enim annorum commentarios non memini me vidisse. Si quid Tibi de ejus methodo constat, rogo ut ad me perscribas.

Demonstrationem meam theorematis: nullum numerum trigonalem, praeter 1, esse quadrato-quadratum communicavi cum Cl. Bernoullio nostro litteris Moscua datis, quas, si ad manum sunt, Tibi facile concedet; ex ea demonstratione perspicies non solum nullum numerum n^{2p+2}, sed ne quidem ullum n^2 (praeter 1 et 36) reperiri in trigonalium ordine, tantum abest ut omnes quadrati radicum 0, 1, 6, 35, 204, etc., quarum progressionem in litteris descripsisti, sint trigonales.

Incidi aliquando in solutionem hujus problematis: Numero cuicunque integro quantumvis magno a, cujus tantum duae postremae notae dantur, addere alium numerum integrum b hac lege, ut aggregatum non habeat radicem rationalem ullius potestatis. Sit v. gr. numerus 543664, cujus tantum duas ultimas notas nempe 64 mihi cognitas fingo, reliquis 5436 (vel quibuscunque aliis) occultatis, huic si addatur 2, ita ut fiat 543666, is numerus nullam habet radicem rationalem. Vereor ne totum problema simplicitate sua vilescat, si methodum solvendi et demonstrationem simul addam, quapropter easdem in futuram epistolam differo.

Vale et fave

Goldbach.

LETTRE IX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorème de la résolubilité de chaque nombre entier en quatre quarrés. Série de Mayer, très convergente, pour la valeur de π. Série des nombres dont les quarrés sont des nombres trigonaux. Problème de Pell. Sur le problème proposé par G. dans la lettre précédente. Problème des lunules quarrables.

Petropoli die 10 Augusti 1750.

Quantum mihi constat de theoremate Fermatiano, omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, ipse Fermatius neque demonstrationem ejus habuisse videtur, neque modum generalem numeri cujusque in quatuor quadrata distribuendi; sed id potius videtur tantum observasse et propterea enunciasse, quia nullum exemplum contrarium ab eo fuit deprehensum. Etiamsi autem haec propositio vera sit, tamen difficillima mihi esse videtur demonstrationis inventio; nullam enim legem observare potui in divisione difficillimorum numerorum hujus formae $nn + 7$, atque reso-

*

lutio in quatuor quadrata semper fortuna tantum succedere videtur, neque ulla prorsus regula contineri. Commentarii Academiae Parisinae ad A. 1719 et sequentes non adsunt hic in Bibliotheca et hanc ob rem de methodo D. Lagnii nihil commemorare possum. Quod autem ad aptam et facilem approximationem ad aream circuli attinet, memini Mayerum nostrum b. d. habuisse seriem vehementer convergentem, cujus tres vel quatuor termini tantum sumti darent maximos Ludolphi a Ceulen numeros. Series, quam nuper Tecum communicavi 0, 1, 6, 35, 204, etc., hanc habet proprietatem, ut cujusvis termini quadratum sit numerus trigonalis, neque haec proprietas ad 0, 1 et 6 tantum pertinet. Nam v. g. quadratum termini 35 est 1225, qui est numerus trigonalis radicis 49. Universaliter vero, cum illius progressionis terminus generalis sit $\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}-(3-2\sqrt{2})^{n-1}}{4\sqrt{2}}$, hujus quadratum est numerus trigonalis radicis

$$\frac{(3+2\sqrt{2})^{n-1}+(3-2\sqrt{2})^{n-1}-2}{4}.$$

Ex ea igitur serie quam dedi inveniuntur innumerabiles numeri integri qui simul sunt quadrati et trigonales. Fundamentum ejus sequenti generali theoremate nititur: Si formula az^2+bz+c fit quadratum casu, quo ponitur $z=p$, fiat ea quoque quadratum casu, quo

$$z=\frac{-b+b\sqrt{(1+a\lambda^2)}}{2a}+p\sqrt{(1+a\lambda^2)}+\lambda\sqrt{(ap^2+bp+c)},$$

