LETTRE CXVII.

=

Euler à Goldbach

Sommaire. Suite sur les propriétés des nombres. Conditions de rationalité de certaines formules irrationelles. Démonstration du théorème de géométrie précédent. Oechliz, Solution du problème de la courbe catoptrique.

Berlin d. 25. Juni 1748.

— — — Nun bin ich endlich auf den Grund der mir neulich von Ew. überschriebenen schönen Formuln gekommen, wobey ich das in der Abschrift derselben begangene geringe Versehen sogleich eingesehen. Dieselben gründen sich meines Erachtens auf folgende drey Hauptformuln I. $n = \triangle + \triangle + \triangle$; II. $4n + 1 = \square + \square + \square$ und III. $4n + 2 = \square + \square + \square$, von deren Wahrheit ich schon längst völlig versichert bin, ungeacht ich davon keine Demonstration angeben kann.

Aus der ersten, $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget $n = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$. Nun sey $a = d + e$ und $b = d - e$, so wird

$n = dd + d + ee + \frac{cc+c}{2}$, folglich ist auch eine jegliche Zahl $n = \square + 2\triangle + \triangle$, woraus zugleich erhellet, dass immer $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$.

Aus der zweyten, $4n + 1 = \square + \square + \square$, folget $4n + 1 = 4aa + 4bb + (2c + 1)^2$, also $n = aa + bb + cc + c$, und dahero $n = \square + \square + 2\triangle$.

Ferner, da eine jede ganze Zahl $= aa + bb + cc + c$, so ist auch eine jede gerade Zahl $2n = aa + bb + cc + c$, und also $n = \frac{aa+bb}{2} + \frac{cc+c}{2} = \frac{\square + \square}{2} + \triangle$. Oder man setze $a = d + e$ und $b = d - e$, so wird $n = dd + ee + \frac{cc+c}{2} = \square + \square + \triangle$.

Ebenfalls wird auch eine jede ungerade Zahl seyn $2n + 1 = aa + bb + cc + c$, da nun $cc + c$ immer grad ist, so muss von den Zahlen a und b die eine grad, die andere ungrad seyn, dahero $2n + 1 = 4aa + (2b + 1)^2 + cc + c$ und also $n = 2aa + 2bb + 2b + \frac{cc+c}{2}$, folglich $n = 2\square + 4\triangle + \triangle$.

Die dritte Formul $4n + 2 = \square + \square + \square$ gibt $4n + 2 = 4aa + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$ also ist $n = aa + bb + b + cc + c$, und dahero $n = \square + 2\triangle + 2\triangle$. Setzt man $b = d + e$, $c = d - e$, so wird

$$n = aa + 2dd + 2d + 2ee = \square + 2\square + 4\triangle.$$

Ferner ist auch $2n = \square + 2\triangle + 2\triangle$ und also $\square$ grad, dahero wird $2n = 4aa + bb + b + cc + c$ und

$$n = 2aa + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2} = 2\square + \triangle + \triangle.$$

Weil weiter $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$, so ist $n = 2\square + \square + 2\triangle$, folglich auch $2n = 2\square + 4\square + 2\triangle$ und also $n = \square + 2\square + \triangle$.

Oder da auch $2n+1=2aa+(2b+1)^2+cc+c$, so wird $n=aa+2bb+2b+\frac{cc+c}{2}=\square+4\triangle+\triangle$. Endlich ist auch

$2n+1=\square+2\triangle+2\triangle=(2a+1)^2+bb+b+cc+c$, und $n=2aa+2a+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$, oder $n=4\triangle+\triangle+\triangle$ $=\square+2\triangle+4\triangle$.

Also ist auch $2n=4\square+2\triangle+4\triangle$ oder $n=2\square+\triangle+2\triangle$, oder $2n+1=(2a+1)^2+2\triangle+4\triangle$ und also $n=\triangle+2\triangle+4\triangle$.

