minores, loco n positi, reddunt $2^n - 1$ primum*). Potest vero $2^{11} - 1$ dividi per 23, $2^{23} - 1$ per 47, et $2^{83} - 1$ per 167. Ratio hujus fundata est hoc theoremate non ineleganti: $2^n - 1$ semper potest dividi per $n + 1$, siquidem $n + 1$ fuerit numerus primus. Sic $2^{22} - 1$ dividi potest per 23. Saepe etiam $2^{\frac{n}{2}} - 1$, nec non $2^{\frac{n}{4}} - 1$ etc. per $n + 1$ dividi possunt, et ex hoc investigatio casuum, quibus $2^n - 1$ est numerus primus, non est difficilis. Vale atque fave Tibi obstrictissimo

Leonh. Eulero.

*) Euler oublie le nombre 37; dans la lettre 5ème, page 23, il fait observer lui-même que $2^{37} - 1$ est divisible par 223.

LETTRE XVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Rectification d'une formule de la lettre 14ème.

Moscuae d. $\frac{6}{17}$ Dec. 1731.

Ante omnia mihi emendanda est aequatio in superioribus litteris meis male descripta, scribendum enim erat, in quocunque casu numerorum p et n aequatio (A) $(1 - v)\,v\,dz = (n + p + 1)\,zv\,dv + n\,(1 - z)\,dv$ est integrabilis, eodem casu aequationem (B) $(1 - x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ esse integrabilem, id quod instituto examine deprehendes.

Altera aequatio (C) $x^{\frac{\mp 4n}{\pm 2n+1}}\,dx - y^2\,dx = dy$ simili modo transmutatur in (D) $dz - v^2 dz \pm 2nvz^{-1} dz = dv$. Quomodo vero separatio variabilium in aequatione (C) vel (D) pendeat a termino generali seriei, cujus lex progressionis est $A + (2m + 1)\,B = C$, non video. De reliquis in posterum. Vale.

Goldbach.

LETTRE XVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur la séparation et l'intégration de l'équation Riccati.

Domi d. 3 Januar. 1732.

Omnis aequatio ex tribus constans terminis facile reducitur ad hanc formam $x^m dx + ay^n dx + bdy = 0$, quae ista substitutione

$$x = v^{\frac{1}{mn+n-m}} z^{\frac{n-1}{mn+n-m}} \text{ et } y = v^{\frac{m+1}{mn+n-m}} z^{\frac{-1}{mn+n-m}}$$

transformatur in sequentem ordinis secundi aequationem $z^2dv + (n-1)vzdz + avzdv + a(n-1)v^2dz + b(m+1)zdv - bvdz = 0$. Si fuerit $n = 2$, habetur forma Riccatii

$$x^m dx + ay^2 dx + bdy = 0,$$

cui ista aequatio ordinis secundi respondet

$z^2dv + vzdz + avzdv + av^2dz + b(m+1)zdv - bvdz = 0$, pro qua mihi difficilior videtur casuum separabilium investigatio, quam pro ipsa $x^m dx + ay^2dx + bdy = 0$. Sit $n = 1$, erit aequatio in quam haec $x^m dx + aydx + bdy = 0$ transformatur, ista $z^2dv + avzdv + b(m+1)zdv - bvdz = 0$, in qua littera z unicam dimensionem habere censenda est.

Quod aequationis $ady = y^2dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ ad hanc $adq = q^2dp - dp$ reductio universalis, n denotante numerum quemcunque, pendeat ab inventione termini generalis hujus seriei $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $(2m+1)\overset{m+2}{B} + A$, sic ostendo: Reductio illa perficitur hac substitutione $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ et

$$y\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. usque ad } \cfrac{1}{\cfrac{1a}{p} + q}}}}}$$

Formula ista continuarum fractionum dat, si $n = 1$, hunc valorem $\cfrac{1}{\cfrac{a}{p} + q}$ vel $\frac{1}{r+q}$, posito $r = \frac{a}{p}$. Si $n = 2$, prodit

$$\cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}} = \frac{r+q}{3r^2+3rq+1}. \text{ Si } n = 3, \text{ fit}$$

$$\cfrac{1}{5r + \cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}}} = \cfrac{1}{5r + \cfrac{r+q}{3r^2+3rq+1}} = \frac{3r^2+3rq+1}{15r^3+15r^2q+6r+q}.$$

Ponatur, brevitatis gratia, $r + q = s$, seu $q = s - r$ et valores inventi formulae datae respondentes litterae n collocentur in seriem, prodibit

$$\begin{array}{lcccc} n = 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \frac{1}{s}, & \frac{s}{3rs+1}, & \frac{3rs+1}{15r^2s+5r+s}, & \frac{15r^2s+5r+s}{105r^3s+35r^2+10rs+1}, & \text{etc.} \end{array}$$

in qua serie apparet cujusvis fractionis numeratorem esse praecedentis denominatorem. Atque si terminus ordine m sit $\frac{A}{B}$, fore sequentem indicis $m+1 = \frac{B}{(2m+1)B+A}$. Ex his ergo manifestum est, quod in praecedentibus litteris commemoravi, ex termino generali hujus seriei

$$\overset{m}{A},\ \overset{m+1}{B},\ (2m+1)\overset{m+2}{B}+A$$

cognito haberi formulae Riccatianae separationem et integrationem universalem. In illa autem serie, ut sit determinata, oportet esse terminum primum $= 1$ et secundum $= s$. Cognitis igitur ex termino generali A et B factoque $n = m$, erit

$$x = \left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m+1} \text{ et } y\left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m} = \frac{A}{B},$$

qua substitutione aequatio $ady = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ reducitur ad hanc $adq = q^2dp - dp$, ideoque integrabitur ope logarithmorum universaliter. Aequatio vero

$ady = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ modo initio tradito reducitur ad hanc

$$z^2dv + vzdz - vzdv - v^2dz + a\left(\frac{-2m+1}{2m+1}\right)zdv - avdz = 0.$$

Haec ergo reducetur ad istam $adq = q^2dp - dp$, substitutione $v = \frac{Ap}{(2m+1)B}$ et $z = \frac{Bp}{(2m+1)A}$. Vale et fave, V. C., Tui observantissimo

Eulero.

LETTRE XVIII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Remarque sur les sommes des séries et les intégrales. Solution d'une équation du 5ème degré.

Moscuae $\frac{15}{26}$ Januar. 1732.

In superioribus litteris Tuis non animadverteram Te in formula A, B, $(2m+1)B+A$ sumere m pro exponente terminorum qui comperit termino A, quod ex postremis Tuis nuper ad me datis nunc satis intelligo videoque simili modo $\int(1-y^{\frac{1}{n}})^p dy$ pendere a formula generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\big((p+n+x) \div (n \pm x)\big)A = B$, ubi per x intelligo exponentem qui termino A respondet, per $\div$ vero signum divisionis ambiguae, ita ut sumto ex signis $\pm$ superiore, $n+x$ sit denominator, sumto inferiore, $n-x$ fiat numerator; vel eandem integralem pendere a termino generali summarum seriei, cujus lex progressionis est $\frac{-(n+x-1)(p-x+1)A}{x(n+x)} = B$; sed raro admodum contingere arbitror, ut ad terminum hujusmodi generalem expeditior quam ad ipsam integralem quaesitam via sit.

Casu aliquo nuper observavi ex aequationibus quintae potestatis, quae hanc formam habeat

$$x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p^2}{4} - m^5)}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{-p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{p^2}{4} - m^5)}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p\right)}$$

quicunque numeri dentur pro m et p, radicem algebraicam erui posse, quod non contemnendum puto, quotiescunque numerus p in aequatione data $x^5 + \frac{5m}{2}x = n$, per m et n facile determinari potest. Vale.

Goldbach.

LETTRE XIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Solution des équations par approximation. Méthodes de D Bernoulli et de Taylor.

Petropoli d. 31 Januar. 1752.

