

LETTRE XCV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Sommaton de la série de la lettre précédente.

Berlin d. 28. Mai 1746.

— Die von Ew. gemeldte series

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 14} + \text{etc.}$$

kann durch meine Methode leicht gefunden werden. Denn wenn ich nach der lege progressionis noch die zwey vorhergehenden terminos dazu setze, so kommt

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{7}{10} + \text{etc.}$$

Diese ist in der folgenden enthalten, wenn man setzt $x = 1$

$$s = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} x^6 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5}{8} x^8 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{7}{10} x^{10} + \text{etc.}$$

Man differentiire diese seriem und theile allenthalben durch dx , so bekommt man

$$\frac{ds}{dx} = 1 \cdot x^5 - \frac{1}{2} \cdot 3x^5 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 5x^7 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 7x^9 + \text{etc.}$$

Man multiplicire durch $\frac{dx}{x^3}$, so wird

$$\frac{ds}{x^3} = 1 dx - \frac{1}{2} \cdot 3x dx + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot 5x^4 dx - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 7x^6 dx + \text{etc.}$$

Wenn man nun integrirt, so bekommt man

$$\int \frac{ds}{x^3} = x - \frac{1}{2} x^5 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \text{etc.}$$

Hier siehet man leicht, dass diese series ist =

$$x(1 + xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$$

folglich ist $\int \frac{ds}{x^3} = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$ und $\frac{ds}{x^3} = \frac{dx}{(1 + xx)^{\frac{3}{2}}}$ also

$$s = \int \frac{x^3 dx}{(1 + xx)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{x dx}{\sqrt{(1 + xx)}} - \int \frac{x dx}{(1 + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= (1 + xx)^{\frac{1}{2}} + (1 + xx)^{-\frac{1}{2}} - 2,$$

denn hier muss die quantitas constans 2 subtrahirt werden, weil positò $x = 0$, werden muss $s = 0$. Setzt man nun $x = 1$, so bekommt man:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5}{8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{9}{12} - \text{etc.}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

Letztens bin ich auf nachfolgende seriem gekommen, deren Summ, ob sie gleich so leicht ausgedrückt wird, dennoch durch diese Methode nicht wohl gefunden werden kann, denn ich komme auf eine Differentio-differential-Aequation, welche sich generaliter nicht integriren lässt: Die series ist diese:

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4 \cdot 8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 16} + \text{etc.}$$

$$= 2^n,$$

wenn also $n = 1$, so ist

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.4}{4.8} + \frac{1.5.6}{4.8.12} + \frac{1.6.7.8}{4.8.12.16} + \frac{1.7.8.9.10}{4.8.12.16.20} + \text{etc.} = 2.$$

Diese wird leicht in diese Form verwandelt:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.6} + \frac{1.3.5}{4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10} + \text{etc.} = 2(1 - (1-1)^{\frac{1}{2}}) = 2,$$

in welchem Fall die Richtigkeit leicht zu ersehen.

Ich glaube kaum, dass die ratio diametri ad peripheriam $1:\pi$ leichter per approximationem gefunden werden könne, als durch Hülfe beyder folgenden serierum:

$$p = \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \frac{1}{11 \cdot 5^{11}} + \text{etc.}$$

$$q = \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \frac{1}{9 \cdot 239^9} - \frac{1}{11 \cdot 239^{11}} + \text{etc.}$$

Denn wenn hieraus die Werthe von p und q gefunden werden, so ist $\pi = 16p - 4q$.

Nach dem letzt ergangenen Urtheil der Akademie zu Paris über den Magneten ist meiner pièce der dritte Theil des dreyfachen Preises zuerkannt worden, wie Ew. schon aus unsern Zeitungen werden ersehen haben. Hr. Bernoulli hat auch ein Drittel bekommen. Hingegen haben wir den Preis der hiesigen Akademie von 50 Ducaten, über die Winde, der pièce: *Haec ego de ventis* etc. zuerkannt, davon der auctor Hr. D'Alembert aus Paris ist.

Euler.



LETTRE XCVI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Problème catoptrique. Suite.

Berlin d. 14. Juni 1748.

Ew. letzt überschriebene Solution des problematis catoptrici hat mich anfänglich nicht wenig frappirt, da dieselbe keine differentialia in sich enthält und ich doch versichert bin, dass die Betrachtung der Reflexion nothwendig differentialia erfordere. Als ich aber die Sach genauer erwogen, habe ich bald gesehen, dass die drey gefundenen Formeln für die Linie CR unmöglich zwey quantitates incognitas determiniren können, sondern nachdem man eine bestimmt, eine aequatio identica herauskommen müsse.

Denn in einem jeglichen triangulo CMN (Fig. 24) kann eine Seite MN allzeit in O dergestalt geschnitten werden, dass $CM + MO = CN + NO$, wodurch also keine besondere