LETTRE XLIV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Travaux d'Euler. Sommation des séries des puissances réciproques. Formules à exposans imaginaires. Recherches sur les nombres et diviseurs. Sur les deux théorèmes de la lettre précédente.

Berlin d. 30 Juni 1742.

— — Ich werde nun bald wieder eine Dissertation nach Paris schicken Sur la meilleure manière d'observer l'inclinaison de l'aiguille aimantée, und da ich bei dieser Gelegenheit auf die theoriam magnetis meditirt, so habe ich endlich ein sehr simples und den legibus naturae gemässes systema gefunden, wodurch ich alle proprietates und phaenomena magnetis et ferri auf eine sehr leichte und deutliche Art erklären kann, über welche Materie ich künftiges Jahr eine pièce nach Paris senden werde.

Letztens habe ich wiederum eine pièce nach Petersburg de oscillationibus pendulorum flexibilium geschickt, und nächstens wird hier der 7[te] tomus Miscellaneorum zum Vorschein kommen, darin ich eine ziemliche Anzahl Pièces gegeben. Einige davon handeln von einer neuen Art die summas serierum potestatum reciprocarum zu finden. Erstlich habe ich eine Methode gegeben alle formulas differentiales rationales zu integriren, da dann das integrale, wenn dasselbe nicht algebraicum ist, entweder a logarithmis, oder a quadratura circuli, oder von beiden zugleich dependiret. Hieraus habe ich das integrale dieser Formul $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ generaliter exprimirt und dabei gefunden, dass wenn man setzt $x = 1$, alsdann im integrali sich die membra logarithmica destruiren, und nur diejenigen, so a quadratura circuli dependiren, übrigbleiben, welche zusammengenommen endlich auf diese Expression $\frac{\pi \cos \frac{m}{n} \pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi}$ reducirt werden. Hierauf habe ich die Formul $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ per series integrirt, modo ordinario, und nachdem ich $x = 1$ gesetzet, diese Aequation gefunden

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n} \pi}{n \sin \frac{m}{n} \pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc.}$$

alwo $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam bedeutet, und folglich posito radio, seu sinu toto $= 1$, die halbe peripheria oder der arcus 180^0 durch π angedeutet wird; und also wird $\frac{m}{n} \pi$ ein arcus determinatus, davon man den sinum und cosinum anzeigen kann. Nun setze ich $\frac{m}{n} = x$, so kommt diese series heraus

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{4}$, so wird $\pi x = 45^0$ und $\cos \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\sin \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und folglich $\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} -$ etc. Hieraus kann man aber per differentiationem auf höhere potestates kommen, denn sumto x variabili, ist $d.\cos \pi x = -\pi dx \sin \pi x$ und $d.\sin \pi x = \pi dx \cos \pi x$; dahero wird

$$d.\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{-\pi\pi dx (\sin \pi x)^2 - \pi\pi dx (\cos \pi x)^2}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-\pi\pi dx}{(\sin \pi x)^2}$$

ob $(\sin \pi x)^2 + (\cos \pi x)^2 = 1$, nempe quadrato radii. Also wenn die series auch differentiirt wird, so kommt

$$\frac{-\pi\pi dx}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{(1-x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(2-x)^2} - \frac{dx}{(2+x)^2} - \text{etc.},$$

und durch $-dx$ dividirt

$$\frac{\pi\pi}{(\sin \pi x)^2} = \frac{1}{xx} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \text{etc.}$$

Setzt man $x = \frac{1}{4}$, weil $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird

$$2\pi\pi = \frac{16}{1} + \frac{16}{9} + \frac{16}{25} + \text{etc. oder } \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.}$$

Man kann aber auch weiter differentiiren, und solchergestalt ad summas quarumque potestatum gelangen, denn es wird

$$d \cdot \frac{\pi\pi}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-2\pi^3 dx \cos \pi x}{(\sin \pi x)^3} = \frac{-2dx}{x^3} + \frac{2dx}{(1-x)^3} - \frac{2dx}{(1+x)^3} + \text{etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi^3 \cos \pi x}{(\sin \pi x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \text{etc.}$$

Sit $x = \frac{1}{4}$, erit $2\pi^3 = \frac{64}{1} - \frac{64}{3^3} + \frac{64}{5^3} - \frac{64}{7^3} +$ etc. Solchergestalt finde ich also die summas omnium potestatum und noch viel generaler als durch die vorhergebrauchte Methode, weil ich hier loco x quamcunque fractionem substituiren kann. Diese Methode habe ich dem Hn. Nicolao Bernoulli nach Basel geschrieben und erwarte darüber noch seine

Meinung *). Ich erinnere mich aber, dass Ew. schon vormals angemerkt haben, dass wenn man die Summ von dieser serie wisse $\frac{1}{a+\alpha x} + \frac{1}{b+\beta x} + \frac{1}{c+\gamma x} +$ etc., man daraus per differentiationem die Summ von dieser finden könne $\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n} + \frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n} + \frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n} +$ etc., wovon meine summatio hier ein casus ist.