Occasione aequationis ordinis quinti $x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{n}{2}$, cujus radicem Te assignare posse scribis, quoties est

$$n = \sqrt{\left[\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{pp}{4} - m^5)}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{pp}{4} - m^5)}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p\right]},$$

in qua vero determinatio litterae p etiam ab inventione radicis ex aequatione ordinis quinti pendet, non incongruum arbitror communicare, quae de radicibus aequationum proxime inveniendis observavi. Duos omnino modos ad hoc adhiberi solere perspexi, quorum primus est, quo in pluribus aequationis locis loco incognitae x ponitur quantitas non multum ab ea differens, et tum ipsa x quaeritur, deinde hic pro x inventus valor iterum in aliquot locis pro x scribatur, denuoque x quaeratur. Hujus operationis ope, quo saepius repetitur, eo propior habebitur quantitas ipsius x.

*

Ut in aequatione $x^2 = 3x + 20$ ponatur 6 loco x, ut prodeat haec aequatio $x = \frac{3x+20}{x} = 6\frac{1}{3}$, tum fiat $x = 6\frac{1}{3}$, fiet $x = 6\frac{3}{19}$, porroque eodem modo $x = 6\frac{29}{117}$, tandemque admodum exacte x reperietur. Generaliter etiam, si principio ponatur $x = a$, post unam operationem proveniet $x = 3 + \frac{20}{a}$, post duas $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}$, post tres

$x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}}$, atque post infinitas

$$x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{\text{etc.}}}}}$$

Hujus igitur continuarum fractionum quantitatis valor cognoscitur, est nimirum $= \frac{3+\sqrt{89}}{2}$. Hujusmodi etiam est quantitas, quam ad formulam Riccatianam construendam dedi. Hoc etiam modo nititur methodus Cl. Bernoullii nostri, quam dedit ope serierum ut vocat recurrentium radices aequationum admodum prope inveniendi. Ita autem hinc eam derivo: Sit primo aequatio quadratica $x^2 = ax + b$, fiat ex ea $x = a + \frac{b}{x}$, in qua pono esse $x = \frac{q}{p}$ prope, hoc substituto $x = \frac{aq+bp}{q}$ propius, hocque etiam pro x posito habebitur $x = \frac{a^2q+abp+bq}{aq+bp}$ multo denuo propius etc. Ex his ipsius x valoribus formatur facile haec series

$$p,\ q,\ aq+bp,\ a^2q+abp+bq, \text{ etc.}$$

hanc habens proprietatem A, B, $aB + bA$, adeoque recurrens. Si igitur ejus quivis terminus per praecedentem dividitur, quotus dabit valorem ipsi x eo propiorem, quo longius series continuatur. Idem quoque evenit etiamsi pro p et q numeri quicunque assumantur, quo vero magis $\frac{q}{p}$ ab x differt, eo longius series est continuanda. Si fuerit proposita aequatio cubica $x^3 = ax^2 + bx + c$, mutetur ea in $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$. Ad hujus radicem inveniendam pro x assumendi sunt duo valores arbitrarii hujus formae $\frac{q}{p}$ et $\frac{p}{n}$, ex quibus igitur fiet $x^2 = \frac{q}{n}$, prodibit ergo $x = \frac{aq+bp+cn}{q}$. Hinc emergit ista series n, p, q, $aq + bp + cn$, etc. itidem recurrens, et cujus quivis terminus per antecedentem divisus dat x proxime. Simili modo ad aequationis

$$x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}$$

radicem inveniendam servit haec series

$$m,\ n,\ p,\ q,\ aq+bp+cn+dm, \text{ etc.}$$

Compendium hinc ingens nascitur ex eo, quod principio pro x non unus sed plures valores assumuntur, hocque efficitur ut tot sumendis potestatibus non sit opus, ideoque series facile possit continuari. Aliis forte etiam idoneis modis aequationes possunt disponi, et congrui pro x valores assumi ut series prodeat simplicior, ope cujus radix inveniri potest. Alter modus appropinquandi est maxime usitatus, atque in eo continetur, ut primo divinando ipsi x propinquus valor habeatur, tumque complementum ejus quam proxime investigetur. Hoc modo fit aequatio $x^2 = ax + b$, in qua notum sit esse $x = c$ prope. Ponatur ergo $x = c + z$, ubi z valde parvum erit respectu c, ita ut pro x^2 assumi possit $c^2 + 2cz$, erit ergo $c^2 + 2cz = ac + az + b$, adeoque $z = \frac{c^2-ac-b}{a-2c}$ et $x = \frac{c^2+b}{2c-a}$. Si igitur jam pro c substituatur $\frac{c^2+b}{2c-a}$, prodibit multo exactius

$$x=\frac{c^4+6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3}$$

et ita porro. Hanc methodum vehementer amplificavit Cl. Taylor. Aequationem, in qua inest incognita x, reducere jubet ad nihilum, ut prodeat haec forma $X=0$, ubi X denotat quantitatem quamcunque ex x et cognitis composita. Deinde assumit quantitatem ipsi x propinquam, quae sit z, eamque in X pro x substituit, prodibit ergo quantitas ex z et cognitis composita, quae sit $=y$, namque quia non est $z=x$, etiam haec quae prodit quantitas non esse potest $=0$. Hoc facto sumantur differentialia positis y et z variabilibus, erit inquit $x=\frac{zdy-ydz}{dy}$ q. p. quae non solum pro aequationibus algebraicis, sed etiam transcendentibus valet. Ut sit $\sqrt[2]{(7x-xx)}-\sqrt[3]{(9+x^3)}=0$, ponatur $x=z$; erit $\sqrt[2]{(7z-zz)}-\sqrt[3]{(9+z^3)}=y$, hincque

$$dy=\frac{7dz-2zdz}{2\sqrt[2]{(7z-zz)}}-\frac{zzdz}{\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}$$

adeoque

$$x=z-\frac{2y\sqrt[2]{(7z-zz)}.\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}{(7-2z)\sqrt[3]{(9+z^3)^2}-2z^2\sqrt{(7z-zz)}};$$

ut ponatur $z=1$, erit $y=\sqrt{6}-\sqrt[3]{10}$, adeoque

$$x=1-\frac{12\sqrt[3]{100}+20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}}=\frac{18\sqrt{6}-7\sqrt[3]{100}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}}.$$

Accuratius deinde idem pertractat dicitque fore $x=z+v$. At v ex hac aequatione debet determinari

$$y+\frac{vdy}{1.dz}+\frac{v^2ddy}{1.2.dz^2}+\frac{v^3d^3y}{1.2.3.dz^3}+\text{etc.}=0.$$

Si ex hac aequatione definiri potest v accurate, etiam revera foret $x=z+v$. In secundis vero differentiationibus dz pro constante habetur. Inveni vero esse quam proxime

$$v=\frac{-ydz}{dy}\cdot\frac{\frac{-y^2dzd^2y}{1.2.dy^2}+\frac{y^3dzd^3y}{1.2.3.dy^3}-\frac{y^4dzd^4y}{1.2.3.4.dy^4}+\text{etc.}}{dy-\frac{yd^2y}{1.dy}+\frac{y^2d^3y}{1.2.dy^2}-\frac{y^3d^4y}{1.2.3.dy^3}+\text{etc.}}.$$

Sit $x^3-a=0$, erit $z^3-a=y$, et $dy=3zzdz$, $ddy=6zdz^2$ et $d^3y=6dz^3$ hinc habebitur

$$v=\frac{-y}{3z^2}\cdot\frac{-\frac{y^2}{3z^3}+\frac{y^3}{27z^6}}{3z^2-\frac{2y}{z}+\frac{y^2}{3z^4}}=\frac{-3yz^2+\frac{y^2}{2}-\frac{2y^3}{9z^4}}{9z^4-6yz+\frac{y^2}{z^2}}$$

atque

$$x=\frac{16z^9+51az^6+11a^2z^3+2a^3}{36z^8+36az^5+9a^2z^2}.$$

Nimis quidem est operosa haec methodus, si pluries eandem repetere volueris, ponendo iterum loco z, quod pro x jam erat inventum, sed forte etiam compendia poterunt excogitari, quae hanc aeque commodam reddunt, ac priorem methodum. Ad has autem operationes continuandas requiritur series hujus proprietatis $\overset{n}{x}$, $\overset{n+1}{P}$, $\overset{n+2}{X}$, ut X eodem modo determinetur in P, quo P determinatur in x. Nam pro hac aequatione $x^2=ax+b$ sunt ipsius x valores successive inventi hi

c, $\frac{c^2+b}{2c-a}$, $\frac{c^4-6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3}$, etc. ... A, $\frac{A^2+b}{2A-a}$.

