# LETTRE II.

### Goldbach à Euler.

Sommaire. Démonstration des termes généraux des suites de la lettre précédente. Ce que c'est que les logarithmes hyperboliques? Théorème de Fermat.

Vir Clarissime, Moscuae 1 Decembr. 1729.

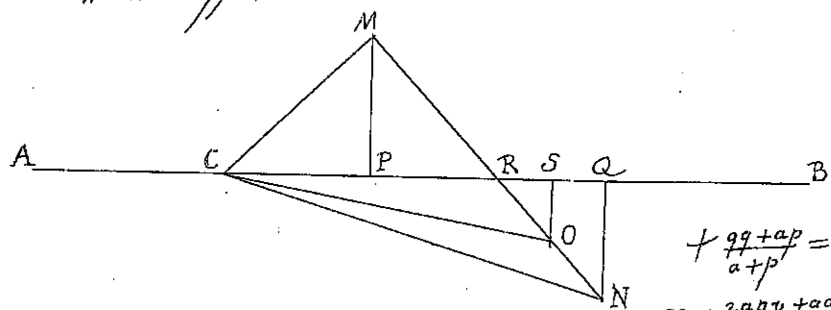
Ad epistolam Tuam, quae mihi gratissima fuit, generatim respondeo me in terminis mediis serierum inveniendis satis habuisse, si quos in numeros rationales cogere non possem, eosdem per series infinitas numerorum rationalium utcunque exprimerem, quodsi deinde ostendi possit seriem hujusmodi, qua valor termini medii quaesiti continetur, vel ad numeros irrationales vel ad logarithmos, vel denique ad curvarum quadraturas nondum inventas pertinere, id minime contemnendum puto, nam si alii operam dederunt ut incognitam rationem diametri ad circulum per seriem infinitam determinarent, e contrario summam seriei nondum cognitam per quadraturam circuli explicare licebit, hac tamen notabili dif-

Correspondance mathématique et physique. Tome I, pag. 8

*Correspondance mathématique et physique Tome I, pag. 8*

*Fac-similé de l'écriture de Chr. Goldbach 1746.*

P. S. Es ist mir gestern eingefallen daß sich das Problema catoptricum auf folgende weise solvi-ren läßt:




$+\ \dfrac{qq+ap}{a+p} = \dfrac{av-qq}{a-v}$

$qq = \dfrac{2apv+aav-aap}{2a-v+p}$

Sit AB. axis curvae $= a$; punctum radians C. Sint CM. et CN. radii in curvam incidentes; MR. et NR. radii ad idem punctum axis R. reflexi; capiatur in MN. punctum O. ita ut sint $CM+MO = CN+NO = a$, et ponatur recta $CO = q$. $CM = \dfrac{a-p}{2}$ $MO = \dfrac{a+p}{2}$ $CN = \dfrac{a+v}{2}$. $NO = \dfrac{a-v}{2}$ /: ubi $v$. iam datur per $p$. et $q$. est enim

$+\ v = \dfrac{(2a+p)q^2 + a^2 p}{a^2+2ap+q^2}$ :/ ponatur porro $RO = z$, $RS = uz$, invenietur Spatium quod inter radium incidentem et reflexum in axe intercipitur

$$CR = CS - RS = \sqrt{q^2 - z^2(1-u^2)} - uz = CQ - RQ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+v)^2 - (a-v+2z)^2(1-u^2)} - \frac{(a-v+2z)u}{2} = CP + PR = \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-p)^2 - (a+p-2z)^2(1-u^2)} + \frac{(a+p-2z)u}{2}.$$

*Lith. par Davignon.*

ferentia, quod numeros irrationales ad rationales redigi non posse facile demonstretur, quadraturam vero circuli numeris rationalibus definiri non posse nemo, quod sciam, evicerit.

