erst erwähnte Formul $4mn - m - n^{\alpha}$ keinen numerum triangularem gebe, oder dass $x^{\alpha} = 4px - p - \frac{(b^2 - b)}{2}$ niemals eine radicem affirmativam in integris haben kann.

Gegen die mir communicirte Demonstration, wofür ich Ew. sehr verbunden bin, finde ich nichts zu erinnern, vielleicht könnte man aber generaliter sagen, dass $(a + b)^p - a^p - b^p$ allezeit per aliquem divisorem ipsius p divisibile ist, woraus denn als ein casus particularis folget, dass wenn p ein numerus primus ist, die gedachte Formul per ipsum numerum p divisibilis seyn müsse *).

Bey Gelegenheit dessen, was Ew. von der Formul

$$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$$

schreiben, habe ich observiret, dass wenn n variabilis gesetzt wird, alsdann $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = 2$ werde, so oft n ein numerus pariter par ist, und dass sie hingegen $= -2$ werde, so oft n ein numerus pariter impar ist, und wenn n ein numerus integer, q aber ein numerus quicunque rationalis aut irrationalis ist, so wird allezeit

$$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}\ ^{**}).$$

Es ist meines Erachtens auch remarquable, dass wenn man p durch diese Aequation determiniret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x+1} - (-1+\sqrt{5})^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right] - \left[\frac{(1+\sqrt{5})^{2x-1} - (-1+\sqrt{5})^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right]$$

so oft x ein numerus integer ist.

Nachdem ich diese Observation wieder durchgelesen, finde ich dieselbe von keiner Wichtigkeit; man darf nur setzen $a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist $a^x + a^{-x}$ der terminus generalis.

Goldbach.

*) Emendandum vid. infra. G. **) V. la lettre suivante.

LETTRE XLII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mêmes sujets.

Berlin d. 8 Mai 1742.

— — Die Corollaria, welche Ew. aus meinem theoremate, dass $4mn - m - n$ kein quadratum seyn könne, hergeleitet, sind sehr merkwürdig und übertreffen das theorema selbst weit an Wichtigkeit. Denn dass $4mn - m - n$ auch kein numerus trigonalis seyn könnte, hatte ich nicht wahrgenommen; anjetzo habe aus dieser Anleitung auch befunden, dass eben diese Formul $4mn - m - n$ auch kein numerus heptagonalis seyn könne. Ueberhaupt habe gefunden, dass alle Zahlen welche nicht $= 4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul $xx + yy + y$ enthalten sind. Daher diese Expression $4mn - m - n + xx + yy + y$ alle möglichen Zahlen geben muss, welches theorema einigermaassen ähnlich ist dem Fermatiano, dass $pp+qq+rr+ss$ alle mögliche Zahlen hervorbringe. Ich habe noch viel mehr dergleichen theoremata, als $3aa+3bb+7cc$ kann niemals ein quadratum seyn; item $2aa+6bb+21cc$ quadratum esse nequit und dergleichen. Ich habe aber noch keine dergleichen formulam finden können, in welcher 4 litterae a se invicem non pendentes enthalten wären.

Dass im Uebrigen meine jüngst überschickte Demonstration bei Ew. Beifall gefunden, erfreuet mich sehr. Dass aber diese Formul $(a+b)^p-a^p-b^p$ auch durch p oder einen divisorem des p, praeter unitatem, wenn p kein numerus primus ist, divisibilis seyn sollte, kann durch meine Demonstration nicht nur nicht erwiesen werden, sondern es trifft auch in vielen Fällen nicht zu. Als wenn $a=1$ et $b=1$, et $p=35$, so lässt sich $2^{35}-2$ weder durch 5 noch durch 7 theilen.

Wenn generaliter $a^{p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=b$, so ist

$$a^{xp\sqrt{-1}}+a^{-xp\sqrt{-1}}=\left(\frac{b+\sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x+\left(\frac{b-\sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x,$$

und folglich, wenn $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=3$, so wird $2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}}=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}$. Somit kommen Ew. Observationen mit meinem General-theoremate, dass $a^{+p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=2\cos.\mathrm{Arc.}\,pla$ meistentheils überein, nur dass $2^{(4n+q)p\sqrt{-1}}+2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}}$ nicht gleich ist $2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}}$, wenn nicht entweder $(2n+q)pl2$ oder $2npl2$ gleich ist $m\pi$ denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam.

Euler.

LETTRE XLIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Continuation sur les mêmes sujets. Deux théorèmes d'analyse.

Moscau d. 7 Juni n. st 1742.

— — — Ohngeachtet ich mich in meinem vorigen Briefe mit der particula vielleicht précautionniret, so hätte doch nicht geglaubet, dass die Formul $(a+b)^p-a^p-b^p$ sich nicht allezeit durch einen von den divisoribus numeri p sollte dividiren lassen, wenn solches nicht durch das von Ew. angeführte exemple deutlich bestätiget würde.

So viel ich mich erinnere, hatte ich mir in meinem letzten Briefe die Formul $2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}}$, posito $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$, als applicatas einer curvae serpentiformis, deren abscissae x sind, vorgestellet, und welche den axem so oft durchschneidet, als die Formul $=0$ wird,