LETTRE LII.

═

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Continuation des recherches des lettres précédentes sur les nombres et les séries.

Berlin d. 5. Januar 1743.

— — Ew. Demonstration, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, will mir noch kein völliges Genüge leisten. Denn, ungeacht dass, wenn $4mn - m - 1 \neq \square$, auch seyn muss $4mn - m - n \neq \square$ und $4mn - m - n^2 \neq \square$, so folgt doch nicht hinwiederum quibus casibus pro m et n substitutis una formula quadratum esse nequeat, iisdem casibus reliquas formulas quadrata esse non posse. Dieses erhellet aber deutlicher, wenn man die derivationem der übrigen Formuln aus der ersten betrachtet, nehmlich aus $4mn-m-1$. Man setze also $m = 4p - 1$, so kommt $4(4np - n - p)$; wenn also $4mn - m - 1$ auf keinerley Art ein quadratum

seyn kann, so kann diese Formul auch kein Quadrat seyn, casu $m = 4p - 1$, und folglich kann auch $4np - n - p$ kein quadratum seyn. Nun aber haben Ew. nur gewiesen, dass wenn m vel n sey $= 4u + 1$, die Formul $4mn-m-1$ kein quadratum seyn könne, und dahero folget daraus nicht, dass $4np - n - p$ kein Quadrat seyn könnte, eodem casu n vel $p = 4u + 1$. Ferner ist klar, dass wenn man nur bewiesen hätte, dass $4mn - m - 1 \neq \square$ casu $m = 4u - 1$, daraus schon folgen würde, dass $4np - n - p \neq \square$. Wenn aber bewiesen wäre, dass $4np - n - p \neq \square$, so würde daraus nur folgen, dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könnte casu quo $m = 4u - 1$, aber nicht generaliter. Wenn man aber nicht beweisen könnte, dass $4mn - m - 1$ kein quadratum seyn könne casu $m = 4u - 1$, so würde daraus schon folgen, dass $4mn - m - n$ ganz und gar kein quadratum seyn könne. Vielleicht dürfte aber das theorema generale $4mnp - m - n \neq \square$, wovon Ew. keine Meldung thun, leichter zu demonstriren fallen. Es ist aber für sich klar, dass wenn entweder $m + n = 4u + 1$ oder $m + n = 4u + 2$, die Formul $4mnp - m - n$ kein quadratum seyn könne; dahero nur die beiden casus $m + n = 4u$ und $m + n = 4u - 1$ zu demonstriren übrig bleiben. Wenn man für den ersten Fall setzt $m = 2u + a$ und $n = 2u - a$, so hat man zu beweisen, dass $p(4uu - aa) - u$ kein Quadrat seyn könne. Es kann also diese Formul $\frac{bb+u}{4uu-aa}$ kein numerus integer seyn. Ponatur $a = 2u - c$, so kann $\frac{bb+u}{c(4u-c)}$ kein numerus integer seyn, und hieraus können unendlich viel schöne theoremata hergeleitet werden. Ich muss indessen gestehen, dass ich aller angewandten Mühe ungeacht, noch keine Demonstration von diesem theoremate habe fin-

*

den können, dass $4mnp - m - n = \pm$ quadrato. Es kommt aber darauf an, dass man demonstrire, dass eine solche Zahl $4paa + 1$ nimmer divisibilis seyn könne per numerum formae $4pq - 1$. Es sind aber alle mögliche divisores formulae $4paa + 1$ enthalten in einer gewissen Anzahl solcher Formuln $4np + 1$, $4np + \alpha$, $4np + \beta$, $4np + \gamma$ etc., wobey zu merken, dass wenn unter den Zahlen α, β, γ etc. eine Zahl f enthalten ist, zugleich alle potestates ipsius f darunter vorkommen; und wenn darunter zwey Zahlen f et g vorkommen, so müssen auch alle potestates einer jeden, und alle daraus möglichen producta vorkommen. Wenn man also einen oder etliche numeros pro α, β, γ etc. weiss, so kann man zugleich die übrigen finden. Die simpelsten divisores aber der Formul $4paa + 1$ sind die valores dieser Formul selbst, wenn pro a ein numerus determinatus gesetzt wird, und also hat man für α, β etc. solche valores primitivos $4p + 1$, $16p + 1$, $36p + 1$. Daher entstehen, wenn man alle potestates nimmt und solche in einander multiplicirt, alle übrigen valores litterarum α, β, γ, δ etc. Es ist aber klar, dass alle diese Zahlen von solcher Form $4mp + 1$ seyn werden. Dahero alle divisores formulae $4paa + 1$ nothwendig also seyn müssen $4np + 4mp + 1$ und kann also eine solche Zahl $4np - 1$ nimmer ein divisor seyn. Dieses ist aber nur wahr in sofern die divisores primitivi von der Form $4mp + 1$ sind. Wenn aber ein derivativus von der Form $4mp - 1$ wäre, so müsste auch ein primitivus diese Form haben. Hieraus folget nun so viel, dass wenn dieses theorema bei kleinen Zahlen wahr ist, dasselbe auch bei grossen wahr seyn müsse. — Wenn gleich Sharp sagt, dass er von seiner letzten Figur in quadratura circuli sicher sey, so kann doch solches nicht behauptet

