$$\left(\frac{1}{6x-5}-\frac{1}{6x-2}\right)=\int\frac{dz(1-z^3)}{1-z^6}=\int\frac{dz}{1+z^3}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}+\frac{1}{3}\int\frac{2dz-zdz}{1-z+zz}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}-\frac{1}{6}\int\frac{2zdz-dz}{1-z+zz}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z+zz}$$
$$=\frac{l2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

VII. Seriei $1-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}-$ etc. jamdudum quoque conjectavi summam esse $=p(l2)^{2n-1}$, at casu $n=2$ facile statim deprehendi valorem ipsius p nequidem rationaliter exhiberi posse.

Euler.

LETTRE XXX.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorèmes relatifs à la sommation des suites.

(Petrop.) d. 9 Dec. 1739.

Observavi heri denominatoribus 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, etc. innumeris modis assignari posse numeratores algebraicos, ita ut series tota fiat summabilis, sic v. gr.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}+\frac{11}{1\ldots5}+\frac{19}{1\ldots6}+\frac{29}{1\ldots7}+\frac{41}{1\ldots8}+\frac{55}{1\ldots9}+\text{etc.}$$
est $=\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+\frac{5}{1\ldots6}+\frac{6}{1\ldots7}+\frac{7}{1\ldots8}+\frac{8}{1\ldots9}+\text{etc.}=\frac{1}{2}$,

$$\frac{3}{1.2}-\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}-\frac{6}{1\ldots5}+\frac{7}{1\ldots6}-\frac{8}{1\ldots7}+\frac{9}{1\ldots8}-\frac{10}{1\ldots9}+\text{etc.}=1,$$

quae quidem facile demonstrari possunt; sed ex eodem fonte alia multo abstrusiora derivantur, ut si haec series

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1.2n^2}+\frac{3a+7}{1.2.3.n^3}+\frac{4a+13}{1.2.3.4n^4}+\text{etc.}$$

(cujus terminus generalis est $\frac{ax+x^2-x+1}{1.2.3\ldots xn^x}$) fiat $=-1$, posito pro a numero quocunque, dico, ut aequationi satisfiat, sumendum esse $n=\frac{-a\pm\surd(a^2-4)}{2}$.

C. G.

LETTRE XXXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Réponse à la lettre précédente.

Petropoli d. 9 Decembr. 1739.

Omnes series, quae continentur in hac formula generali $\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}{1.2.3.4\ldots x.n^x}$ summari possunt per quantitates exponentiales et algebraicas conjunctim. Quare si vel coëfficientes α, β, γ, δ, etc., vel numerus n ita determinetur, ut exponentialia evanescant, obtinebuntur omnes series hujus formae, quae summas algebraicas habere possunt. Quod ut clarius appareat, per partes progrediar

*