

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.}$$

zu summiren, welche bloss allein durch Differentiation geschieht. — Vor etlichen Wochen hat man wiederum einen Cometen allhier gesehn, welcher aber ohne Schwanz und sehr klein war, auch nur 10 Tage lang aus dem Dracone durch Ursam majorem in Leonem minorem gehend observirt worden; es ist aber keine so accurate Observation gemacht worden, wodurch man seinen Lauf bestimmen könnte. Die Opera Joh. Bernoullii omnia werden bald aus der Presse kommen und unserm König dedicirt werden. Es nimmt mich sehr Wunder ob Ew. mit der Akademie in gar keiner Connexion mehr stehen.

Euler.



LETTRE LVII.

GOLDBACH À EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 25 März 1743.

Endlich stellet sich die demonstratio nova ein, so im Folgenden bestehet:

Lemma 1. Si aequatio $B \dots 4mn - m - 1 = a^2$ non est possibilis casu quo m est numerus hujus formae $4u - 1$, neque ullo alio casu ipsius m erit possibilis, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

Lemma 2. Si vera est aequatio B , vera etiam erit $C \dots 4Mn - M - 1 = A^2$, posito $M = 2a + m + 4n - 1$, fiet enim $A = a + 4n - 1$.

Sed aequatio C non potest fieri vera, nisi M sit numerus hujus formae $4v - 1$ (per lemma 1), erit igitur $M = 4v - 1 = 2a + 4n - 1 + 4u - 1$, ergo $4v = 2a + 4n + 4u - 1$,

hoc est numerus par = numero impari, quod est absurdum, ergo et aequatio *B* est absurda.

Similiter de aequatione *D* . . . $4pmn - m - n = a^2$ iudicandum est, quae vera esse non potest, nisi sit *m* hujus formae $4n^2q - n$ (ut in superioribus litteris ostensum fuit), quo facto erit $4pnM - M - n = A^2$, si ponatur

$$M = ((4pn - 1) + 2a + m), \quad A = (4pn - 1) + a.$$

Sed quia *m* est hujus formae $4n^2q - n$ et *M* hujus formae $4n^2Q - n$, habebitur $4pn - 1 + 2a + 4n^2q = 4n^2Q$, hoc est numerus impar = numero pari, quod est absurdum, ergo et aequatio *D* est absurda.

Was ich von den radicibus imaginariis erinnern wollen, gehet eigentlich dahin, dass weil die vier folgenden radices:

$$x = \begin{cases} -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{aa}{4} + \sqrt{\left(\frac{a^4}{4} - f\right)}\right)} \\ +\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{aa}{4} - \sqrt{\left(\frac{a^4}{4} - f\right)}\right)} \end{cases}$$

in se ductae $x^4 \pm 2a\left(\frac{a^4}{4} - f\right)^{\frac{1}{2}}x + f = 0$ geben, folglich

auch so oft als *f* und $2a\sqrt{\left(\frac{a^4}{4} - f\right)}$ numeri reales sind,

zweene von gemeldten radicibus in se ductae numeros reales hervorbringen müssen; wenn aber Ew., wie Sie in Dero letztern Schreiben melden, die Wahrheit Ihres asserti von allen aequationibus quartae potestatis demonstriren können, so cessiret das angeführte dubium von selbst.

Aus den in Ew. Schreiben beygebrachten Umständen sehe ich wohl, dass die von mir angegebene summa aus einem Irrthum entstanden, wobey ich die von M. Vaugelas in den *Remarques sur la langue française* gemachte Erinnerung appliciren muss, wenn er saget, dass im Fall es sich finden sollte, dass er selbst anders geschrieben, als er nach seinen

Remarques hätte schreiben sollen, man alsdann nicht seinem Exempel, sondern seinen Regeln zu folgen habe. Es ist mir also sehr lieb, dass Ew. an meiner Methode etwas Gutes gefunden, ohngeachtet in die von mir angeführten Exempel einige Fehler eingeschlichen sind.