Inveni autem quomodocunque P detur in x fore

$$X=P+\frac{(P-x)dP}{1.dx}+\frac{(P-x)^2ddP}{1.2.dx^2}+\frac{(P-x)^3d^3P}{1.2.3.dx^3}+\text{etc.}$$

Hujusmodi aequatio etiam dari potest pro curva cujus abscissae si fuerint 1, 2, 3, 4, etc. respondentes applicatae sunt 1, 2, 6, 24, 120, etc., scilicet in aequatione pro ea inerunt differentialia omnium graduum. Vale et fave, V. C. Tui observantissimo

L. Eulero.

LETTRE XX.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Problème de la géométrie des courbes.

(Plié en forme de lettre, mais sans suscription, signature et date).

Problema. (Fig. 4.) Si ex curva AMB curva Amb ita formetur, ut recta MAm per punctum fixum A ducta perpetuo capiatur ejusdem longitudinis; invenire casus, quibus hae duae curvae prodeunt inter se similes et aequales, ad axes AB, Ab inter se normales relatae.

Solutio. Posita longitudine constante $Mm = Dd = AB = 2a$, sit $AP = x$, $PM = y$, atque sumta nova variabili z, sit Q talis functio ipsius z, quae posita z negativa, abeat in sui ipsius negativam, cujusmodi sunt mz, $mz^3 + nz$, etc. Sequenti modo per z coordinatae x et y determinabuntur:

$$x = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz+2Q)}}{\sqrt{2(aa+zz)}}; \; y = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz-2Q)}}{\sqrt{2(aa+zz)}}.$$

Eliminandis ergo z et Q, infinitae prodibunt aequationes inter x et y, ac proinde innumerabiles curvae AMB problemati satisfacientes $Q. E. I.$

Corollarium 1. Erit ergo $\sqrt{(xx+yy)} = a + z$. Atque $x:y = \sqrt{(aa+zz+2Q)}:\sqrt{(aa+zz-2Q)}$.

Corollarium 2. Sumta $AC = \frac{a}{\sqrt{2}}$, fiet $CD = \frac{a}{\sqrt{2}}$ atque $AD = a$, punctoque D in altera curva sui homologum d respondebit in generatione.

Exemplum. Sit $Q = naz$, erit

$$xx : yy = aa + 2naz + zz : aa - 2naz + zz,$$

seu

$$xx\begin{pmatrix} 2aa + xx + yy - 2a\sqrt{(xx+yy)} \\ +2naa \qquad\qquad -2na\sqrt{(xx+yy)} \end{pmatrix} =$$

$$yy\begin{pmatrix} 2aa + xx + yy - 2a\sqrt{(xx+yy)} \\ -2naa \qquad\qquad +2na\sqrt{(xx+yy)} \end{pmatrix},$$

$$2a\big((n+1)xx + (n-1)yy\big)\sqrt{(xx+yy)} =$$

$$2aa\big((n+1)xx + (n-1)yy\big) + x^4 - y^4,$$

unde sequens oritur aequatio pro curva satisfaciente

$$x^8 - 2x^4y^4 + y^8 - 4na^2\big((n+1)x^2 + (n-1)y^2\big)(xx+yy)^2 +$$
$$4a^4\big((n+1)x^2 + (n-1)y^2\big)^2 = 0,$$

quae jam innumerabiles praebet curvas quaesitas.

LETTRE XXI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire Démonstration d'un théorème de géométrie.

Petropoli d. 12 Octobr. 1735.

Hesterni Tui theorematis praeterita nocte hanc demonstrationem imaginatus sum, quam mane veram deprehendi. Dato (Fig. 5.) rectangulo quocunque ADC, ducatur indefinita AF perpendicularis ipsi AC, ex qua abscindatur $AB = AD$. Si ex puncto C ducatur quaevis $CE = CD$ et ex E erigatur perpendicularis occurrens ipsi AF in F, dico esse $EF = BF$. Sit $AB = AD = a$, $CD = CE = b$, $AC = \sqrt{(a^2 + b^2)} = f$, $AF = e$, $AI = x$. Erit
$AF:AI::CE:EI = \frac{bx}{e}$; $AF:FI::CE:CI = \frac{b\sqrt{(e^2+x^2)}}{e} = f - x$,
ergo $x = \frac{e^2 f \pm e\sqrt{(e^2 f^2 + (b^2 - f^2)(e^2 - b^2))}}{e^2 - b^2}$; ergo $FE = FI + IE =$
$\sqrt{(e^2 + x^2)} + \frac{bx}{e} = \sqrt{(a^2 + e^2)} = FB$.
Ex quo patet, cum puncta E et F sint arbitraria, circulum quemcunque ductum radio FE ad angulos rectos secari per circulum ductum radio CE.

Goldbach.

LETTRE XXII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Solution d'un problème de géométrie.

.... d. Febr. 1736.

Problema mecum communicatum: Datis in quadrilatero (Fig. 6.) $ABCD$ omnibus lateribus et altera diagonali AC, invenire alteram diagonalem BD, sic solvi posse puto: Sit $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = y$. Quoniam data diagonali alterutra datur etiam area quadrilateri, quem pono $= \frac{e}{4}$,

erit $\left(-(a^2 - b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} +$

$$\left(-(c^2 - d^2)^2 + 2(c^2 + d^2)y^2 - y^4\right)^{\frac{1}{2}} = e.$$

Unde positis $-(a^2 - b^2)^2 = \alpha$, $+2(a^2 + b^2) = \beta$, $-(c^2 - d^2)^2 = \gamma$, $+2(c^2 + d^2) = \delta$ et

$$\frac{2e^2\delta-(\alpha-\gamma-e^2)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4e^2}=\pi,\quad \frac{4e^2\gamma-(\alpha-\gamma-e^2)^2}{(\beta-\delta)^2+4e^2}=\tau$$

pervenitur ad duplicem valorem $\gamma=(\pi\pm\sqrt{(\pi^2+\tau)})^{\frac{1}{2}}$, altero diagonalem datam AC, altero quaesitam BD exprimente.

Aliter: Quoniam datis quatuor lateribus et diagonali AC dantur etiam perpendiculares ad diagonalem $BE=f$, $DF=g$ et intercepta $FE=h$, erit diagonalis quaesita

$$BD=\sqrt{((f+g)^2+h^2)}.$$

Goldbach.

LETTRE XXIII.

Euler à Goldbach.

SOMMAIRE. Recherches de géométrie analytique.

Petropoli die 23 Julii A. 1737.

Cum in hesternam formulam, quam mecum communicare voluisti, diligentius essem meditatus, incidi in sequentes expressiones non solum satis generales, sed etiam perquam commodas, ex quibus omnes Tuae formulae, V. C., expedite derivari queant. Posita scilicet abscissa communi $=x$, sint utriusque curvae applicatarum elementa

$$dx\,(\sqrt{RS}\pm\sqrt{(R+1)(S-1)})$$

unde ipsarum curvarum elementa erunt

$$dx\,(\sqrt{(R+1)S}\pm\sqrt{R(S-1)}).$$

Quo igitur utraque curva fiat algebraica pro R et S, tales ipsius x accipiendae erunt functiones, ut tam $dx\sqrt{RS}$ quam

$dx\sqrt{(R+1)(S-1)}$ integrationem admittant. Deinde ut arcuum summa algebraica exprimi queat, hanc quoque formulam $dx\sqrt{(R+1)S}$ oportet esse integrabilem. Hoc autem pluribus modis facile praestabitur, sumendis pro R et S talibus functionibus ut RS, $(R+1)(S-1)$ et $S(R+1)$ fiant quantitates vel ex duobus vel ex uno termino constantes, quippe in quibus exponentes ita accipere licet ut quaesito satisfiat.

