

LETTRE IV.

SOMMAIRE. J. B. envoie la première partie de ses Recherches hydrauliques. Exposé de sa méthode qu'il nomme *directe*, et des avantages qu'elle offre sur celle employée par Daniel, dans son Hydrodynamique. — Contenu de la seconde partie de ces mêmes recherches. — J. B. excuse l'insuffisance de son mémoire *De motu corporum in orbitis mobilibus*. — Travaux d'Euler sur la théorie de la musique et sur le mouvement des corps flottans. — Conditions du repos ou de l'équilibre des corps, et application de ces conditions aux corps flottans. — Sur les oscillations verticales et leur application à la recherche du poids des vaisseaux. — Problème des isopérimètres. — Recherches d'Euler sur la courbe élastique rectangulaire et autres. — Plainte sur sa situation à Bâle.

Viro Excellentissimo atque Acutissimo LEONHARDO
EULERO S. P. D. JOH. BERNOULLI.

Exoptatissimae Tuae litterae d. 20. Decembris st. v. mihi traditae sunt atque a me perlectae summa cum voluptate. Ecce! nunc ad Te mitto partem priorem meditationum mearum hydraulicarum*), quas tantopere Te desiderare testa-

*) Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales, quaecumque figuram habentes, fluentium. Comment. Petrop. IX p. 3 — 49.

ris, et vel ideo desideras, quod cognoveris imperfectionem, qua haec doctrina etiamnunc ab aliis tractari solet, immo, ut candide fateris, Tu ipse frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocaveris, invita omni, qua polles, perspicacia. Videbis, originem sequioris successus Scriptorum hydraulicorum ex eo unice venisse, quod nemo hactenus attenderit, partem aliquam finitam virium prementium insumi ad formandum gurgitem, quando aqua cogitur ex uno tubo in alium diversae amplitudinis transire, licet gurges ipse constare concipiatur ex portiuncula aquae infinite parva. Post pertinacem diutinamque pensitationem animadverti tandem, non sufficere, ut attendatur ad solam illam vim seu pressionem, qua liquor in tubis in motum localem seu progressivum excitetur data cum velocitate, sed praeterea in considerationem trahi debere principium *Continuitatis*, quo fit ut nulla mutatio in effectibus producendis fiat per saltum, sed successive per gradus infinite parvos, ut in hoc negotio accidit, ubi liquor a velocitate minori ad majorem, vel vicissim a majori ad minorem transire debet; unde omnino necesse est, ut prope transitum, vel ante vel post, concipiatur aliqua portiuncula liquoris, quantumvis parva, cujus stratula infinite parva vel accelerando vel retardando procedant, atque haec portiuncula, inaequabili velocitate gaudens, in stratulis est, quam voco gurgitem: haec omnia uberius et clarius ex ipso scripto intelliges.

Videbis etiam methodum hanc directam mirifice conspici-
rare cum indirecta (qua sola usus est Filius meus in sua
Hydrodynamica) etenim ambae dant eandem solutionem pro-
blematum hydraulicorum. Posset autem aliquis mirari, cur,
qui ista solvere vult per theoriam virium vivarum, non
pariter teneatur rationem habere formandi gurgitis, utpote
*

qui videatur requirere ad sui generationem aliquam partem virium vivarum, aequae ac requiritur partem virium mortuarum; sed causam discriminis explico in scripto meo, monstrans, quantitatem materiae quae componit gurgitem, etsi sit infinite parva, nihilominus opus habere vi finita et determinata pressionis ad acquirendam accelerationem vel retardationem in stratulis, sive ad id, ut sese gradatim accommodet ad motum quem liquor jam habet in tubo, in quem ingredi debet. At vero vim vivam quae est in omni materia gurgitis, quippe quae quantitatis est infinite parvae et tantum finitam celeritatem in singulis stratulis habens, oppido patet fore illam vim vivam gurgitis infinite parvam ideoque prorsus incomparabilem cum totali vi viva totius massae aquae in tubis motae. Hoc ergo notari debuisset a Filio, antequam aggredere tractationem Hydraulicae per theoriam conservationis virium vivarum, ne quis scrupulum habere possit, videns negligi considerationem gurgitis, quae in methodo directa citra paralogismum negligi non potest; sed quomodo potuisset hoc praecavere, cum nequidem ideam habuerit naturae gurgitis, quotempore librum suum scripsit.

Vides, Vir Clariss., figuras rudi admodum et crassa Minerva esse delineatas; sine ullo ornamento, nedum ad Stereographiae regulas repraesentatas, id sane efficere non potui, si vel maxime voluissem, ob tremorem manuum mearum qui cum aetate continuo ingravescit. Fortassis dabitur apud Vos aliquis amanuensis qui, Te dirigente, figuras elegantius et majore cum gratia delineare poterit, ita ut ad mentem meam respondeant.

