2m+1$, erit $b=2d+1$, ergo



5.) $m=aa+2dd+2d+cc+c=\Box+4\triangle+2\triangle$.

Sit $m=2p$, erit $a=2e$, ergo

6.) $p=2ee+dd+d+\frac{cc+c}{2}=2\Box+2\triangle+\triangle$.

Sit in formula 4.) $m=2p+1$, erit $a=2e+1$, ergo

7.) $p=2ee+2e+dd+d+\frac{cc+c}{2}=4\triangle+2\triangle+\triangle$.

Si in formula 3.) $m=2p+1$, erit $a=2e+1$, ergo

8.) $p=2ee+2e+dd+\frac{cc+c}{2}=4\triangle+\Box+\triangle$. etc.

Das Präsent, welches mir Ew. von Dero Introductione in analysin infinitorum machen, wird mir überaus angenehm seyn; ich hatte gar nicht gewusst, oder wenigstens gänzlich vergessen, dass Sie dergleichen Buch geschrieben, welches nunmehro vermuthlich in den gelehrten Zeitungen bald recensirt werden wird. Bey dieser Gelegenheit möchte ich wissen, ob Ew. Scientia navalis schon gedruckt worden? item, was Sie von einer Abhandlung ejusdem argumenti, so M. Bouguer herausgegeben, halten? item, möchte gern benachrichtigt seyn, ob der in Ew. Antworten auf die Fragen von den Cometen erwähnte neuentdeckte Planet sich in seiner Possession mainteniret und durch fernere Observationen bestätiget worden? item, ob der Comet von A. 1742 in dem Lauf des Mercurii einige Alteration verursacht?

Was die Aequation $xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$ betrifft, so wird selbige positis $x-1=A$, $y-1=B$, $z-1=C$, in diese $AA+BB+CC=2$ verwandelt, woraus alsofort offenbar ist, dass posito $A=\sqrt{(2-BB-CC)}$ rationali, auch $-BB=AA+CC-2$, oder $B=\sqrt{(2-AA-CC)}$ oder $C=\sqrt{(2-AA-BB)}$ rationales seyn müssen.

Vor Dero mir communicirte Solution des problematis von den diagonalibus trapezii sage ich schuldigsten Dank, und observire hiebey annoch, dass wenn von den quatuor lateribus (Fig. 29) $AB, BC, CD, DA$ eines durch einen numerum impariter parem, und die drey übrigen durch numeros impares exprimiret werden, alsdann die drey quadrata $AC^2 + BD^2 + 4GH^2$ unmöglich aus numeris integris bestehen können.

Die Solution des problematis catoptrici durch Hülfe einer curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans sey, ist allerdings sehr schön. Ich habe dabey angemerket, dass in der formula $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ in casu $y =$ applicatae maximae, allezeit seyn müsse $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$, hingegen kann ich mir nicht recht vorstellen, wie die curva aussehen müsse, wenn man (Fig. 32) das spatium $EM$ a vertice $E$ usque ad applicatam maximam $MP$ interceptum ganz klein, als $\frac{a}{1000}$ annimmt, und schliesse daraus, dass eben dieses spatium $EM$ gewisse limites haben werde.

Goldbach.



# LETTRE CXIX.

## Euler à Goldbach.

Sommaire. Accord des tables lunaires d'Euler avec l'observation de l'éclipse du soleil. Examen du théorème numérique de Goldbach. Introduction à l'analyse des infinis et Science navale. Action de la comète de 1744 sur le cours de Mercure. Observations sur le quadrilatère et la courbe catoptrique.

Berlin d. 6. August 1748.

Nachdem uns allhier der Himmel ziemlich günstig gewesen, um neulich die Sonnenfinsterniss sehr genau zu beobachten, so habe ich Ursach mit meinen neuen tabulis lunaribus vollkommen zufrieden zu seyn. Denn sowohl der Anfang als das Ende hat näher als auf eine Minute mit meiner Rechnung übereingetroffen, indem der Anfang nur 15″ und das Ende 30″ später bemerket worden, als ich angesetzet hatte. Insonderheit aber war diese Finsterniss würklich annularis, wie ich gefunden hatte, ungeacht nicht nur die andern tabulae, welche doch für die besten gehalten werden, keinen annulum anzeigten, sondern auch einige HH. Pariser astronomi meine Rechnung durch einige bey den tabulis ange-