I. Sit $R = ax^m$ et $S = \frac{1}{ax^m}$, fient

elementa applicatarum $= dx\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{ax^m} - ax^m\right)}\right)$

elementa curvarum..... $= dx\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{ax^m}\right)} \pm \sqrt{(1 - ax^m)}\right)$

atque debebit esse $m = \frac{-1}{4i+1}$, denotante i numerum quemcunque affirmativum integrum.

II. Sit $R = ax^m - 1$ et $S = bx^n$, fient elementa applicatarum

$$= dx\left(\sqrt{(abx^{m+n} - bx^n)} \pm \sqrt{(abx^{m+n} - ax^m)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(x^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{ab} \pm \sqrt{(ax^m - 1)(bx^n - 1)}\right).$$

Quo autem tam utraque applicata, quam summa arcuum fiat algebraica, vel esse debet $m = \frac{4i+2}{4ik-1}$ et $n = \frac{4k+2}{4ik-1}$, vel etiam $n = \frac{-2i}{2ik+i+k}$ atque $n = \frac{-2k}{2ik+i+k}$, existentibus i, k numeris integris affirmativis.

III. Sit $R = \frac{ab}{c}x^m - \frac{abb}{cc}$ et $S = \frac{c}{b}x^m + 1$, fient applicatarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m\left(\frac{c}{b} - \frac{ab}{c} + ax^m\right)} \pm \sqrt{\left(ax^{2m} - \frac{abb}{cc}\right)}\right)$$

atque curvarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m\left(ax^m - \frac{ab}{c}\right)} \pm \sqrt{(b+cx^m)\left(\frac{1}{b} - \frac{ab}{cc} + \frac{a}{c}x^m\right)}\right)$$

sumaturque $m = \frac{-1}{2i+1}$.

IV. Sit $R = a^2x^{2m} + 2ax^m$ et $S = bx^m$, erunt applicatarum elementa

$$= dx\left(x^m\sqrt{(a^2bx^m + 2ab)} \pm (ax^m + 1)\sqrt{(bx^m - 1)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(bx^m(ax^m + 1) \pm \sqrt{x^m(a^2x^m + 2a)(bx^m - 1)}\right)$$

eritque vel $m = \frac{1}{i}$ vel $m = \frac{-2}{2i+3}$.

Hujusmodi autem formulae plures aliae hinc possunt derivari per idoneos valores loco R et S substituendos. Vale et favere perge, V. C., Tui observantissimo

L. Eulero.

LETTRE XXIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Annonce la découverte du terme général d'une série particulière.

.... d. 11 Oct. 1758.

Inveni ego hodie mane formulam generalem in infinitum excurrentem (sed quae abrumpatur quotiescunque exponens terminorum est integer affirmativus) pro serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{30}-0+\frac{1}{42}+0 \text{ etc.}$$

quae formula, si Tibi, Vir Celeberrime, jam nota est, ego inventoris secundi laude contentus ero, sin minus, formulam ipsam libenter Tecum communicabo.

C. G.

LETTRE XXV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorème d'analyse.

(Petrop.) d. 7 Nov. 1759.

Ex inventis Tuis demonstrari potest in summa seriei

$$\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-$$
$$\frac{1}{12^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{16^n}-\frac{1}{17^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{19^n}-\frac{1}{20^n}+\frac{1}{21^n}+ \text{ etc.}$$

quam continuare possum quousque libuerit, si ponatur $=\alpha\pi^n$, numerum α esse rationalem et assignabilem, si n sit numerus affirmativus par; et in casu $n=1$, totam seriem fieri $=0$. Goldbach.

P. S. Ut sciri possit an terminus quicunque datus $\frac{1}{x^n}$ exigat signum $+$ an signum $-$? dico, si x est numerus primus, locum habere signum $-$; si x productum ex duobus primis, locum habere signum $+$: si x productum ex tribus primis, locum habere signum $-$, et ita porro. V. gr. $\frac{1}{18^n}$ exigit signum $-$ quia producitur ex tribus $2.3.3$; $\frac{1}{24^n}$ exigit signum $+$ quia producitur ex quatuor $2.2.2.3$ et ita porro.

LETTRE XXVI.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Considérations sur le théorème précédent.

---

12 Nov. 1739 st v.

Si habeatur series quaecunque $a, b, c, d, e,$ etc. atque ponatur

$$P = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$
$$Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{etc.}$$
$$R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{etc.}$$
$$S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \text{etc.}$$
etc.

ac praeterea ex terminis $a, b, c, d,$ etc. formentur

1. facta ex singulis, quorum summa sit $A = P$,
2. facta ex binis, quorum summa sit $= B$,
3. facta ex ternis, quorum summa sit $= C$,
4. facta ex quaternis, quorum summa sit $= D$,

etc.

His positis, si numerus, cujus logarithmus est $= 1$, denotetur littera e (quae ne confundatur cum termino e) erit

$$1 + A + B + C + D + \text{etc.} = e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}}$$

sumendis vero terminis alternis, erit

$$1 + B + D + F + H + \text{etc.} = \frac{e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}} + e^{-P + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S - \text{etc.}}}{2}$$

atque

$$A + C + E + G + I + \text{etc.} = \frac{e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}} - e^{-P + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S - \text{etc.}}}{2}$$

Quod si nunc pro serie $a + b + c + d +$ etc. capiatur series potestatis cujuscunque numerorum primorum, ita ut sit

$$P = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$
$$Q = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \text{etc.}$$
$$R = \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \text{etc.}$$
$$S = \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \text{etc.}$$
etc.

erit A ipsa series numerorum primorum P, B series factorum ex binis, C series factorum ex ternis et ita porro; unde fiet $1 + A + B + C + D +$ etc. series omnium numerorum puta

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n.$$

Quam ob rem erit

$$e^{P + \frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}R + \frac{1}{4}S + \text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n$$

simili vero modo erit

$$e^{Q+\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}V+\frac{1}{4}X+\text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.} = \beta\pi^{2n}$$

quae expressio per illam divisa dabit

$$e^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\frac{1}{5}T+\frac{1}{6}V-\text{etc.}} = \frac{\beta\pi^n}{\alpha}$$

unde demonstrare potest egregia illa series

$$1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \text{etc.}$$

cujus summam Tu, V. C., demonstrasti esse $= \frac{\beta\pi^n}{\alpha}$.

His praemissis cum sit A series ipsorum numerorum primorum, B series factorum ex binis primis, C ex ternis et ita porro; scilicet

$$A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{14^n} + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{8^n} + \frac{1}{12^n} + \frac{1}{18^n} + \frac{1}{20^n} + \frac{1}{27^n} + \text{etc.}$$

$$D = \frac{1}{16^n} + \frac{1}{24^n} + \frac{1}{36^n} + \frac{1}{40^n} + \frac{1}{54^n} + \text{etc.}$$

$$E = \frac{1}{32^n} + \frac{1}{48^n} + \frac{1}{72^n} + \frac{1}{80^n} + \frac{1}{108^n} + \text{etc.}$$

etc.

sequitur fore $1 + A + B + C + D + \text{etc.} =$

$$e^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}} = \alpha\pi^n$$

$1 + B + D + F + \text{etc.} =$

$$\frac{e^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}} + e^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n$$

$A + C + E + G + \text{etc.} =$

$$\frac{e^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}} - e^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n$$

hincque $1 - A + B - C + D - E + F - G + \text{etc.} = \frac{\beta}{\alpha}\pi^n$, quae est ipsa series a Te, V. C., primum inventa. Denique ex his constat fore summam seriei $1 + B + D + F + \text{etc.}$ in qua insunt producta ex numero pari numerorum primorum, ad summam seriei $A + C + E + G + \text{etc.}$, quae continet numeros primos ipsos et producta ex numero impari eorum, uti est $\alpha^2 + \beta$ ad $\alpha^2 - \beta$, quae est proportio, quam hodie mihi inveniendam proposuisti. Vale, V. C., mihique favere perge.