Ceterum si videro, primam hanc partem hydraulicae meae exercitationis Tibi non displicuisse, transmittam protinus alteram partem, quam interea temporis, dum responsio

sup

797

t

âee

its

Tua ad me venerit, absolvam, ut ad mittendum sit parata: Deprehendes, illam adhuc magis esse curiosam, dum ita modifico theoriam meam, ut fere opus non sit idea gurgitis, quem sub alia notione involvo; unde nascitur novum principium hydraulicum, a nemine antea animadversum, cujus auxilio statim pervenio ad motum aquae determinandum fluentis per vasa vel canales, non tantum ex tubis cylindricis conflatos, sed quamcunque figuram, etiam irregularem habentes, aliaque explico phaenomena jucunda et utilia, quae in Physicis quoque suum usum habebunt. — — —

Vides, Vir Celeb., post tot scriptorum expeditionem parum temporis mihi superesse ad excutienda pro merito singulae epistolae Tuae capita; attingam tamen tumultuarie quae tum permittit mentis distractio, oculorum hebetudo, atque imprimis manuum lassitudo et tremor. Quod in conventu Vestro praelegeris solutionem meam succinctam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus*), gratias ago, quamvis eam non scripserim ut publice proponeretur, alias majori eam cura elaborassem atque extendissem magis. Dabitur forsitan occasio alia vice communicandi quae mihi sunt meditata alia circa hanc materiam, et praesertim quae mihi subnata sunt ex lectione Newtonianorum non semper recte se habentium. Gratum erit accipere tomos, quos promittis, Commentariorum, quae post quartum mihi desunt.

In Musicis non valde sum exercitatus, neque hujus scientiae fundamenta satis mihi sunt perspecta, ut de inventis Tuis judicare queam. Videntur sane egregiae, quae in literis Tuis obiter tantum attingis; sed cum videro ipsum

*) Compendium analyseos pro inventionem vis centralis in orbitis mobilibus planetarum. Comment. Acad. Petrop. X. p. 95 — 100.

tractatum Tuum, quam de harmoniae principiis edere statuisti, spero fore ut exinde lux clarior mihi affulgeat ad inventorum Tuorum praestantiam penitius introspectendam. Eandem ob causam nolo nunc diutius inhaerere iis, quae hactenus inter nos agitata sunt de situ et motu corporum aquae innatantium antequam visus mihi sit Tuus hac de re tractatulus, quem ad finem perductum esse ais. Interim bene est quod nunc agnoscas veritatem nonnullorum, quae monueram tam de situ obliquo coni et conoidis parabolici, quam de modo multiplicandi corporis particulas per quadrata distantiarum, non a centro ejus gravitatis, sed ab axe horizontali, per centrum transeunte, circa quem fiunt oscillationes. Corpus aliquod tribus utique modis in quiete vel aequilibrio conservatur: 1^o) Si corpus duabus viribus aequalibus sed oppositis et ad se invicem tendentibus sollicitatur, fiet aequilibrium, quod olim in alia occasione vocavi *coactum*, idque est quod nunc vocas *firmum*. 2^o) Quodsi vires illae duae aequales et oppositae a se invicem tendunt, hoc est, quae corpus non premunt, sed trahere conantur, fiet iterum aequilibrium, quod a Te vocatur *infirmum*, mihi vero proscopo, quem olim tunc habueram, id aequilibrium iterum vocabatur *coactum*. 3^o) Si nullis omnino viribus oppositis corpus sollicitatur, nec premendo ad se invicem nec trahendo a se invicem, erit utique aequilibrium, quod a me dicebatur *otiosum*, ideo quia, si tale corpus a causa aliqua externa ex situ suo tantisper disturbatur, non amplius affectabit ad pristinum suum situm redire. Sic ex. gr. corpus sphaericum et homogenum aquae insidens ac quiescens, si nonnihil circa centrum suum rotetur, manebit in hoc novo situ et non repetet priorem. Patet autem tale aequilibrium nec firmum esse nec infirmum, quodque ideo commode

up

19

le

.t:

ol

vocavi *otiosum*, quia est quasi in statu indifferentiae. Utrum vero corpus aquae insidens et quiescens sit in aequilibrio firmo vel infirmo, ex hoc utique cognoscitur, si nimirum nonnihil ex situ aequilibrîi inclinetur, et ita quidem ut pars immersa idem semper volumen in aqua occupet, tunc centrum gravitatis corporis vel ascendisse in recta verticali, vel descendisse observabitur; si prius, concludendum erit corpus esse in aequilibrio firmo; si posterius, erit aequilibrium infirmum; si neque ascendit neque descendit, erit in statu neutro; seu indifferentiae, quod, ut dixi, mihi vocatur aequilibrium otiosum. In casu firmitatis attendendum est, quantum ex assumpta inclinatione centrum gravitatis ascendat, tum enim ex utriusque collatione calculari potest lex accelerationis oscillationum corporis, atque inde determinari longitudo penduli isochroni. Sufficit theoriam ac fundamentum detexisse, calculum instituere non vacat tot aliis laboribus et negotiis distracto. De caetero gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, quae scripsi de oscillationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum quem praestare possunt in explorandis navium ponderibus; maluissem autem ut ipse quoque calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi patuisset, annon erraverim in ratiocinando, nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus fidere quam meis.