Generaliter ist $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 2\cos A.pl2$. Wenn also $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ soll $= 0$ seyn, so muss $pl2$ einem solchen arcui circuli gleich seyn, dessen cosinus $= 0$. Diese Eigenschaft aber haben alle arcus in hac formula contenti $\frac{(2n+1)\pi}{2}$, und folglich wird $p = \frac{(2n+1)\pi}{2l2}$. Dahero posito $p = \frac{(2n+1)\pi}{2l2}$ oder $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, so wird $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} = 2\cos A.xpl.2 = 2\cos A \cdot \frac{(2n+1)x\pi}{2}$. Wenn also seyn soll $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}} = 2^{rp\sqrt{-1}} + 2^{-rp\sqrt{-1}}$, so muss $\cos A \cdot \frac{(2n+1)q\pi}{2} = \cos A \cdot \frac{(2n+1)r\pi}{2}$. Die cosinus aber von zweyen verschiedenen arcubus sind einander gleich, wenn entweder die summa oder differentia arcuum gleich ist einem multiplo von der ganzen Peripherie 2π. Dahero wird $\frac{(2n+1)q\pi}{2} \pm \frac{(2n+1)r\pi}{2} = 2m\pi$ und folglich $q \pm r = \frac{4m}{2n+1}$, so dass seyn wird

$$2^{\left(\frac{4m}{2n+1} - q\right)p\sqrt{-1}} + 2^{-\left(\frac{4m}{2n+1} - q\right)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}},$$

worin alles dasjenige enthalten ist, was Ew. von dieser Materie mir überschrieben haben.

Nicht nur alle Zahlen, welche diese Formul $4mn - m - n$ gibt, sind enthalten in $yy + y - xx$, sondern gar alle mögliche Zahlen, welche sowohl in $4mn - m - n$, als nicht darin begriffen sind, und also ist independenter

*) Voire la 1ère lettre de Nic Bernoulli dans le 2ème volume.

von diesem theoremate eine jede Zahl in dieser Formul $uu+vv+v+yy+y-xx$ enthalten. Hieraus lässt sich aber nichts ad resolutionem numeri cujusque in numeros trigonales vel quadratos schliessen, und da ein jeder Buchstab u, v, y und x eine jegliche Zahl andeutet, so kann man nicht für u, $\frac{zz+z}{4}+1$, noch für x, $\frac{zz+z}{4}-1$ setzen, weilen diese formulae $\frac{zz+z}{4}\pm 1$ nicht mehr alle möglichen Zahlen geben, welche doch durch u und x angedeutet werden. Denn da eine jede Zahl sogar in dieser Formul $uu-xx$ enthalten ist, so müsste, kraft dieser Substitution, auch eine jede Zahl in dieser $zz+z$ enthalten, und also ein numerus trigonalis seyn.

Wenn alle in dieser formula $2^{2^{n-1}}+1$ enthaltenen Zahlen nur unico modo in duo quadrata divisibiles wären, so müssten auch alle diese Zahlen nothwendig numeri primi seyn, welches aber nicht ist. Denn alle diese Zahlen sind in dieser formula $4m+1$ enthalten, welche so oft sie ein numerus primus ist, unfehlbar in duo quadrata, hocque unico modo, resolviret werden kann. So oft aber $4m+1$ kein numerus primus ist, so ist dieselbe Zahl entweder gar nicht resolubilis in duo quadrata oder pluribus uno modis. Dass aber $2^{32}+1$, welche Zahl kein numerus primus ist, zum wenigsten duobus modis in duo quadrata divisibilis sey, kann ich also zeigen: 1. Wenn a und b in duo quadrata resolubiles sind, so wird auch das Product ab in duo quadrata resolubile seyn; 2. Si productum ab et alter factor a fuerint numeri in duo quadrata resolubiles, tum quoque alter factor b in duo quadrata erit resolubilis. Diese theoremata können rigidissime demonstriret werden. Nun ist $2^{32}+1$, welche Zahl in duo quadrata est resolubilis, nempe 2^{32} et 1, divisibilis per $641=25^2+4^2$. Dahero der andere factor, den ich brevitatis gratia b nennen will, gewiss auch eine summa duorum quadratorum. Sit $b=pp+qq$, ita ut sit $2^{32}+1=(25^2+4^2)(pp+qq)$, erit $2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2$ et simul $2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$ und folglich zum wenigsten duobus modis eine summa duorum quadratorum. Hieraus kann man nun die resolutionem duplicem a priori finden. Denn es wird $p=2556$ et $q=409$ und folglich $2^{32}+1=65536^2+1^2=62264^2+20449^2$. Dass eine jegliche Zahl, welche in zwey numeros primos resolubilis ist, zugleich in quot, quis voluerit, numeros primos zertheilt werden könne, kann aus einer Observation, so Ew. vormals mit mir communicirt haben, dass nehmlich ein jeder numerus par eine summa duorum numerorum primorum sey, illustrirt und confirmirt werden. Denn, ist der numerus propositus n par, so ist er eine summa duorum numerorum primorum, und da $n-2$ auch eine summa duorum numerorum primorum ist, so ist n auch eine summa trium, und auch quatuor u. s. f. Ist aber n ein numerus impar, so ist derselbe gewiss eine summa trium numerorum primorum, weil $n-1$ eine summa duorum ist, und kann folglich auch in quotvis plures resolvirt werden. Dass aber ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann. — Dass $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p-m+3)}}{m}$ nimmer ein numerus integer werden könne, erhellet daher, weilen wenn man diese Formul einem numero integro n gleich setzt, herauskommt $p=mn\pm\sqrt{(4mn-1)}$; es kann aber $4mn-1$ kein quadratum seyn.