Euler.

LETTRE XXVII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la lettre précédente.

(Petrop.) d. 24. Nov. 1739.

Gratissima mihi fuerunt quae heri scripsisti; mea solutio haec est: Sit

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}=\alpha\pi^n$$

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\text{etc.}=\beta\pi^{2n}$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{11^n}+\text{etc.}=M,$$

cujus denominatores, posita $n = 1$, sunt producta primorum numero imparium

$$1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\text{etc.}=N,$$

cujus denominatores, posita $n=1$, sunt producta primorum numero parium.

erit $\alpha\pi^n+\frac{\beta\pi^n}{\alpha}=2M$, $\alpha\pi^n-\frac{\beta\pi^n}{\alpha}=2N$. Sed nescio, an methodus Tua valeat ad determinandam v. gr. rationem inter terminos affirmativos et negativos hujus seriei

$$\frac{1}{4^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{12^n}+\frac{1}{16^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{20^n}+\text{etc.}$$

cujus denominatores, posita $n=1$, sunt omnes potestates numerorum et omnia earum multipla; termini notati signo $+$ continent denominatores productos ex primis numero paribus, termini notati signo $-$, ex imparibus, quam rationem tamen eruere potero si operae pretium visum fuerit.

Sed multo magis Tibi, opinor, placebit quod heri inveni: Sit $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}=\alpha\pi^n$, $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\text{etc.}=P$ (cujus seriei denominatores continent omnes numeros primos) erit

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\text{etc.}=(P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n},$$

modo sit $n>1$. Vale et fave —

Goldbach.

Note marginale d'Euler.

$$A=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.}$$

$$\frac{1}{A}=1+\frac{\alpha}{2^n}+\frac{\beta}{3^n}+\frac{\gamma}{4^n}+\frac{\delta}{5^n}+\frac{\varepsilon}{6^n}+\frac{\zeta}{7^n}+\frac{\eta}{8^n}+\text{etc.}$$

$\frac{\mu}{p^n}$ terminus generalis.

Si p est numerus primus erit $-\frac{1}{p^n}$

is p prod. ex duobus numeris primis inaequalibus: $+\frac{1}{p^n}$

prod. ex duobus numeris primis aequalibus: $+\frac{0}{p^n}$

si p prod. ex tribus inaequalibus	abc erit	$-\frac{1}{p^n}$
	aab	$+\frac{0}{p^n}$
	aaa	$+\frac{0}{p^n}$
si p prod. ex quatuor inaequalibus	$abcd$	$+\frac{1}{p^n}$
	$aabc$	$+\frac{0}{p^n}$
	$aabb$	$+\frac{0}{p^n}$
	a^3b	$+\frac{0}{p^n}$

LETTRE XXVIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Suite des recherches précédentes.

d. 26 Novembr. 1739.

Considerans rationem, quae intercedit inter summam seriei $\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+$ etc. et hanc expressionem

$$(P-1)^2+1-\frac{2}{a\pi^n},$$

deprehendi seriem aliquanto esse minorem ac fore

$$(P-1)^2+1-\frac{2}{a\pi^n}=\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\,.\,\text{summa factorum ex ternis} \\ -2\,.\,\text{summa factorum ex quaternis} \\ +2\,.\,\text{summa factorum ex quinis} \\ -\text{etc.} \end{array}\right\}\ \text{terminis inaequalibus}$$

seriei $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+$ etc. Quod si autem duplices istae factorum ex ternis, quaternis etc. summae, quippe quae per inventa Tua habentur, substituantur, prodit aequatio identica; quod idem non dubito, quin interim ipse observaveris, V. C.

Incidi heri in hanc seriem non parum curiosam

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{2}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{2}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{3}{8^n}+\frac{2}{9^n}+\frac{2}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{4}{12^n}+ \text{etc.}$$

cujus numeratores indicant, quot modis denominatores respondentes sint hujus seriei $2^n+3^n+4^n+5^n+$ etc., vel termini ipsi, vel producta ex binis, vel ternis, vel quaternis, vel ita porro. Sic denominator 60^n numeratorem habebit 11, quia 60 his undecim modis componitur:

I. 60.	V. 5. 12.	IX. 2. 5. 6.
II. 2. 30.	VI. 6. 10.	X. 3. 4. 5.
III. 3. 20.	VII. 2. 2. 15.	XI. 2. 2. 3. 5.
IV. 4. 15.	VIII. 2. 3. 10.	

Hujus seriei summam casu, quo $n=2$, inveni esse $=2$; atque initio arbitratus sum, etiam reliquis casibus summam rationaliter exhiberi posse. Verum rem diligentius scrutatus inveni casu $n=4$ summam fore $=\frac{8e^{\pi}\pi}{e^{2\pi}-1}=\frac{8\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$, ubi est proxime $e^{\pi}=23{,}1407$.

Deinde omnia fere theoremata, quae de seriebus numerorum primorum aliisque hinc natis protulisti, V. C., multo latius patere observavi. Si enim sit

$$A=\alpha=a+b+c+d+\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{llll} B= \text{summae factorum ex binis} \\ C= \quad ,, \qquad ,, & \text{ex ternis} \\ D= \quad ,, \qquad ,, & \text{ex quaternis} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{terminis seriei } A\text{, ter-}\\ \text{minis aequalibus non}\\ \text{exceptis,}\end{array}$$

itemque

$$\left.\begin{array}{llll} \beta= \text{summae factorum ex binis} \\ \gamma= \quad ,, \qquad ,, & \text{ex ternis} \\ \delta= \quad ,, \qquad ,, & \text{ex quaternis} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{terminis inaequalibus se-}\\ \text{riei } A \text{ vel } \alpha.\end{array}$$

fueritque

$$\left.\begin{array}{l} 1+A+B+C+D+E+\text{etc.}=s \\ 1-A+B-C+D-E+\text{etc.}=t \end{array}\right\} \text{erit} \left\{\begin{array}{l} 1+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}=\frac{1}{t} \\ 1-\alpha+\beta-\gamma+\delta-\text{etc.}=\frac{1}{s} \end{array}\right.$$

hincque

$$1+B+D+F+\text{etc.}=\frac{s+t}{2} \qquad 1+\beta+\delta+\zeta+\text{etc.}=\frac{s+t}{2st}$$

$$A+C+E+G+\text{etc.}=\frac{s-t}{2} \qquad \alpha+\gamma+\varepsilon+\eta+\text{etc.}=\frac{s-t}{2st}$$

item

$$(B-\beta)+(C-\gamma)+(D-\delta)+\text{etc.}=s-\frac{1}{t}$$

$$(B-\beta)-(C-\gamma)+(D-\delta)-\text{etc.}=t-\frac{1}{s}$$

$$(C-\gamma)+(E-\varepsilon)+\text{etc.}=\frac{1}{2}(s-t)\left(1-\frac{1}{st}\right)$$

$$(B-\beta)+(D-\delta)+\text{etc.}=\frac{1}{2}(s+t)\left(1-\frac{1}{st}\right)$$

Quod si autem loco terminorum a, b, c, d, etc. sumantur eorum quadrata sitque $A''=\alpha''=a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc., hincque series B'', C'', D'', etc., itemque β'', γ'', δ'', etc. simili modo formentur, quo supra B, C, D, etc. β, γ, δ, etc., ex serie $A=\alpha$ fiet:

$$1+A''+B''+C''+D''+\text{etc.}=st$$

et

$$1-\alpha''+\beta''-\gamma''+\delta''-\text{etc.}=\frac{1}{st}$$

unde erit generaliter

$$1 - A + B - C + D - \text{etc.} = \frac{1 + A'' + B' + C'' + D'' + \text{etc.}}{1 + A + B + C + D + \text{etc.}}$$

atque

$$(1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.})(1 \quad \alpha + \beta - \gamma + \text{etc.}) =$$
$$1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \text{etc.}$$

Ex his nunc, si pro serie $a + b + c + d + \text{etc.}$ substituatur haec $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$ secundum numeros primos procedens, sequentur omnia omnino theoremata, quae mecum communicare voluisti. Vale, V. C., ac favere perge Tui observantissimo

L. Eulero.

LETTRE XXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Application du calcul intégral à la sommation des séries.