Da $4n+2=4aa+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, so ist $2n+1=2aa+2bb+2b+2cc+2c+1$. Es sey $b=d+e$, $c=d-e$, so wird $2n+1=2aa+4dd+4ee+4d+1$ $=2\square+\square+\square$. Also ist ein jeglicher numerus impar $2n+1=2\square+\square+\square$, welches Ew. erstes, meines Erachtens sehr merkwürdiges theorema war. Alle diese hier gefündene Formuln sind also folgende

I. $n=\triangle+\triangle+\triangle$;	VIII. $n=2\square+\square+2\triangle$;
II. $n=\square+2\triangle+\triangle$;	IX. $n=\square+2\square+\triangle$;
III. $n=\square+\square+2\triangle$;	X. $n=2\square+\triangle+\triangle$;
IV. $n=\square+\square+\triangle$;	XI. $n=\square+4\triangle+\triangle$;
V. $n=2\square+\triangle+4\triangle$;	XII. $n=4\triangle+\triangle+\triangle$;
VI. $n=\square+2\triangle+2\triangle$;	XIII. $n=2\square+\triangle+2\triangle$;
VII. $n=\square+2\square+4\triangle$;	XIV. $n=\triangle+2\triangle+4\triangle$;

XV. $2n+1=\square+\square+2\square$.

Da sowohl $8n+3$ als $8n+6$ allzeit in 3 quadrata zertheilt werden kann, so folgt, dass $8n+7-pp$, wenn $pp=8m+4$ oder $=8m+1$, d. i. wenn p entweder ein numerus impar oder impariter par ist, allzeit eine summa trium quadratorum sey, wie Ew. gemeldet haben.

Dass aber omnis numerus $8n+2$ in dieser Form $(2\pm2)^{2e}+\square+\square$ enthalten sey, kann ich nicht recht begreifen. Sollte der Sinn davon dieser seyn, dass allzeit $8n+2=\square+\square+q$, da q ist entweder 0, oder 16 oder 256, oder 4096 etc., welches die Werthe sind von $(2+2)^{2e}$, so würde solches in dem Fall $8n+2=154$ nicht Statt finden, indem $154-q$ immer eine summa duor. quadr. wird; es wäre denn, dass der exponens e auch 0 seyn könnte und folglich auch $q=1$; ob ich gleich zweifle, ob auch in diesem Fall sich keine Ausnahme finden sollte.

Ich bin neulich auf eine sonderbare Betrachtung gefallen, vermittelst welcher viel Diophanteische problemata sehr leicht können solvirt werden. Wenn man z. Ex. für x, y, z numeros rationales bestimmen kann, dass dieser Aequation

$$xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$$

satisfacirt wird, so müssen alle surdische (*sic*!) Formuln, in nachfolgenden Aequationen, so aus jener entstehen, rational werden,

$$\begin{aligned}
x&=1\pm\sqrt{(2y+2z-yy-zz)};\\
y&=1\pm\sqrt{(2x+2z-xx-zz)};\\
z&=1\pm\sqrt{(2x+2y-xx-yy)};\\
x+y&=1\pm\sqrt{(2z-zz+2xy)};\\
x+z&=1\pm\sqrt{(2y-yy+2xz)};\\
y+z&=1\pm\sqrt{(2x-xx+2yz)};\\
x-y&=1\pm\sqrt{(2z+4y-2xy-zz)};\\
y-x&=1\pm\sqrt{(2z+4x-2xy-zz)};\\
x-z&=1\pm\sqrt{(2y+4z-2xz-yy)};\\
z-x&=1\pm\sqrt{(2y+4x-2xz-yy)};\\
y-z&=1\pm\sqrt{(2x+4z-2yz-xx)};\\
z-y&=1\pm\sqrt{(2x+4y-2yz-xx)};\\
x+y+z&=1\pm\sqrt{(2xy+2xz+2yz)}.
\end{aligned}$$

Wenn also nur eine von diesen Formuln rational gemacht wird, welches sehr leicht ist, so werden alle übrige 12 von selbsten rational; solches geschieht also nach der ersten, wenn

$$x = \frac{pp+qq+rr+2pr+2qr}{pp+qq+rr}, \quad y = \frac{2p(p+q)}{pp+qq+rr}, \quad z = \frac{2q(p+q)}{pp+qq+rr}.$$

Wenn also drey solche Zahlen gesucht werden sollten, dass alle obigen XIII surdischen Formuln rational werden, welches problema nach der gewöhnlichen Art beynahe unmöglich seyn würde, so können doch hieraus leicht unendlich viel Solutionen angegeben werden. Als, wenn $p=1$, $q=2$, $r=2$, so wird $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{4}{3}$.