Quae nunc uberius affers, Vir Exc., de Isoperimetricis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix quicquam restet, quod acerrimam Tuam sagacitatem subterfugere potuerit; ad me quod attinet, diu adeo est quod haec seposui, ut mihi ea plane non amplius sint praesentia, quare ab his desisto.

Lectu jucundissimum fuit, quod addis in fine litterarum Tuarum de proprietate Tibi observata circa Elasticam rectan-

gulam (vel etiam Linteariam, ambae enim eandem faciunt curvam) in qua si abscissa ponatur x , est applicata $= \int \frac{xx dx}{\sqrt{(a^2 - x^4)}}$ et longitudo curvae $= \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^2 - x^4)}}$, quas expressiones ita comparatas dicis, ut inter se comparari nequeant. At invenisti si abscissa ponatur $= a$, rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli, cujus diameter sit abscissa $= a$. Est utique haec observatio notatu dignissima, *sed vellem scire*, an hanc proprietatem a priori et de industria quaesiveris et inveneris, aut an illam, ut saepe accidere solet, aliud quaerendo detexeris per casum fortuitum. Ego jam olim observavi circa has lineas duas aliquam proprietatem, etsi inventu faciliorem, quae in hoc consistit, quod earum, non quidem rectangulum, sed summa sit aequalis quadranti circumferentiae ellipseos, cujus axis minor $= 2a$ et axis major $= 2a\sqrt{2}$. Vid. Act. Lips. 1694. m. Octob. Hoc autem valet non tantum de tota curva cujus abscissa $x = a$ ejusque applicata maxima, sed indefinite de quibuscunque partibus earum ad se invicem spectantibus, quarum utique summa semper aequalis est arcui elliptico qui pro abscissa habet x in axe minori a centro sumtam, a cujus arcus longitudo etiam dependere demonstravi loco citato dimensionem arcus Lemniscatae curvae, quam adhibui ad construendam Isochronam paracentricam Leibnitii, quae tum temporis multum rumoris excitaverat. Quando autem affirmas applicatam $\int \frac{xx dx}{\sqrt{(a^2 - x^4)}}$ et longitudinem curvae $\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^2 - x^4)}}$ ita esse comparatas, ut inter se comparari nequeant, nescio an hoc intellectum velis generaliter et sine ulla exceptione; an vero non putes posse quidem comparari pro aliqua x determinatae longitudinis, sed non indefinite pro singulis x ,

sicuti revera datur aliqua hujusmodi expressio, nempe haec:
 $\int \frac{x^3 dx}{aa\sqrt{(a^4-x^4)}}$, quam in casu $x = a$ inveni aequalem esse
 trienti curvae totius, adeo ut habeatur

$$\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} = 3 \int \frac{x^3 dx}{aa\sqrt{(a^4-x^4)}}.$$

Optarim ut ad hoc investigandum aliquid temporis colloces,
 siquidem non minus notatu dignum videtur, quod Tuum
 illud alterum: $\int \frac{xx dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} \cdot \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} = \text{circulo}.$

Quod supra scripsi his verbis: *sed vellem scire etc.*, id
 nunc didici ex litteris Tuis ad filium Daniele m datis, quas
 mihi legendas exhibuit, postquam totam meam epistolam hu-
 cusque jam absolvissem.

Curiosa sunt theoremata in illis Tuis litteris contenta:
 ego jam olim similia inveni, sed mea magis geometrica
 sunt, ex consideratione curvarum deducta, Tua vero analy-
 tica magis, ope calculorum eruta. Combinando haec nostra
 in corpus commune, poterimus doctrinam de curvis inter
 se comparandis mirum quantum augere.

Quod denique doleas frequens damnum ex tot iteratis
 decoctionibus mercatorum mihi illatum, facis quidem, quod
 Christiana inculcat charitas, idque mihi solaminis loco erit,
 sed cum cogito, me hic Basileae esse, ubi perpetuis vexa-
 tionibus fortunae obnoxius sum, ubi omni mea scientia vix
 minimam jacturae partem reparare possim, dum alibi ho-
 noribus et bonorum copia abundare potuissem, parum abest,
 quin tandem animum despondeam atque scientiarum cul-
 turae, quoad vixero, valedicam.

Valeas vero et Tu, Vir Excell., diutissime, mihi que fa-
 vere perge. Dabam Basileae a. d. 7. Mart. 1739.