(Sans date.)

Seriei, cujus terminus generalis est $\frac{1}{64x^2 - 64x + 15}$, vel $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8x-5} - \frac{1}{8x-3}\right)$ summa est $= \frac{1}{2}\int\frac{(zz - z^4)\,dz}{1 - z^8} = \frac{1}{2}\int\frac{zz\,dz}{(1+zz)(1+z^4)} = -\frac{1}{4}\int\frac{dz}{1+zz} + \frac{1}{4}\int\frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4}$, si post integrationem ponatur $z = 1$. At seriei, cujus terminus generalis est $= \frac{3m}{64xx - 64x + 7} = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{8x-7} - \frac{1}{8x-1}\right)$, summa est $= \frac{m}{2}\int\frac{(1 - z^6)dz}{1 - z^8} = \frac{m}{2}\int\frac{(1 + zz + z^4)\,dz}{(1+zz)(1+z^4)} = \frac{m}{4}\int\frac{dz}{1+zz} + \frac{m}{4}\int\frac{(1+zz)dz}{1+z^4}$, posito post integrationem $z = 1$. Verum est $\int\frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4}$; $\int\frac{dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l(1 + \sqrt{2})$ et

$$\int \frac{zzdz}{1+z^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l(1+\sqrt{2}).$$

Quare si a serie, cujus terminus generalis est $\frac{1}{(8x-5)(8x-3)}$, subtrahatur series, cujus terminus generalis $\frac{3m}{(8x-7)(8x-1)}$, seriei resultantis summa erit $= -\frac{(1+m)\pi}{16} + \frac{(1-m)\pi}{8\sqrt{2}}$. Vel seriei, cujus terminus generalis est $=$

$$\frac{3m}{64xx-64x+7} - \frac{1}{64xx-64x+15},$$

summa est $= \frac{(m+1)\pi}{16} + \frac{(m-1)\pi}{8\sqrt{2}}$. Quare si $m=1$, summa erit $= \frac{\pi}{8}$; at ut summa sit $=0$, oportet esse

$$m+1+m\sqrt{2}-\sqrt{2}=0,$$

seu $m = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

II. Si in serie $\frac{1}{x(2x-1)(4x-1)}$ summa terminorum parium ab imparibus subtrahatur, prodit series

$$\frac{1}{1.1.3} - \frac{1}{2.3.7} + \frac{1}{3.5.11} - \frac{1}{4.7.15} + \text{etc.},$$

quae resolvitur in has tres:

$$+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = \int \frac{dz}{1+z}$$

$$+\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} + \text{etc.} = \int \frac{2dz}{1+zz}$$

$$-\frac{8}{3} + \frac{8}{7} - \frac{8}{11} + \frac{8}{15} - \frac{8}{19} + \frac{8}{23} - \text{etc.} = -\int \frac{8zzdz}{1+z^4}$$

et summa omnium est $= l2 + \frac{\pi}{2} - \pi\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\, l(1+\sqrt{2})$, unde non video quomodo summa possit esse $= \pi - 4\, l2$. Sin autem res ita se haberet, foret $\pi = \frac{10 l2 + 4\sqrt{2}\, l(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}+1}$.

III. Seriei $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}) + \text{etc.}$

summa est $= \int \frac{dz(1-z+zz-z^3)}{1+z^4} =$

$$\int \frac{dz(1+zz)}{1+z^4} - \int \frac{zdz}{1+z^4} - \int \frac{z^3dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{l2}{4}.$$

IV. Si fuerit $\int d.\frac{xxdz}{dx} = \int \frac{dx}{1+x^3}$, erit utique

$$dz = \frac{dx}{xx}\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{dx}{xx}\left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}\right)$$

et

$$z = C + lx - \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^6}{6.7} - \frac{x^9}{9.10} + \text{etc.}$$

Constans autem C, si z deberet simul cum x evanescere, foret infinita; sin autem C maneat indefinita, tum casu $x=1$, quantitas z indefinitum, h. e. quemcunque valorem obtinebit.

V. Sinus ang. 18^0 est $= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, et sin. ang. 54^0 est $= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, unde erit $\frac{1}{\sin 18^0} - \frac{1}{\sin 54^0} = 2$, id quod etiam tabulae sinuum ostendunt; est enim $\frac{1}{\sin 18^0} =$ sec. 72^0 et $\frac{1}{\sin 54^0} =$ sec. 36^0.

VI. Serierum sequentium summae sunt

$$\left(\frac{1}{8x-5} - \frac{1}{8x-3}\right) = \int \frac{dz(zz-z^4)}{1-z^8} = \int \frac{zzdz}{(1+zz)(1+z^4)}$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{8}$$

$$\left(\frac{1}{8x-1} - \frac{1}{8x+1}\right) = \int \frac{dz(z^6-z^8)}{1-z^8} = \int \frac{z^6dz}{(1+zz)(1+z^4)}$$

$$= 1 - \int \frac{dz(1+zz+z^4)}{(1+zz)(1+z^4)} = 1 - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+zz} - \frac{1}{2}\int \frac{dz(1+zz)}{1+z^4}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{8}$$

$$\left(\frac{1}{6x-5}-\frac{1}{6x-2}\right)=\int\frac{dz(1-z^3)}{1-z^6}=\int\frac{dz}{1+z^3}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}+\frac{1}{3}\int\frac{2dz-zdz}{1-z+zz}$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}-\frac{1}{6}\int\frac{2zdz-dz}{1-z+zz}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z+zz}$$
$$=\frac{l2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

VII. Seriei $1-\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}-$ etc. jamdudum quoque conjectavi summam esse $=p(l2)^{2n-1}$, at casu $n=2$ facile statim deprehendi valorem ipsius p nequidem rationaliter exhiberi posse.

Euler.

LETTRE XXX.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorèmes relatifs à la sommation des suites.

(Petrop.) d. 9 Dec. 1739.

Observavi heri denominatoribus 1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4, etc. innumeris modis assignari posse numeratores algebraicos, ita ut series tota fiat summabilis, sic v. gr.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}+\frac{11}{1\ldots5}+\frac{19}{1\ldots6}+\frac{29}{1\ldots7}+\frac{41}{1\ldots8}+\frac{55}{1\ldots9}+\text{etc.}$$
est $=\frac{2}{1.2.3}+\frac{3}{1.2.3.4}+\frac{4}{1.2.3.4.5}+\frac{5}{1\ldots6}+\frac{6}{1\ldots7}+\frac{7}{1\ldots8}+\frac{8}{1\ldots9}+\text{etc.}=\frac{1}{2}$,

$$\frac{3}{1.2}-\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{1.2.3.4}-\frac{6}{1\ldots5}+\frac{7}{1\ldots6}-\frac{8}{1\ldots7}+\frac{9}{1\ldots8}-\frac{10}{1\ldots9}+\text{etc.}=1,$$

quae quidem facile demonstrari possunt; sed ex eodem fonte alia multo abstrusiora derivantur, ut si haec series

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1.2n^2}+\frac{3a+7}{1.2.3.n^3}+\frac{4a+13}{1.2.3.4n^4}+\text{etc.}$$

(cujus terminus generalis est $\frac{ax+x^2-x+1}{1.2.3\ldots xn^x}$) fiat $=-1$, posito pro a numero quocunque, dico, ut aequationi satisfiat, sumendum esse $n=\frac{-a\pm\sqrt{(a^2-4)}}{2}$.

