

LETTRE XCVII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Réponse aux lettres précédentes.

St. Petersburg d. 5. Juli 1746.

Dass Ew. einen Theil des neulich distribuirten Preises von Paris bekommen würden, hatte ich zwar fest vermuthet, habe aber die eigentliche Nachricht davon nicht eher als aus Dero letztem Schreiben bekommen, wie mir denn auch die dritte Person, so an diesem Preise Theil gehabt, bis dato unbekannt ist. Die zum künftigen praemio bey der Parisischen académie des sciences ausgesetzte Frage gibt mir auch vor Ew. sehr gute Hoffnung. Ich bitte mir bey Gelegenheit zu melden, wie viel mal Dero pièces schon bey selbiger académie victorieuses gewesen sind?

Es gehöret meines Erachtens schon eine ziemliche Fertigkeit dazu, dass man aus der serie $x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.4}x^5 - \text{etc.}$

die summam $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{5}{8} - \text{etc.}$ nach Ew. Methode finde, und von der serie

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} + \frac{n(n+1)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \text{etc.}$$

habe ich folgendes angemerket: Wenn man setzt

$$2^n = 1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \text{etc.},$$

so ist kein Zweifel, dass die quantitates $\beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ ihre determinatos valores haben, wie denn ex. gr. $\beta = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$; machet man aber series, in deren terminis immer mehr potestates ipsius n vorkommen, so werden zwar die series, aus welchen die quantitates $\beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ bestehen, (wie solches in der serie $1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} + \text{etc.} = 2^n$ geschieht) gleichsam mit einander verwickelt, aber diese quantitates an sich selbst bleiben nichts desto weniger invariables. So oft also dergleichen series, wo die quantitas indeterminata n in jedem termino ad diversas potestates evecta ist; vorkommen, so meine ich der sicherste Weg die summam zu finden wäre, dass man zuvorderst die coëfficientes $\beta, \gamma, \delta, \text{etc.}$ suche.

Bey Gelegenheit des von Ew. gefundenen valoris vor $(\sqrt{-1})^{n-1}$ ist mir etwas eingefallen, an dessen Möglichkeit ich noch den Tag zuvor sehr würde gezweifelt haben, nemlich dass auch diese series $A \dots \alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \text{etc.}$ und generatim alle, wo die exponentes numeri a ad formulam generalem reduciret werden können, summabiles sind, nachdem die coëfficientes $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$ determiniret werden, denn wenn gesetzt wird

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \text{etc.}$$

$$\beta = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1.3}{2.4} + 3 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 4 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \text{etc.}$$

$$\gamma = 1 \cdot \frac{1.3}{2.4} + 3 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 6 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + 10 \cdot \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + \text{etc.}$$

$$\delta = 1 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 4 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + 10 \cdot \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + 20 \cdot \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} + \text{etc.}$$

etc.

so ist die series $A = a^{\frac{1}{2}}$, und nach eben denselben valoribus pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. wird

$$B \dots \alpha a^a - \beta a^{2a^2} + \gamma a^{3a^3} - \delta a^{4a^4} + \text{etc.} = \sqrt{a} \sqrt{a} = a^{\frac{a}{2}}$$

Meine continuirliche distractions sind zum Theil daran Schuld, dass sich in meine Briefe manche Fehler einschleichen, die ich wohl verhüten könnte; und so ist es auch mit meinem letzten P. S. ergangen, indem ich bey genauerer Betrachtung desselben noch vor Ankunft Ew. Schreibens bemerket, dass beyde quantitates u und z auf solche Art nicht eliminirt werden können, sondern eine davon übrig bleibt, wie denn die drey valores von u , so durch selbige drey aequationes gefunden werden, nichts anders sind, als

$$\left(\text{posito } m = 2a + p - v \right), \frac{(av + ap - mz)^2}{mmqq - 2a(p+v)mz + mmzz} = uu.$$

Die Solution, welche Ew. in Dero letztem Schreiben anführen, hat wegen ihrer Kürze und Deutlichkeit für den vorigen, in meinen Augen einen grossen Vorzug; nur dieses scheineth mir noch bedenklich: dass, weil das differentiale von $RO = -dq$ und folglich $CM + MO = \text{constanti}$, wenn dieses constans a gesetzt wird, nicht nur Mm ein elementum ellipseos, sondern die ganze curva quaesita eine ellipsis seyn wird, deren axis durch die focos C und O gehet und $= a$ ist, nur mit dem Unterschiede, dass die abscissae CP und die applicatae MP (wie sie von Ew. durch r und u

bestimmt sind) nicht ad ipsum axem curvae, sondern ad rectam positione datam et per focum C productam genommen werden müssen, es mag im übrigen r eine functionem quamcunque ipsius u andeuten.

Wenn man von nachfolgender serie

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3.5} + \frac{531}{3.5.7} + \frac{8601}{3.5.7.9} + \text{etc.},$$

deren lex progressionis diese ist, dass dato termino quocunque A et exponente ejus x , der terminus sequens sey $B = \frac{4xA+1}{2x+1}$, die formulam generalem geben könnte, dürfte man nur in dem termino generali setzen $x = \frac{1}{2}$, so würde die area circuli, cujus diameter $= 1$, herauskommen.

Goldbach.