Terminum generalem seriei $1 + 2 + 6 + 24 +$ etc, quem pro exponente quocunque $m$ facis

$$\frac{1 . 2^m}{1+m} \cdot \frac{2^{1-m} . 3^m}{2+m} \cdot \frac{3^{1-m} . 4^m}{3+m} \cdot \frac{4^{1-m}\, 5^m}{4+m} \cdot \text{ etc.}$$

sic demonstro: Sit $x$ exponens factoris cujuscunque, erit formula generalis factorum $\frac{x^{1-m} . (x+1)^m}{x+m}$, et productum omnium factorum a primo usque ad ultimum cujus exponens est $x$, inclusive, $(x+1)^m : \left(\frac{(x+1)}{1} \cdot \frac{(x+2)}{2} \cdot \frac{(x+3)}{3} \cdots \frac{(x+m)}{m}\right)$. Ex. gratia si $m = 2$, fiet productum factorum ad datum quemcunque factorem (cujus exponens est $x$) $\frac{2(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x+2}$, adeoque productum omnium in infinitum $= 2$. Si $m = 3$, erit simile productum ad datum quemcunque factorem $6\,(x+1)^3 : \left(\frac{x+1}{1}\right)\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x+3}{3}\right)$ adeoque productum omnium in infinitum $= 6$, et sic porro. Sed observasti sine dubio series algebraicas omnes, quarum termini consueto more per signum $+$ conjungi solent, etiam in hujusmodi factores converti posse, erunt enim hic producta factorum, quae illic sunt aggregata terminorum.

Fateor me non satis perspectam habere naturam logarithmorum hyperbolicorum, quin et Cl. Wolfius, ubi de logarithmis agit, hyperbolicorum mentionem nullam facit.

In reliquarum serierum, quas commemoras, terminis generalibus, Tuo more per factores exprimendis non magnam video difficultatem, nam seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{3.6.9}{4.7.10} + \frac{4.8.12.16}{5.9.13.17} + \text{etc.}$$

terminus generalis est $\frac{x}{x+1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdot\frac{3x}{3x+1}\cdots\frac{mx}{mx+1}$ donec $m$ fiat $= x$, quod si nusquam contingat, erunt factores numero infiniti; sic terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ fit $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot$ etc.

Seriei $\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}+\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}+$ etc. terminus generalis est

$$\frac{2(2n+3)}{3(2n+2)}\cdot\frac{4(2n+5)}{5(2n+4)}\cdot\frac{6(2n+7)}{7(2n+6)}\cdot\frac{8(2n+9)}{9(2n+8)}\cdot \text{etc.}$$

Seriei $\frac{1}{2}+\frac{1.2}{3.4}+\frac{1.2.3}{4.5.6}+\frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}+$ etc. terminus generalis est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2(4n+2)}{6(n+1)}\cdot\frac{3(4n+6)}{10(n+2)}\cdot\frac{4(4n+10)}{14(n+3)}\cdot\frac{5(4n+14)}{18(n+4)}\cdot \text{etc.}\right)$$

neque adeo difficile est assumere numeros quadraturam circuli exprimentes, aliunde jam cognitos et pro iisdem series concinnare, quarum terminos medios hi numeri constituant, cujus artificii mihi probe gnarus videris.

Caeterum egregias plane judico methodos, quarum specimina mecum communicasti, neque dubito quin iisdem vestigiis progrediens multa nova et praeclara in hoc genere reperturus sis; nisi ego quoque nuper ad Cl. Bernoullium nostrum theorema, quo methodum summandi series ad calculum quem vocant integralem accomodavi. Vale.

Goldbach.

*P. S.* Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros hujus formulae $2^{2^{x-1}}+1$, nempe 3, 5, 17, etc. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse, et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.



# LETTRE III.

## Euler à Goldbach.

Sommaire. Usage du calcul intégral dans la recherche des termes généraux des suites. Digression sur la théorie des logarithmes et les logarithmes hyperboliques. Sur le théorème de Fermat de la lettre précédente.

Vir Celeberrime, Petropoli d. 8 Januar 1750.

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio, maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$ etc. exhibente, quam Tibi, Vir Celeberrime, perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari diffidens id meditatus sum, quomodo alia