C. G.

LETTRE XXXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Réponse à la lettre précédente.

Petropoli d. 9 Decembr. 1739.

Omnes series, quae continentur in hac formula generali $\frac{a+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}{1.2.3.4\ldots x.n^x}$ summari possunt per quantitates exponentiales et algebraicas conjunctim. Quare si vel coëfficientes α, β, γ, δ, etc., vel numerus n ita determinetur, ut exponentialia evanescant, obtinebuntur omnes series hujus formae, quae summas algebraicas habere possunt. Quod ut clarius appareat, per partes progrediar

Seriei cujus terminus generalis est:	Summa erit:
$\frac{\alpha}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\alpha - \alpha$
$\frac{\beta x}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\beta.\frac{1}{n}$
$\frac{\gamma x^2}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
$\frac{\delta x^3}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\delta\left(\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$
$\frac{\varepsilon x^4}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}+\frac{7}{n^2}+\frac{6}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)$
$\frac{\zeta x^5}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\zeta\left(\frac{1}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{25}{n^3}+\frac{10}{n^4}+\frac{1}{n^5}\right)$
$\frac{\eta x^6}{1.2.3\ldots x.n^x}$	$e^{\frac{1}{n}}\eta\left(\frac{1}{n}+\frac{31}{n^2}+\frac{90}{n^3}+\frac{65}{n^4}+\frac{15}{n^5}+\frac{1}{n^6}\right)$.

Lex, secundum quam hae summae progrediuntur, ita est comparata, ut termino generali $\frac{\psi x^{k+1}}{1.2.3\ldots x.n^x}$ respondeat summa haec

$$e^{\frac{1}{n}}\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{2^k-1}{1.n^2}+\frac{3^k-2.2^k+1}{1.2.n^3}+\frac{4^k-3.3^k+3.2^k-1}{1.2.3.n^4}+\frac{5^k-4.4^k+6.3^k-4.2^k+1}{1.2.3.4.n^5}+\text{etc.}\right).$$

Ex his igitur perspicitur seriei, cujus terminus generalis est $\frac{\alpha}{1.2.3\ldots x.n^x}$, summam algebraicam omnino esse non posse. Sit ergo terminus generalis $=\frac{\alpha+\beta x}{1.2.3\ldots x.n^x}$, erit ejus summa $=e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta}{n}\right)-\alpha$, unde summa toties erit algebraica, eaque $=-\alpha$, quoties fuerit $\alpha n+\beta=0$, seu $n=-\frac{\beta}{\alpha}$. Hicque continentur bini casus priores a Te, V. C., mihi perscripti, quos quidem facile posse demonstrari dicis. Sit autem terminus generalis $=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1.2.3\ldots x.n^x}$, erit summa $=$

$$e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)-\alpha.$$

Summa igitur erit algebraica, scilicet $=-\alpha$, si fuerit

$$\alpha n^2+(\beta+\gamma)n+\gamma=0,$$

seu

$$n=\frac{-\beta-\gamma\pm\sqrt{(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2-4\alpha\gamma)}}{2\alpha}.$$

Hic continetur series illa abstrusior

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1.2.n^2}+\frac{3a+7}{1.2.3.n^3}+\text{etc.}$$

cujus terminus generalis est $\frac{1+(a-1)x+x^2}{1.2.3\ldots x.n^x}$, cujus ob $\alpha=1$, $\beta=a-1$, $\gamma=1$, summa est $e^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{nn}\right)-1$, quae ideo fiet algebraica atque $=-1$, si sit $nn+an+1=0$, seu $n=\frac{-a\pm\sqrt{(aa-4)}}{2}$. Simili modo ulterius progredi licet, et cum seriei, cujus terminus generalis est

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5}{1.2.3.4\ldots x.n^x}$$

summa sit

$$=-\alpha+e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta}{n}+\frac{\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta}{n^2}+\frac{\delta+6\varepsilon+25\zeta}{n^3}+\frac{\varepsilon+10\zeta}{n^4}+\frac{\zeta}{n^5}\right),$$

haec summa algebraica esse non potest, quin simul fiat $=-\alpha$; erit autem haec summa $=-\alpha$, si fuerit n radix hujus aequationis

$$\alpha n^5+(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)n^4+(\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta)n^3+(\delta+6\varepsilon+25\zeta)n^2+(\varepsilon+10\zeta)n+\zeta=0.$$

Hac igitur methodo non solum innumerabiles series istius formae $\frac{X}{1.2.3\ldots x.n^x}$, ubi X functionem denotat algebraicam ipsius x quamcunque rationalem, exhiberi possunt algebraice summabiles, sed etiam intelligitur praeter has inventas alias omnino non dari. Vale, V. C., ac fave Tui observantissimo

L. Eulero.

LETTRE XXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. E. désire être dispensé des travaux de géographie.

d. 21 August 1740.

Die Geographie ist mir fatal. Ew. wissen, dass ich dabei ein Aug eingebüsset habe; und jetzo wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen. Als mir heut Morgen eine Partie Charten um zu examiniren zugesandt wurde, habe ich sogleich neue Anstösse empfunden. Denn diese Arbeit, da man genöthiget ist immer einen grossen Raum auf einmal zu übersehen, greifet das Gesicht weit heftiger an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein. Um dieser Ursachen willen ersuche ich Ew. gehorsamst, für mich die Güte zu haben, und durch Dero kräftige Vorstellung den Herrn Präsidenten dahin zu disponiren, dass ich von dieser Arbeit, welche mich nicht nur von meinen ordentlichen Functionen abhält, sondern auch leicht ganz und gar untüchtig machen kann, in Gnaden befreyet werde. Der ich mit aller Hochachtung und vielem Respect bin u. s. w. Leonh. Euler.

Correspondance mathématique et physique Tome I, page 102.

Correspondance mathématique et physique Tome I, page 102.

Fac-simile de l'écriture allemande de L. Euler, 1765.

Außer diesem ist aber noch ein besonderer Preis von 5000 Pf. Sterl. demjenigen bestimt, welcher die Megerischen Mondstafeln zu einer noch größern Vollkommenheit zu bringen im Stande ist. und eben ein solcher Preis war auch denjenigen versprochen welche andere wichtige und nützliche Erfindungen für die Schiffahrt machen werden. über welchen letztern Punct aber das Parlament sich nicht deutlicher erklärt, welches doch allerdings nöthig wäre.

Von des Hl. Grafen Zaltmann Hochgräfl. Excellenz habe ich noch keine Nachricht und Acten erhalten, so wie doch der Hl. D. le Clerc sogleich zugeben versprochen.

Die letztgemeldeten Tomi Comment. für mich werden ohnfehlbar schon abgeschickt worden seyn: der Xte Tomus wird nun auch schon durch Ew. Wohlgeb. Vorsorge fertig seyn: sollten die folgenden nicht können vollständig geliefert werden, und ich im Stand seyn die Lücken zu füllen, so warte nur auf Befehl. der ich mich zu Dero beständigen Gewogenheit und Freundschaft empfehle und mit der vollkommensten Hochachtung verharre

Ew. Wohlgeb.

Berlin d. 20 Julii
1765.

gehorsamster Diener
L. Euler

Lith. par Davignon.

LETTRE XXXIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Démarches pour obtenir à E. la dispensation demandée.

d. 21 August 1740. In Eil.

Sobald ich den Hn. Etatsrath von Brevern spreche, will ich nicht unterlassen, demselben die gehörige Vorstellung wegen Ew. kränklichen Zustandes zu thun; weil ich aber nicht gewiss bin, ob solches morgen oder erst über einige Tage wird geschehen können, hingegen bei dieser Sache periculum in mora ist, so halte ich davor, dass Ew. wohl thun werden, wenn Sie ohne Zeitverlust den Hn. Praesidenten und den Hn. Rath Schumacher schriftlich benachrichtigen, dass sie ohne offenbare Gefahr Ihrer Gesundheit die geographischen Occupations nicht fortsetzen können, sondern dieselben, so lange bis Sie sich besser befinden werden, aussetzen müssen. Indessen habe ich heute mit vielem Vergnügen von Hn. Secr. Tiedemann vernommen, dass Ew. sich schon etwas besser befinden; ich wünsche herzlich Sie ehestens völlig restituiret zu sehn und verbleibe mit sonderbarer Consideration Ew. u. s. w.