Ew. theorema, dass wenn man ex aequatione $\nu = c$, existente ν functione quapiam ipsius x, die radicem x finden kann, man auch ex hac aequatione

$$\nu^{2n+1} = (2\nu + 1)(\nu + 1)^{n-1}$$

den valorem ipsius x bestimmen könne, — hat mich zu ergründen viel Mühe gekostet, bis ich endlich gemerket, dass diese Aequation $\nu^{2n+1} - (2\nu + 1)(\nu + 1)^{n-1} = 0$ divisibilis sey per $\nu\nu - \nu - 1$. Denn es ist

$$\nu^{2n+1} - (2\nu + 1)(\nu + 1)^{n-1} = \nu(\nu^{2n} - (\nu + 1)^n) + (\nu\nu - \nu - 1)(\nu + 1)^{n-1}$$

und $\nu^{2n} - (\nu + 1)^n$ ist durch $\nu\nu - (\nu + 1)$ divisibilis. Quicquid ergo sit n, aequationi $\nu^{2n+1} = (2\nu + 1)(\nu + 1)^{n-1}$ satisfacit $\nu\nu = \nu + 1$, und ist also $\nu = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aus welcher Aequation man per hypothesin die radicem x finden kann.

Si concipiatur curva, cujus abscissa posita $= x$, applicata sit $y = \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} +$ etc. erit generaliter $y = l\frac{4}{4-x}$, und folglich ist die curva eine logarithmica, darin die applicata zum asymtoto wird, wenn $x = 4$. Es sey (Fig. 6) VCB eine logarithmica ordinaria asymtoton habens VD, deren subtangens constans $AT = 1$. Capiatur applicata $AC = 1$, et ducta alia quacunque PM, positisque $AP = t$, et $PM = u$, erit $t = lu$, seu $udt = du$. Jam ducatur applicata $DB = 4AC = 4$, erit $AD = l4$, et ducta MQ, fiet $BQ = x$ et $QM = y$ pro casu proposito. Erit enim $AP = t = l4 - y$ et $PM = u = 4 - x$, unde ob $t = lu$ erit $l4 - y = l(4 - x)$ et $y = l \cdot \frac{4}{4-x}$. Sonsten haben Ew. pro summa seriei ipsi y aequalis casu $x = 1$ geschrieben $\frac{1}{3}$, da diese Summ ist $= l \cdot \frac{4}{3}$.

Euler.

LETTRE XLV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Sur un passage des oeuvres de **Wallis**, relatif au déchiffrement. Réponse à la lettre précédente. Considérations sur la sommation des séries. Théorème de géométrie.

Moscau d. 30. Juli n. St. 1742.

Ich gratulire Ew. zu der bevorstehenden perpetuellen Pension aus Paris, denn es scheinet je länger je mehr, dass Ew. die dortige Académie des sciences sich bey Austheilung der Preise gänzlich tributaire machen werden....

Ich erinnere mich in den von Wallisio dechifrirten Briefen einige Stellen angemerket zu haben, die einer andern interprétation bedürfen, wie es Ew., wenn sie nachfolgende remarques mit den Briefen selbst conferiren wollen, ohne Zweifel befinden werden. Tom. III Op. p. 666 lin. 4 hatte in dem Briefe gestanden 125. 44. 24. 123. 68. 28. Er setzet anstatt 24 die Zahl 26 und lieset $\begin{array}{cccccc} 125. & 44. & 26. & 123. & 68. & 28, \\ co & n & d & ui & st & e \end{array}$