Meine Demonstration des vorher gemeldten theorematis verhält sich so: Sit (Fig. 29) propositum trapezium $ABCD$ cum diagoniis AC, BD. Compleatur 1mo parallelogrammum $ABED$, cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parallelogr. $ACEF$ cum diag. CF, ductisque BF, DF, erit quoque $BCDF$ parallelogr. Jam cum in omni parallelogrammo sit summa quadr. diagon. = summae quadr. laterum, ex $\square ACEF$ erit $AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2$

ex $\square BCDF$ erit $BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2$

ergo

$$2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2.$$

Porro $\square ABED$ dat $AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, quae aequatio ad priorem addita dat

$$2AC^2+2CE^2+BD^2 = 2AB^2+2BC^2+2CD^2+2AD^2-BD^2$$

adde

$$BD^2 = \qquad BD^2$$

et divide per 2, fiet

$$AC^2 + CE^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

At quia AE uti et BD bisecta est in G, bisecetur quoque

AC in H, et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2 = 4GH^2$, quo substituto erit $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2 = AC^2+BD^2+4GH^2$, Q. E. D.

Wenn man, wie gemeiniglich in der Geometrie zu geschehen pflegt, eine demonstrationem more veterum verlangt, so verdienet diese einen grossen Vorzug vor derjenigen, welche Ew. mir zu überschreiben die Güte gehabt. Will man aber nur von der Wahrheit, worauf doch die Hauptsach ankommt, überzeugt seyn, so würde meine Demonstration allen Vorzug verlieren, weil ich darin die angeführte Eigenschaft der parallelogrammorum voraussetze, deren Ew. nicht nur nicht nöthig haben, sondern dieselbe auch zugleich mit beweisen.

Hr. Oechliz aus Leipzig, welcher nach St. Petersburg zur mathesi sublimiori berufen worden, die Vocation aber ausgeschlagen, hat eine sehr schöne Solution des schon längst erwähnten problematis catoptrici erfunden, welche Ew. unfehlbar gefallen wird.

Es sey (Fig. 30) MN eine von den gesuchten curvis, welche alle radios ex puncto fixo C emissos post geminam reflexionem in M et N factam in idem punctum C remittat. Man verlängere MN beiderseits in E et F, so dass $ME = CM$ et $NF = CN$, so wird die longitudo EF constans seyn und die Puncte E und F werden in einer solchen krummen Linie EIF seyn, dass die grade Linie EF beiderseits auf dieselbe perpendiculär fällt. Die ganze Sache kommt also darauf an, dass man solche krumme Linien EIF finde, dass die auf ein jegliches Punct derselben gezogenen Perpendicular-Linien EF dieselbe krumme Linie nochmal in F ad angulos rectos durchschneiden. Denn diese Eigenschaft schliesst jene schon in sich, dass die quantitas lineae hujus EF constans seyn müsse. Man sieht nun alsbald, dass die Linie EIF ein Circul seyn könne, dessen diameter $= EF$; es gibt aber noch unendlich viel andere krumme Linien, welche diese Eigenschaft mit dem Circul gemein haben, wie ich bald zeigen werde.

Hat man aber eine solche krumme Linie EIF gefunden, so kann daraus sehr leicht die gesuchte krumme Linie MN gefunden werden, und das auf unendlich vielerley Art. Denn man kann das punctum radians C nach Belieben annehmen, und wenn man daraus ad terminos lineae EF die graden Linien CE und CF zieht, dieselben in G und H in zwey gleiche Theile schneidet, aus den Puncten G und H auf dieselben die Perpendicular-Linien GM und HN aufrichtet, bis solche der EF begegnen, so sind nicht nur die Puncte M und N in der gesuchten Linie MN, sondern GM und HN sind auch tangentes derselben. Nimmt man für EIF ein Circul an, diametri EF, so wird MN eine ellipsis, deren foci sind das punctum radians C und das centrum circuli EIF.