Wäre mir Ew. lemma, wodurch $\frac{1}{x^m(x+a)^n}$ in andere series resolviret wird, eher bekannt gewesen, so hätte ich die erwähnten summas viel leichter und ordentlicher finden können. Ich habe indessen angemerket, dass wenn die summa seriei, deren formula generalis ist $\frac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen und = *a* gesetzt wird, alsdann jede series, cujus terminus generalis est $\frac{1}{(6x+p)^2}$, ubi *p* sit numerus quicunque integer, exprimeret werden kann per *a* et quadraturam circuli, hingegen kann ich die series hujus formae $\frac{1}{(12x+p)^2}$, dato *p* numero quocunque, nicht anders ad quadraturam circuli reduciren, als cognitis summis trium casuum $p = 11$, $p = 10$, $p = 9$, aut aliorum trium his aequivalentium.

Es wird Ew. vermuthlich nicht schwer seyn Ihr lemma auch auf $\frac{ax^{2n-2} + \beta x^{2n-3} + \gamma x^{2n-4} + \text{etc.}}{(px+q)^n(px+r)^n}$ zu extendiren; so ist z. Ex. positis $p = 4$, $q = -3$, $r = +1$, die summa seriei $\frac{ax^2 + \beta x + \gamma}{(4x-3)^2(4x-1)^2} = \frac{a(64u + \pi^2 - 6\pi)}{2^8} + \frac{\beta(16u + \pi^2 - 4\pi)}{2^7} + \frac{\gamma(\pi^2 - 2\pi)}{2^6}$ wenn *u* die summam seriei $\frac{1}{(4x-3)^2}$ andeutet.

Imgleichen, wenn $p = 4$, $q = -2$, $r = 0$, so wird die summa seriei

$$\frac{ax^2 + \beta x + \gamma}{(4x-2)^2(4x)^2} = \frac{a\pi^2}{2^9} + \frac{\beta(\pi^2 - 812)}{2^8} + \frac{\gamma(\pi^2 - 1212)}{3 \cdot 2^6}$$

Wenn man setzt $v = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}$

$$A = \frac{1}{nn(n+1)} + \frac{(2n+1)}{(n+1)^2 nn} \left(\nu + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{\pi\pi}{6(n+1)n}$$

$$B = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} - \frac{(2n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2} \left(\nu + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \frac{\pi\pi}{6(n+2)(n+1)}$$

$$C = \frac{1}{(n+2)^2(n+3)} - \frac{(2n+5)}{(n+3)^2(n+2)^2} \left(\nu + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) + \frac{\pi\pi}{6(n+3)(n+2)}$$

so werden die quantitates *AC* et *BB* desto weniger von einander differiren, je grösser der numerus *n* genommen wird.

Was Ew. von der summa seriei *B* in Dero Schreiben beyfügen, halte ich für sehr merkwürdig. Die Dissertation *de inventione termini summatorii* erinnere ich mich nicht gesehen zu haben, weiss auch nicht, ob dieselbe in Berlin oder allhier herausgekommen ist. Für die mir communicirten summas in terminis decimalibus danke ich ergebenst.

Goldbach.

LETTRE LVIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Insuffisance de la démonstration de Goldbach du théorème $4mn - m - 1 \equiv a^2$. Résolution des fractions composées en fractions simples. Rapport fini entre deux séries infinies. Le terme général d'une série étant donné, trouver le terme sommatoire de cette série. Méthodes d'approximation pour trouver le nombre π .

Berlin d. 9 April 1743.

Ew. bin ich für die mir gütigst überschriebene Demonstration, dass $4mn - m - 1$ keine Quadratzahl seyn kann, gehorsamst verbunden. Die raisonnemens darin sind wegen der propositionum exclusivarum und infinitarum, so darin häufig vorkommen, so tiefsinnig, dass ich viele Mühe gehabt, ehe ich dieselben habe völlig einsehen und aus einander wickeln können, und die gewöhnlichen Regeln der Logik scheinen mir dazu kaum hinlänglich zu seyn. Alles beruhet auf dem ersten lemmate, und wenn dasselbe seine Richtigkeit hat, so ist an der Demonstration nicht das Geringste auszusetzen. Ew. berufen sich wegen dieses lemmatis auf