oportet autem pro λ numerum accipere qui $1+a\lambda\lambda$ faciat quadratum. Si igitur unicus innotescit casus, quo az^2+bz+c fit quadratum, ex hac forma statim invenientur innumerabiles, idque in integris numeris, siquidem λ ita accipiatur ut $\frac{-b+b\sqrt{(1+a\lambda\lambda)}}{2a}$ fiat numerus integer. Omnes autem numeri hoc modo inventi constituunt seriem ex duabus geometricis conflatam. Agitata sunt hujusmodi problemata de numeris integris inveniendis inter Wallisium et Fermatium. Exemplum maxime difficile erat: invenire numeros integros, qui loco x positi efficiant formulam $109xx+1$ quadratum. Pro hujusmodi quaestionibus solvendis excogitavit D. Pell Anglus peculiarem methodum in Wallisii operibus expositam. Eaque ad meum institutum opus habeo, ut $1+a\lambda\lambda$ fiat quadratum. Ea vero methodus tantum ad exempla prorsus numerica patet, neque ejus est usus in formulis arbitrarios coëfficientes habentibus resolvendis, cujusmodi est meus casus az^2+bz+c. Conatus sum similem methodum pro formulis, in quibus indeterminata tres habet dimensiones, invenire. Idem vero non aeque ac in quadraticis praestare potui; sed tamen ea sufficit ad omnes numeros integros inveniendos, legem vero, qua ii progrediuntur, non praebet. Exempla ad hoc illustrandum sint haec: Invenire numeros pyramidales trigonales integros, qui sint quadrati, vel qui sint triangulares plani.

Solutionem Tuam, Vir Celeb., problematis quod perscripsisti, ad propositum numerum alium addere, ita ut summa non habeat radicem rationalem ullius potestatis, ex hoc principio ductam esse statim animadverti, quod nullus numerus ullius dignitatis per solum binarium dividi possit, vel quod nulla potentia sit numerus impariter par. Ex duabus autem postremis notis cujusque numeri cognoscitur, utrum per 4 dividi possit an secus. Quamobrem si talis numerus adjiciatur, qui efficiat summam per 2 sed non per 4 divisibilem, habetur quod desideratur. Idem adhuc pluribus modis potest effici, vel faciendo ut ultima nota sit 0, penultima non; vel ut duae postremae notae sint 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95; hujusmodi enim terminationes nullae habent dignitates. Similiter apparet, qualis numerus ad propositum quantumvis magnum, cujus notarum summa tantum datur, addi debeat, ut quod prodit nulla sit potentia. Nimirum talis debet addi, qui ad summam notarum additus reddat eam per 3, sed non per 9 divisibilem.

Methodum Tuam lunulas quadrabiles inveniendi vidi, eaque mihi magnopere placuit propter summam ejus et facilitatem et brevitatem. Persecutus sum idem problema jam diu, prorsus analytice, sequenti modo: Sit (Fig. 1.) semilunula quaecunque ABD, et ex D in AB productam demittatur perpendiculum DC, arcuum AD, BD sinus. Sit $DC = y$, radius arcus $AD = a$, radius arcus $BD = b$; erit integratione per logarithmos absoluta area $ACD =$

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(aa-yy)}}{2},$$

et area $BCD =$

$$\frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(bb-yy)}}{2}.$$

Ex his erit semilunulae area $ADB =$

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} - \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{(aa-yy)}+y\sqrt{(bb-yy)}}{2}.$$

Ergo perspicuum est quoties in hac expressione quantitates logarithmicae evanescunt, toties lunulam esse quadrabilem, erit enim $ADB = \frac{y\sqrt{(bb-yy)}-y\sqrt{(aa-yy)}}{2}$. Quamobrem ad lunulas quadrabiles inveniendas oportet ut sit

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}} = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\, l\, \frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}},$$

vel sumtis numeris

$$\left(\frac{y+\sqrt{(yy-aa)}}{a\sqrt{-1}}\right)^{aa} = \left(\frac{y+\sqrt{(yy-bb)}}{b\sqrt{-1}}\right)^{bb}.$$

Ex hac aequatione, data relatione inter a et b, determinabitur y, seu semichorda lunulam quadrabilem subtendens. Quanquam in aequatione inventa insunt quantitates imaginariae, tamen in reductione eae ex calculo abeunt, proditurque pro y valor realis. Solutio haec cum Tua, Vir Celeb., congruit, utraque enim omnes dat casus, qui existunt. Vale et fave Vir Celeb., Tibi observantissimo

Leonh. Eulero