Um aber alle mögliche krumme Linien EAF (Fig. 31) zu finden, welche von ihren normalibus ERF nochmal in F normaliter durchschnitten werden, so setze ich die abscissas $AP = x$, $AQ = X$, die applicatas $PE = y$, $QF = -Y$, (weil diese ad partes oppositas axis fällt). So ist die subnormalis $PR = \frac{y\,dy}{dx}$ und die subnormalis $QR = \frac{-Y\,dY}{dX}$. Da nun $PE : PR = QF : QR$, so wird $y : \frac{y\,dy}{dx} = -Y : \frac{-Y\,dY}{dx}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$. Jetzt setze ich $dx = p\,dy$, so wird auch $dX = p\,dY$ und $PR = \frac{y}{p}$, $QR = \frac{-Y}{p}$; also $PQ = \frac{y-Y}{p} = X - x$. Diese Aequation differentiiret gibt

$$\frac{dy - dY}{p} - \frac{(y-Y)\,dp}{pp} = dX - dx = p(dY - dy),$$

oder

$$(dy - dY)\left(\frac{1+pp}{p}\right) = \frac{(y-Y)\,dp}{pp},$$

das ist

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p(1+pp)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1+pp}.$$

Dahero ist $l(y - Y) = l\,2a + lp - l\sqrt{(1+pp)}$, oder $y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, und folglich $X - x = \frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}} = PQ$. Da nun $PE + QF = y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, so wird $EF^2 = PQ^2 + (PE + QF)^2 = 4aa$, und also $EF = 2a$, dahero constans.

Da $y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, so setze ich $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ und $Y = P - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, wo P eine functionem rationalem quamcunque ipsius p bedeuten mag, denn solchergestalt wird die conditio continuitatis erfüllt, weil die Formul $P \pm \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ wegen des Radicalzeichens von Natur ambigua ist, und also auf beide Puncte E und F zugleich geht. Weil nun $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, so ist $dy = dP + \frac{a\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und also

$$dx = p\,dy = p\,dP + \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das integrale ist $x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Wenn demnach für P eine functio quaecunque rationalis von p angenommen wird, so hat man pro curva AE diese Formuln

$$AP = x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}},\quad PE = y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

aus welchen zugleich die coordinatae pro puncto altero respondente F gefunden werden, wenn man nur das signum des radicalis $\sqrt{(1+pp)}$ verwandelt. Will man curvas algebraicas haben, so darf man für P nur eine solche functionem ipsius p annehmen, dass $\int p\,dP$ integrabel wird. Zum Ex. setze man $P=2bp$, so wird

$$x=2b\int p\,dp-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}=bpp-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}+a$$

und $y=2bp+\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Erstere gibt

$$px=bp^3+ap-\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

welche zu jener addirt gibt $y+px=bp^3+(a+2b)p$. Wenn nun aus diesen zwey Aequationen der Buchstab p eliminirt wird, so erhält man die Aequation zwischen x und y. Zur Construction sind aber obige Formuln bequemer, weil in diesem Exempel seyn wird $AR=bpp+a+2b$, $PQ=\frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PR=2b+\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PE+QF=\frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Man kann aber auch in genere eine sehr leichte Construction geben, welche alle mögliche curvas, so diese Eigenschaft haben, in sich begreift, sie seyen algebraisch oder transcendentes.

Euler.

LETTRE CXVIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente.

St. Petersburg d. 15. Juli 1748.

Ew. danke ich dienstlich für die viele Mühe, welche Sie über sich nehmen wollen, damit mir die verlangte Beschreibung der Sonnenfinsterniss zu rechter Zeit übersandt werden möchte, und will hoffen, dass selbige noch intra terminum allhie eintreffen werde. Ich würde aber auf Dero geehrtes letzteres Schreiben so zeitig noch nicht geantwortet haben, wenn ich nicht die von mir angeführte, aber mit $(2\pm 2)^{2e}$ übel exprimirte Formul je eher je lieber zu corrigiren nöthig gefunden hätte, denn es ist

$$8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\Box+\Box,$$

allwo e allezeit einen numerum integrum affirmativum bedeutet, oder auch $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\Box+\Box$, gleich-