Goldbach.

LETTRE XXXIV.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Première lettre adressée à Berlin. Problème de la théorie des nombres. Sur deux anciens ouvrages de la Bibliothèque royale de Berlin.

St. Petersburg d. 19 Aug. 1741 st. n.

— — — Was halten Ew. von dergl. propositionibus: $(3m+2)n^2+3$ kann niemals ein numerus quadratus seyn, positis pro m et n numeris integris quibuscunque?

In den Zeitungen von gelehrten Sachen habe ich unlängst gelesen, dass die beiden Mönche, so Newtoni Principia Mathematica herausgeben, Ew. Mechanicam stark gebraucht haben.

Wenn Sie auf die königl. Bibliothèque in Berlin gehen werden, lassen Sie sich doch Joh. de Luneschlos Thesaurum Mathematum reseratum per algebram novam, Patavii 1646 in fol. und Petrum Bungum de numerorum mysteriis in 4to zeigen. Ich habe A. 1718 diese Bücher, aber nur obenhin, gesehen, und kann mich fast gar nichts mehr von derselben Inhalt erinnern. Goldbach.

LETTRE XXXV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de la théorie des nombres et du calcul intégral.

Berlin d. 9 September 1741.

Vor einigen Wochen haben Ihro Maj. die Königl. Frau Mutter mich zu sich holen lassen, und des Tags darauf hatte ich die Gnade bei Ihro Maj. zu speisen, und haben sowohl Ihro Majestät als die beiden Königl. Prinzessinnen mich auf die gnädigste und eine recht leutselige Art empfangen. Ihro Königl. Maj. der König haben mich auch nicht nur durch den Hn. Geh. Rath Jordan Dero Allerhöchsten Gnade und Protection versichern lassen, sondern auch Höchsteigenhändig nachfolgendes Schreiben zuzusenden die Gnade gehabt:

„Monsieur Euler. J'ai été bien aise d'apprendre que vous êtes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres nécessaires au grand Directoire pour la pension de 1600 écus que Je vous ai accordée. S'il y a encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis

Au Camp de Reichenbach ce 4 septembre 1741.

votre bien affectionné Roy Federic".

Weilen Ihro Maj. beschlossen haben ein neues Gebäu zur Akademie aufzubauen, so ist mir aufgetragen worden, einen vollständigen Riss von den akademischen Gebäuden in St. Petersburg zu verschaffen. Weilen nun alle diese Risse schon würklich in Kupfer gestochen, ich aber davon nicht leicht ein Exemplar von dem Hn. Schumacher hoffen darf, so nehme die Freyheit Ew. gehorsamst zu ersuchen ein Exemplar von diesen Rissen kaufen und dem Hn. Stähelin überliefern zu lassen....

Die beiden gemeldten Bücher habe ich von der Bibliothec holen lassen; aber in Petri Bungi Mysteriis numerorum nicht das geringste Merkwürdige gefunden. Er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3 bis tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil. Schrift und andern Auctoribus vorkommen; als bei 38 bringt er nichts anderes vor, als das Exempel des Kranken beim Teich zu Betesda, welcher 38 Jahre daselbst gelegen. Der Luneschloss ist ein sehr schönes Buch in seiner Art; ich habe aber dasselbe noch nicht völlig durchgegangen.

Ew. theorema, dass $(3m+2)n^2+3$ kein Quadrat seyn könne, ist sehr artig, und kann ich die Richtigkeit desselben auf folgende Art darthun: Entweder ist n durch 3 divisibel, oder nicht. Im ersten Fall ist n^2 divisibel durch 9, und bekömmt die Expression $(3m+2)n^2+3$ eine solche Form $9p+3$, welche kein Quadrat seyn kann, wie bekannt. Im andern Fall, wenn n nicht durch 3 divi-

sibel ist, so ist n^2 eine solche Zahl: $3p+1$ und $(3m+2)n^2+3$ bekömmt diese Form $9mp+3m+6p+5$, das ist $3q+2$, von welcher Form gleichfalls bekannt, dass solche niemals ein Quadrat seyn kann. Ich habe vor langer Zeit auch solche ähnliche theoremata gefunden, als $4mn-m-1$ kann nullo modo ein Quadrat seyn. Item $4mn-m-n$ kann auch kein Quadrat seyn, positis m et n numeris integris affirmativis.

Von den divisoribus quantitatis $aa \pm mbb$, si a et b sint numeri inter se primi, habe ich auch curieuse proprietates entdeckt, welche etwas in recessu zu haben scheinen, als da sind:

Theor. 1. Omnes divisores primi formulae $aa-2bb$ continentur in forma $8n \pm 1$.

Theor. 2. Omnes divisores primi formulae $aa-3bb$ sunt $12n \pm 1$.

Theor. 3. Nullus numerus primus potest esse divisor formae $aa-5bb$ nisi qui sit in hac forma $10n \pm 1$ contentus.

Von den integralibus formulae $\frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}$ habe ich auch merkwürdige proprietates gefunden, si post integrationem ponatur $x=1$. Als da sind

Theor. Integrale $\int\frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$ se habet ad $\int\frac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$ uti $\sqrt{2}$ ad 1, posito post utramque integrationem $x=1$.

Theor. Integrale $\int\frac{dx}{(1-xx)^{\frac{5}{6}}}$ se habet ad integrale $\int\frac{dx}{(1-xx)^{\frac{2}{3}}}$ uti $\sqrt{3}$ ad 1, posito pariter post utramque integrationem $x=1$. Welche theoremata um so viel merkwürdiger scheinen, da sonsten nach der gewöhnlichen Art diese Integralia nicht mit einander compariret werden können.

Euler.

LETTRE XXXVI.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Paradoxes tirés de l'ouvrage de Luneschlos.

St. Petersburg d. 7 Nov. st. n. 1741.

Die sonderbare Distinction, mit welcher Ew. in Berlin aufgenommen wurden, hat mir nicht anders als erfreulich seyn können; insonderheit habe ich das gnädigste Schreiben Ihro Königl. Majestät an Ew. mit der grössesten Veneration gelesen und admiriret. Es muss eine treffliche directio ☉ aut ♃ ad medium coeli, oder dergleichen eine, für Ew. eingefallen seyn, welche ex post facto in dem themate nativ. sich wohl wird finden lassen.....

Dass Sie in des Leuneschlos Thesauro etwas Gutes gefunden, ist mir sehr lieb. Ich habe schon A. 1716 in Königsberg von demselben autore ein Tractätchen in 8$^{\text{vo}}$ gelesen, welches er Paradoxa de quantitate nennet. Das 352$^{\text{te}}$ heisset: Si Deus auferret omne corpus in vase contentum movendo vel annihilando, nec aliud ullum in ablati locum

venire permitteret movendo aut creando, hoc ipso vasis latera forent contigua, nec vel tantillum amplius distarent. Das 473$^{\text{te}}$: Monstrosa et deformia etiam faciunt ad pulchritudinem mundi. Das 522$^{\text{te}}$: Si luna esset concava, terra periret incendio. Das 946$^{\text{te}}$: Pondera campanarum sunt in triplicata ratione sonorum. Verum crassities fidium longitudine et tensione aequalium sunt in ratione duplicata sonorum. Das 589$^{\text{te}}$: Cum semidiameter gyrorum aquae quovis modo percussae secundo horae minuto dilatatus vix pedem exaequet, et semidiameter spirarum in aëre quavis etiam percussione procreatarum eodem tempore millium trecentorum ac octuaginta pedum existat, sequitur aquam millibus trecentum et octuaginta (1380) vicibus aëre densiorem atque graviorem esse.....

Goldbach.