$$8(3m \mp 1)(3n \pm 1) - 3(3m \mp 1) + 3(3n \pm 1) = aa,$$

worin dasjenige, so bey dem theoremate essentiell ist, bestehet. Ich habe ferner observiret, dass wenn $emn - m - n$ kein quadratum seyn kann, auch $emn - n - e = \square$, oder wenn e ein numerus integer hujus conditionis ist, dass $\frac{aa+n}{en-1}$ niemals ein numerus integer seyn kann, alsdann auch $\frac{aa+e}{en-1}$ kein numerus integer ist.

Für die mir communicirten fürtrefflichen theoremata danke ich verbundenst.

Goldbach.

P. S. Unlängst haben I. Kais. Majestät mich (wiederum praeter meritum et petitum) zum würklichen Etatsrath nebst dem appointement von 2000 R. ernennet.

LETTRE LXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Concours de Paris pour la théorie de l'aimant. Suite des recherches arithmétiques des lettres précédentes. Sommation de diverses séries.

Berlin d. 19 September 1744

— — — M. Clairaut hat mich von neuem versichert, dass bey der letzten Untersuchung der eingeschickten pièces über den Magneten, die meinige die grösste Approbation gefunden, dass aber drey von den fünf dazu ernannten Commissariis, welche Newtonianische Attractionisten seyen, in dem Gedanken stehen, dass diese Frage nimmer auf eine mathematische Art erklärt werden könne. Nach zwey Jahren müsse aber, nach den Gesetzen der Akademie, der Preis nothwendig ausgetheilt werden. Unterdessen deucht mich, dass wenn die Herren die Auflösung dieser Frage für unmöglich halten, dieselben die von neuem darauf gesetzten 2500 livres auf eine ihrem Urtheil nach mögliche und nützlichere Frage hätten setzen sollen.

Ew. Observation dass, wenn $emn - m - n = \square$, auch $emn - m - e = \square$, kann zur Entdeckung vieler neuer theorematum Anlass geben; denn wenn $emn - m - n = \square$, so wird auch, wenn man setzt $n = pmm - m$, seyn

$$epm^3 - emm - pmm = \square \text{ oder } emp - p - e = \square.$$

Ew. thun in Dero Briefe nicht die geringste Meldung, warum Dieselben die aus Dero Reise-Journal ausgeschnittenen Blätter beygefüget haben. Ich vermuthe aber, dass hiezu die series $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} +$ etc., deren Summ von dem Hugenio $= \frac{1}{4}$ soll angegeben worden seyn, mag Anlass gegeben haben. Ich kann aber die legem progressionis dieser seriei nicht einsehen: wenn 256 anstatt 216 stehen sollte, so würde ich glauben, dass von dieser serie

$$\frac{1}{8.1} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}.\frac{6}{2}} + \frac{1}{8.\frac{4}{1}.\frac{6}{2}.\frac{8}{3}} + \text{etc.}$$

die Rede wäre, deren Summ $=$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{16.2} + \frac{1}{32.3} + \frac{1}{64.4} + \text{etc.} = \frac{1}{4} l 2$$

und folglich kleiner als $\frac{1}{4}$. Die übrigen summas, welche Ew. in diesen Blättern aufgezeichnet, habe ich bald demonstriren können. Die formula generalis

$$\frac{anxh^{x+1} - (anx + an)h^x}{m^2h^{2x+1} + mnxh^{x+1} + (mnx + mn)h^x + n^2x^2 + n^2x}$$

resolvirt sich in

$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x + nx} - \frac{\frac{an}{m}(x+1)}{mh^{x+1} + n(x+1)}.$$

Wenn nun die series, so aus dem ersten Glied entspringt, ist $A + B + C + D +$ etc., so gibt das andere Glied diese seriem $B + C + D +$ etc., folglich ist die summa $=$

$$A = \frac{an}{mmh + mn}.$$

Was Ew. in den folgenden Blättern von den imaginariis und negativis negativorum schon vor so vielen Jahren meditiret haben, ist der Wahrheit dergestalt gemäss, dass man dadurch alle Schwierigkeiten, welche über diese Materie gemacht zu werden pflegen, aus dem Grunde heben kann.

Euler.

P. S. Dass dato numero primo hujus formae $4n + 1$, allezeit eine Zahl von dieser Form $aa + 1$ gefunden werden könne, welche sich durch $4n + 1$ theilen lasse, ist deswegen gewiss, weilen der numerus primus $4n + 1$ allzeit eine summa duorum quadratorum ist. Denn wenn $4n + 1 = pp + qq$, so können immer solche Zahlen f und g gefunden werden, dass $gp - fq = \pm 1$, oder dass der Bruch $\frac{f}{g}$ dem Bruch $\frac{p}{q}$ so nahe kommt, dass wenn man einen von dem andern subtrahirt, im Zähler nur 1 überbleibt. Wenn nun solchergestalt der Bruch $\frac{f}{g}$ gefunden worden, so ist $a = fp + gq$, oder generaliter $a = (4n + 1)m \pm (fp + gq)$. Der Bruch $\frac{f}{g}$ kann aber allzeit durch meine Methode, die Brüche in kleinern Zahlen proxime auszudrücken, leicht gefunden werden. Als wenn $4n + 1 = 853$, so ist $4n + 1 = 18^2 + 23^2$ und folglich $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$. Nun stelle ich zwischen den Zahlen 23 und 18 die Operation an, welche zu Findung des maximi communis divisoris gebraucht wird, als

18	23	1
5	18	3
3	5	1
2	3	1
1	2	2
	"	

Diese quotos schreibe ich hinter einander und formire daraus folgende Brüche

$$\overset{1,}{\frac{1}{0}},\quad \overset{3,}{\frac{1}{1}},\quad \overset{1,}{\frac{4}{3}},\quad \overset{1,}{\frac{5}{4}},\quad \overset{2}{\frac{9}{7}}$$

nehmlich ein jeder numerator oder denominator, mit der obgeschriebenen Zahl multiplicirt, gibt nebst dem vorhergehenden numerator oder denominator addirt, den folgenden numerator oder denominator. Also ist

$$9 = 1.5 + 4,\ 7 = 1.4 + 3 \text{ etc.}$$

Der letzte Bruch $\frac{9}{7}$ kommt nun dem $\frac{23}{18}$ so nahe, dass die Differenz, $\frac{1}{7.18}$, durch einen Bruch exprimirt wird dessen Zähler $= 1$. Da also $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$, so ist $\frac{f}{g} = \frac{9}{7}$ und also

$$a = 9.23 + 7.18 = 333;$$

folglich $333^2 + 1$ divisibel durch 853.

Exempl. 2. Es sey $4n + 1 = 178481 = 391^2 + 160^2$, so operire ich also

160	391	2
71	160	2
18	71	3
17	18	1
1	17	17
	"	

$$\overset{2,}{\frac{1}{0}},\quad \overset{2,}{\frac{2}{1}},\quad \overset{3,}{\frac{5}{2}},\quad \overset{1,}{\frac{17}{7}},\quad \overset{17}{\frac{22}{9}} \ldots \frac{391}{160}.$$

Daher ist $a = 22.391 + 9.160 = 10042$, welches die kleinste Zahl ist, deren Quadrat $+ 1$ theilbar ist durch 178481, denn

$$aa + 1 = 100841765 = 178481.565.$$