werden, wenn er nicht zum wenigsten auf 3 oder 4 Figuren weiter hinaus gerechnet hat, welches doch nicht geschehen. Dahero dieses schon als ein Merkmal der Accuratesse zu halten, dass seine letzte Figur nur um 1 zu klein ist. Ich kann mich auch nicht erinnern, dass ich jemals um dieser Ursach willen an der Richtigkeit des Lagni's Zahlen gezweifelt habe. — Bey der Materie über die globulos sanguineos habe ich nicht so genau angenommen, dass die globuli rubri mit der ganzen massa einerley gravitatem specificam haben; denn meine Reflexionen bleiben einerley, wenn gleich dieselbe 2 oder mehr mal grösser oder kleiner angenommen würde. Unterdessen ist doch so viel gewiss, dass die gravitas specifica der globorum rubrorum nicht so sehr viel vom Wasser differiren wird; es wäre denn, dass man dieselben niemals pur ohne Vermischung der lymphae bekommen könnte, in welchem Fall es freylich nicht mehr auf die gravitatem specificam allein ankommen würde um die Unmöglichkeit des progressus in infinitum zu zeigen.

Ich hatte dieses theorema: Si

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \text{etc.}$$

dem Hn. Professori Nicolao Bernoulli geschrieben, wovon er mir nachfolgende schöne Demonstration zugeschickt. Er schreibt x^n für a, und t für sx, eritque

$$sx = t = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \text{etc.}$$

qua differentiata prodibit $dt = dx(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \text{etc.})$.

Diese zwey series multiplicirt er mit einander, terminos secundum potestates ipsius x ordinando, und bekommt

$$tdt = dx\Big(x + x^{n+1}\big(1 + \tfrac{1}{n+1}\big) + x^{2n+1}\big(1 + \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1}\big)$$
$$+ x^{3n+1}\big(1 + \tfrac{1}{n+1} + \tfrac{1}{2n+1} + \tfrac{1}{3n+1}\big) + \text{etc.}$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}s^2x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)$$
$$+ \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\Big) + \text{etc.};$$

dividatur per xx, et ob $x^n = a$ erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big) + \frac{a^2}{2n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\Big) + \text{etc.}$$

Er geht auf diese Art weiter und multiplicirt $\frac{1}{2}tt$ nochmal mit dt und findet post integrationem

$$\frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6} + \frac{a}{n+3}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)\Big)$$
$$+ \frac{aa}{2n+3}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)$$
$$+ \frac{1}{2n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\Big)\Big)$$
$$+ \frac{a^3}{3n+3}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1}\Big)$$
$$+ \frac{1}{2n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\Big)$$
$$+ \frac{1}{3n+2}\Big(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3n+1}\Big)\Big) + \text{etc.}$$

Um nun auf solche summationes zu kommen, dergleichen Ew. gefunden, so sey $n = 1$, erit

$$s = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \text{etc.} = \frac{1}{a}\,l\cdot\frac{1}{1-a}$$

unde fit

$$A\cdots\frac{1}{2aa}\Big(l\cdot\frac{1}{1-a}\Big)^2 = \frac{1}{2} - \frac{a}{3}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) + \frac{a^2}{4}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big)$$
$$+ \frac{a^3}{5}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \text{etc.}$$

Sit $n = 2$, erit $s = 1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{5} + \frac{a^3}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,l\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$ unde fit

$$B\cdots\frac{1}{8a}\Big(l\cdot\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\Big)^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{4}\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) + \frac{a^2}{6}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\Big)$$
$$+ \frac{a^3}{8}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\Big) + \text{etc.}$$

Sit $n = 2$ et $a = -b$, erit $s = 1 - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^3}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{\sqrt{b}}A.\,\text{tang.}\,\sqrt{b}$, unde fit

$$C\cdots\frac{1}{2b}(A.\text{tang}\,\sqrt{b})^2 = \frac{1}{2} - \frac{b}{4}\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) + \frac{b^2}{6}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\Big)$$
$$- \frac{b^3}{8}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\Big) + \text{etc.}$$

