

hoc est, ob  $\frac{1}{t} + \frac{u}{tt} + \frac{uu}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \text{etc.} = \frac{1}{t-u}$ , erit

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t-u)} = \frac{1}{t-u}$$

Sit  $c = d = e = \text{etc.} = 0$ , erit ipsa series

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)} \left( \frac{1}{t} + \frac{u}{tt} + \frac{uu}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \text{etc.} \right),$$

seu

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t-u)} = \frac{1}{t-u}$$

Eben diese Eigenschaft haben  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et alii *lusus naturae*, wenn sie so weit als man will reales, alle übrige aber  $= 0$  gesetzt werden.

Goldbach.



## LETTRE C.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Mémoire sur les perturbations de Saturne et de Jupiter. Théorie de la Lune. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 20 September 1746.

— — — Für die mir gütigst überschickten Devisen zu meiner künftigen pièce über die Verwirrungen der Bewegungen des  $\text{♄}$  und  $\text{♃}$  statte allen gehorsamsten Dank ab. Solche schicken sich vollkommen auf die Art meiner Abhandlung. Ich habe davon die mittlere erwählet, als welche mir mit meinem Vortrag auf das Genaueste übereinzukommen schien. Ich habe dabey jetzt alle Schwierigkeiten fast gänzlich überwunden, welche von einer ganz andern Art sind, als die, so ich bey dem Mond angetroffen; denn der Saturnus behält beinahe eben die Bewegung, als wenn er von der Sonne allein angezogen würde, und wird nur von dem Jupiter etwas wenig verwirrt, dahingegen die Bewegung des Monds

sich grossentheils nach der Kraft der Erde richtet und von der Kraft der Sonne etwas geändert wird. Beide Fälle haben dieses gemein, dass die Verwirrungen sehr klein sind, und eben dieses ist das einzige Mittel die Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden, indem die ganze Sach auf Approximationen ankommt. Es wären aber casus möglich, wo man auf keine Art die Bewegung eines Planeten würde bestimmen können. Es ist klar, wenn der Mond sehr viel weiter von der Erde entfernt wäre, derselbe alsdann kein satelles der Erde mehr seyn, sondern als ein planeta primarius seinen Lauf um die Sonne verrichten, dabey aber von der Erde einige Verwirrung, wie der Saturnus vom Jupiter, leiden würde; welche Bewegung noch könnte bestimmt werden. Wenn aber der Mond von der Erde nur so weit entfernt wäre, dass die beiden Kräfte der Sonne und der Erde einander beinahe gleich würden, und der Mond also weder ein planeta primarius noch ein satelles der Erde seyn könnte, so würde seine Bewegung so irregulär seyn, dass dieselbe auf keinerley Art und Weise bestimmt werden könnte. Es ist demnach ein grosses Glück für die Astronomie, dass sich kein solcher Fall in unserm systemate planetario befindet. Wenn der Mond, anstatt dass er jetzt ungefähr 60 radios telluris von uns entfernt ist, etwa 300 radios weit weg wäre, so würde sich der erwähnte Fall ereignen. — Hernach habe ich auch angemerkt, dass wenn der Mond bey seiner gegenwärtigen Entfernung nur entweder eine grössere Excentricität hätte, oder seine orbita nach einem weit grösseren Winkel auf die Ecliptic inclinirt wäre, auch alle bisherige Kunstgriffe nicht hinreichend seyn würden, seinen Ort nur ungefähr voraus zu bestimmen. Da sich nun auch dieser Fall nicht in unserm

systemate befindet, so scheint es allerdings, dass die Einrichtung dieses systematis nach den Gränzen unserer Erkenntniss gemacht worden, und dass sich vielleicht solche Fälle nur in andern systematibus, wo die Einwohner einen höhern Verstand und tiefere Einsicht in die analysis besitzen, befinden. Denn nach der lege mutuae gravitationis, wornach sich alle Bewegungen in der Welt zu richten scheinen; beruhet die Bestimmung der Bewegung solcher Körper auf der Integration einiger Differentio-differential-Aequationen, und kommt also die ganze Sach auf unsere Fähigkeit in der analysis an.

Dass die coëfficientes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , etc. bey Ew. neulich überschriebenen Formül nicht nur alle infiniti werden, sondern auch per potestates negativas des binomii  $1 - 1$  ausgedrückt werden können, habe ich also gefunden: Es sey vorgelegt diese series:

$$a^A, a^B, a^C, a^D, a^E, a^F, \text{ etc.}$$

wovon der terminus indici  $x$  respondens seyn soll  $a^X$ , so wird

$$a^X = a^A + \frac{x-1}{1} (a^B - a^A) + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} (a^C - 2a^B + a^A) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} (a^D - 3a^C + 3a^B - a^A) + \text{etc.}$$

$$\text{Es sey } \frac{x-1}{1} = \mathcal{A}, \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} = \frac{x-2}{2} \mathcal{B} = \mathfrak{B}, \frac{x-3}{3} \mathfrak{B} = \mathfrak{C},$$

$$\frac{x-4}{4} \mathfrak{C} = \mathfrak{D} \text{ etc., so wird}$$

$$\begin{aligned} a^X &= a^A (1 - \mathcal{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - \text{etc.}) \\ &+ a^B (\mathcal{A} - 2\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 5\mathfrak{E} - \text{etc.}) \\ &+ a^C (\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} - 10\mathfrak{E} + 15\mathfrak{F} - \text{etc.}) \\ &+ a^D (\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 10\mathfrak{E} + 20\mathfrak{F} - 35\mathfrak{G} - \text{etc.}) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn also gesetzt wird

$$a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D + \text{etc.}$$

so wird

$$\alpha = 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= (1-1)^{x-1},$$

wie aus der Evolution erhellt

$$\beta = \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1.2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \text{etc.}$$

$$= (x-1) \left( 1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1.2} - \text{etc.} \right)$$

$$= (x-1)(1-1)^{x-2},$$

$$\gamma = \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} \left( 1 - \frac{3(x-3)}{3} + \frac{6(x-3)(x-4)}{3.4} \right.$$

$$\left. - \frac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3.4.5} + \text{etc.} \right)$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} (1-1)^{x-3},$$

$$\delta = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} (1-1)^{x-4} \text{ etc.}$$

Man darf also nur jetzt setzen  $x = \frac{1}{2}$ .

Ew. Demonstration, dass

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.} = \frac{1}{t-u}$$

ist meines Erachtens die einzige, wodurch dieser Iusus naturae bewiesen werden kann. Inzwischen, wenn für  $a, b, c, \text{etc.}$   $t$  und  $u$  determinirte Zahlen angenommen werden, so bekommt man öfters series, deren Summation man nicht vermuthen sollte.

Euler.

## LETTRE CI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la série des lettres précédentes.

St. Petersburg d. 25. October 1746.

Die Nachricht, so Ew. aus Petersburg bekommen, dass Ihre Kais. Majestät mich mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget, ist in so weit gegründet, dass Höchst Dieselben mir das Gut Wolmarshof, welches jährlich 1400 R<sup>o</sup> Arende trägt, ad dies vitae Allergnädigst geschenkt haben. Was aber die akademischen Angelegenheiten betrifft, so habe ich mich derselben schon seit A. 1742 gänzlich entschlagen.

In der serie  $\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$  finden sich zwey Eigenschaften: 1. dass man dadurch, data summa et datis quibuscunque terminis ab initio, die seriem, cujus summa data est, finden kann; 2. dass man von unzähligen seriebus demonstriren kann, dass ihre summae unendlich