LETTRE LXIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Nouvelle démonstration du théorème $4mn - m - 1 = a^2$. Détermination approximative de la valeur de π. Théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 30 Juli n. st. 1745.

Nachfolgende Demonstration habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine propositiones abgetheilet, damit Ew. diejenige, bei welcher sie einigen Anstand finden möchten, desto bequemer anzeigen könnten:

1. In aequatione $4mn - m - 1 = aa$ pono aa quadratum integrum minimum omnium eorum quae aequationi satisfacere possunt (si quae possunt).

2. Utrique aequationis parti addo $-4ma + 4mm$, fiet $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$.

3. In hac aequatione non potest fieri $a = m$ (posset enim altera pars aequationis dividi per m, altera non posset).

4. Neque potest fieri $a > m$, esset enim $n - a + m < n$, adeoque $(a - 2m)^2 < a^2$, quod est contra hypothesin, cum aa sit omnium possibilium minimum.

5. Restat ergo ut sit $a < m$.

6. Similiter si ad aequationem $4mn - m - 1 = aa$ ex utraque parte addatur $-4an + 4nn$, fiet $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.

7. In hac aequatione non potest fieri $a = n$, propterea quod foret

$4mn - m - 1 = nn$ seu $n = 2m + \sqrt{(4mm - m - 1)}$, qui numerus nequit esse rationalis.

8. Sed non potest fieri $a > n$, quia $(m - a + n)$ fieret $< m$ et $(a - 2n)^2 < aa$, *quod est contra hypothesin.*

9. Restat igitur ut a sit $< n$, et quia jam supra prop. 5 ostensum est $a < m$, sequitur $aa < mn$.

10. Erit igitur $4mn - m - 1 < mn$, quod est absurdum.

Ergo inter omnia quadrata (si quae sunt) hujus formae $4mn - m - 1$ non datur minimum in integris, ergo datur nullum.

Diese Demonstration kann etwas kürzer gefasset und nur allein gezeiget werden, dass a non $> m$, nec $> n$, woraus schon folget, dass $4mn - m - 1$ non $> mn$, quod est absurdum.

Was die von Ew. angeführte Aequation

$$\frac{1}{m(m-a)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

für eine influence in die series B, C, D, etc. habe, sehe ich noch nicht.

Mir ist es wahrscheinlich, dass eine solche series

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \text{etc.} = \pi$$

gefunden werden könne, darin die numeratores a, b, c, etc. (entweder integri oder fracti) allezeit grösser werden, obgleich die Methode, selbige numeratores zu determiniren, vielleicht niemals bekannt werden wird; denn durch formulas algebraicas diese numeratores zu bestimmen, ist in sofern eine vergebliche Mühe, als man persuadiret seyn kann, dass die ratio diametri ad peripheriam nicht in numeris rationalibus bestehet; doch gibt es einige merkwürdige approximationes. Es ist z. Ex. eine sehr leichte progressio numerorum secundum hanc formulam $\frac{2xx-4x+12}{10^x}$, und wenn ich 7 solcher terminorum zu 2 addire, so wird die summa 3,1415922.

Ew. danke ich dienstl. für die Communication der Zahlen a, welche $4aa+1$ numerum primum geben. Den Aufsatz von dergleichen Zahlen bis 1000 habe ich zwar schon; ich weiss aber denselben jetzo unter meinen andern Schriften nicht hervor zu finden. Dass aus solchen Zahlen eine ordentliche series herausgebracht werden sollte, zweifle ich sehr. Es haben aber nicht allein alle quadrati aa, welche in der formula $4nn+2(2m-1)n+m-1$ nicht vorkommen, diese Eigenschaft, dass sie in $4aa+1$ einen numerum primum geben, sondern alle trigonales in illa formula non extantes geben gleichfalls $4\triangle+1$ numerum primum und die Formul $4nn+2(2m-1)n+m-1$ kommt dermaassen mit dieser $4MN+M+N$ überein, dass kein casus in der einen ist, welcher nicht in der andern assignabilis wäre (wie denn auch alle casus $4nn+2(2m-3)n-(m-1)$ in dieser Formul $4MN-M-N$, et contra, enthalten sind). Wenn man also nach der Formul $4MN+M+N$ folgende Tabelle formiren wollte:

6.	11.	16.	21.	26.	31.	36.	41...
	11.	20.	29.	38.	47.	56.	65...
		16.	29.	42.	55.	68.	81...
			21.	38.	55.	72.	89...
				26.	47.	68.	89...
					31.	56.	81...
						36.	65...
							41...

so könnte man festsetzen, dass alle in dieser Tabelle nicht enthaltene sowohl trigonales als quadrati per 4 multiplicati, addita unitate, numeri primi sind.

Ich erinnere mich in den Göttinger gelehrten Zeitungen gelesen zu haben, dass wenn $4m+1$ ein numerus primus ist, selbiger allezeit eine summa duorum quadratorum sey, welche Observation ohne Zweifel von Ew. kommt, und mir schon vorher bekannt war. Gleichwie aber auf diese Weise in den numeris primis hujus formae $4m+1$ allezeit wird $m=aa+bb\pm b$, hoc est *duplo trigonali plus quadrato*, so halte ich davor, dass in den numeris primis $4m-1$ allezeit seyn wird $m=2(a-1)^2+\frac{bb-b}{2}$, hoc est *duplo quadrato + trigonali*. Sit ex. gr. $m=1$, erit $a=b=1$; $m=2$, erit $a=2$, $b=1$; $m=3$, erit $a=b=2$, etc.

Als ich vor einigen Wochen in einem Buche schon A. 1718 von mir notiret fand $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\text{etc.}=1$, nebst der lege denominatorum $2+1=3$, $2.3+1=7$, $2.3.7+1=43$, $2.3.7.43+1=1807$ etc., schrieb ich gleich dabei: si terminus primus fuerit $\frac{1}{a}$, lex progressionis ut dato termino quocunque $\frac{1}{A}$, fiat terminus sequens

$\frac{1}{A(A-1)+1}$, erit summa seriei $\frac{1}{a-1}$; ich erinnere mich aber nicht mehr, worin meine Demonstration bestanden, und danke Ew. desfalls um so viel mehr, dass Sie mir die Ihrige communiciren wollen, welche ganz evident ist. Sonst halte auch bey dieser serie die leichte Art, dato termino quocunque die summam ipsius seriei usque ad hunc terminum zu finden, für merkwürdig. Sit terminus quicunque datus $\frac{1}{A}$, erit summa ejusdem et omnium sequentium terminorum $= \frac{1}{A-1}$, summa vero ipsius seriei usque ad hunc terminum $\frac{1}{A}$ exclusive erit $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{A-1}$.

Dass H. Rasumovsky und H. Teplov bey Ew. logiren und sich noch eine Zeit lang in Berlin aufhalten werden, ist mir sehr lieb; Ew. werden hiedurch nicht allein Gelegenheit haben die Russische Sprache ferner zu excoliren, sondern auch die hiesigen nova academica von denselben recht frisch erhalten können.

Goldbach.

LETTRE LXIV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse aux articles de la lettre précédente.

Berlin d. 24 August 1745.

Wenn $4mn - m - 1$ in einem Fall ein quadratum wäre, so würde man gleich unendlich viel andere casus daraus finden können. Wenn nun Ew. annehmen, dass aa das kleinste quadratum sey, welches in formula $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muss nothwendig a kleiner seyn als m, und daher haben die 5 ersten propositiones ihre völlige Richtigkeit. Wenn aber Ew. ferner zu dieser Aequation fortgehen $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$, weilen dieselben nicht in der vorgelegten Form $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht, dass $(a - 2n)^2$ kleiner seyn müsse als a^2, denn $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche quadratum geben, ungeacht $4n(m - a + n) - m - 1$ einem