Ponatur in A, $a = -1$; et in C, $b = 1$, ob $A.\text{tang.}\,1 = \frac{\pi}{4}$, erit

$$D\cdots\frac{1}{2}(l\,2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big)$$
$$- \frac{1}{5}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \text{etc.}$$

$$E\cdots\frac{\pi\pi}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\Big)$$
$$- \frac{1}{8}\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\Big) + \text{etc.}$$

$$F\cdots\frac{1}{8}(l2)^2 = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big) + \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\Big) - \text{etc.}$$

$$E - F\cdots\frac{\pi\pi}{32} - \frac{1}{8}(l2)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) + \frac{1}{6}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\Big)$$
$$- \frac{1}{8}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\Big) + \text{etc.}$$

$$E+F\ldots\frac{\pi\pi}{32}+\frac{1}{8}(l2)^2=$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

Si D subtrahatur a serie

$$\frac{\pi\pi}{12}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

erit

$$G\ldots\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

Quoniam si fuerit $s=a-b+c-d+e-$ etc. et $t=a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc., erit summa factorum ex binis terminis seriei $s=\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}t$ eritque adeo

$$\frac{1}{2}ss-\frac{1}{2}t=-b.a+c(a-b)-d(a-b+c)+e(a-b+c-d)-\text{etc.}$$

addendo t erit

$$\frac{1}{2}ss+\frac{1}{2}t=aa-b(a-b)+c(a-b+c)-d(a-b+c-d)+e(a-b+c-d+e)-\text{etc.}$$

Sit $s=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-$ etc., erit $s=l2$ et $t=\frac{\pi\pi}{6}$, unde fit

$$H\ldots-\frac{1}{2}(l2)^2+\frac{\pi\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}=G.$$
$$I\ldots\frac{\pi\pi}{12}+\frac{1}{2}(l2)^2=1.1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

$$D+H\ldots\frac{\pi\pi}{12}=1-\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{3}\right)$$
$$+\frac{2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\text{etc.}$$

seu

$$\frac{\pi\pi}{12}=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{21}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$$
$$+\frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\text{etc.}$$

Hier sind nun die beiden series G und I die beiden erstern, welche Ew. überschrieben.

Es ist bey der series $1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{16}+\frac{x^4}{25}+\frac{x^5}{36}+$ etc. merkwürdig, dass dieselbe nur in drey Fällen summirt werden kann, welche sind $x=1$, $x=-1$ und $x=\frac{1}{2}$. Der letztere casus folgt aber aus der serie G kraft dieses theorematis: Si $s=1.a-\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{3}(a+b+c)-$ etc. erit $s=\frac{a}{1.2}+\frac{1}{2.4}(a-b)+\frac{1}{3.8}(a-2b+c)+\frac{1}{4.16}(a-3b+3c-d)+\frac{1}{5.32}(a-4b+6c-4d+e)+$ etc. Wenn nun für $a+b+c+d+$ etc. diese series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$ etc. gesetzt wird, so ist $s=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2$. Um aber zu finden, was diese Expression

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}$$

betrage, so setze ich

$$z=x-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

und differentiando wird

$$dz=dx\left(1-\frac{n}{1}\cdot x+\frac{n(n-1)}{1.2}.x^2-\text{etc.}\right)=dx(1-x)^n,$$

dahero integrando $z=\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$ und facto $x=1$ fit

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\text{etc.}=\frac{1}{n+1}.$$

Dahero ist

$$\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(l2)^2=\frac{1}{1^2.2}+\frac{1}{2^2.4}+\frac{1}{3^2.8}+\frac{1}{4^2.16}+\frac{1}{5^2.32}+\text{etc.}$$

Was aber Ew. beide letztern series betrifft, nehmlich

$$p=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

$$q=\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$-\frac{1}{25}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\text{etc.}$$

so ist klar, dass

$$p-q=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\text{etc.}\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{\pi\pi}{12}l2$$

und also wenn die Summ von einer bekannt wäre, daraus die andere gleich summirt werden könnte. Es ist zwar

$$\frac{13}{1440}\pi^4=1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

ich habe aber noch keinen Weg entdecken können, um die valores p et q zu bestimmen, dahero von Ew. die Methode diese series zu summiren mit grossem Verlangen erwarte. Wenn Ew. hernach auch diese seriem

$$r=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\text{etc.}$$

summiren könnten, so würden die beyden series $p+r$ die schon längst gesuchte summam dieser seriei

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\text{etc.}$$

geben.

Euler.

P. S. Mr. Clairaut hat mir nun geschrieben, dass meine nach Paris geschickte pièce zu rechter Zeit glücklich angekommen.