genommen werden: $(\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2$, da dann noch übrig ist $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2$ in zwey quadrata zu resolviren. Setzt man nun dieselben $(\delta + p)^2 + (\delta + q)^2$, so wird

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 3\delta\delta + 2(p+q)\delta + pp + qq$$

und

$$3\delta + p + q = \sqrt{(3\alpha\alpha + 3\beta\beta + 3\gamma\gamma - 2pp - 2qq + 2pq)}.$$

Es sey nun ferner $p = \gamma + m$, $q = \gamma + n$, so wird

$$3\delta + 2\gamma + m + n =$$
$$\sqrt{(\gamma\gamma - 2(m+n)\gamma + 3\alpha\alpha + 3\beta\beta - 2mm - 2nn + 2mn)}.$$

Damit nun dieses radicale gleich werde

$$\sqrt{(\gamma\gamma - 2(m+n)\gamma + (m+n)^2)},$$

oder

$$3\alpha\alpha + 3\beta\beta = 3mm + 3nn,$$

so darf man nur setzen $m = \alpha$ und $n = \beta$, und bekommt $3\delta + 2\gamma + \alpha + \beta = \pm(\gamma - \alpha - \beta)$ oder $\delta = -\left(\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right)$.

Wenn, um die Sach generaler zu machen, zwey von den gesuchten vier Quadraten angenommen werden

$$(q\delta + 2)^2 + (q\delta - 2)^2 = 2qq\delta\delta + 8,$$

so muss

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - (2qq - 1)\delta\delta = 2 \text{ quadr.} = (\delta + f)^2 + (\delta + g)^2,$$

das ist

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = (2qq + 1)\delta\delta + 2(f+g)\delta + ff + gg,$$

oder

$$2(qq+1)\delta + f + g =$$
$$\sqrt{(2fg - 2qq(ff + gg) + (2qq + 1)(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma))}.$$

Nun sey ferner $f = \frac{q\gamma + m}{2q - 1}$ und $g = \frac{q\gamma + n}{2q - 1}$, so kommt eine weitläufige Formul heraus, welche ich nicht der Mühe werth achte zu entwickeln, weil ich nun sehe, dass daraus Ew. zweyte Formuln nicht entspringen. Es scheint aber, dass

unendlich viel dergleichen Operationen angestellt werden können, welche immer andere Formuln hervorbringen; und deswegen können unendlich viel Relationen zwischen den Buchstaben α, β, γ, δ angegeben werden, damit

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8$$

in vier quadrata resolvirt werden könne. Da nun dies ohne einige Restriction wahr ist, so sehe ich nicht, was dergleichen Determinationen zur gesuchten Demonstration beytragen könnten. Ich habe rigorosissime bewiesen, dass wenn N ein numerus integer ist, allezeit seyn müsse

$$N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

wo aber A, B, C, D sowohl numeros fractos als integros andeuten. Es wäre also nur noch übrig zu zeigen, dass wenn quatuor quadrata fracta eine summam integram haben, dieselbe Summ sich auch nothwendig in quatuor (vel pauciora) quadrata integra müsse zerlegen lassen. Ich kann nun wohl beweisen, dass wenn $\frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss} = N$ numero integro, auch seyn müsse $N = aa + bb$ in integris; allein jenen Beweis kann ich nicht auf gleiche Art bewerkstelligen.

Wenn $2ee - ff + 2$ ein Quadrat seyn soll, und dazu e gesucht wird, ohne darauf zu sehen, ob e ein numerus fractus oder integer wird, so habe ich diese solutionem generalem gefunden:

$$e = \frac{(mm - 2mn + 2nn)f + mm - 4mn + 2nn}{2nn - mm},$$

wo man für m und n numeros quoscunque annehmen kann.

Will man aber nur die valores integros für e haben, damit $2ee - ff + 2$ ein Quadrat werde, so dienen dazu folgende formulae in infinitum:

$$e = f \pm 1$$
$$e = 5f \pm 7$$
$$e = 29f \pm 41$$
$$e = 169f \pm 239$$
$$e = 985f \pm 1393$$
$$e = 5741f \pm 8119$$
etc.

Die lex progressionis ist diese, dass wenn zwey dergleichen formulae se immediate insequentes sind

$$e = Mf \pm m$$
$$e = Nf \pm n$$

die folgende seyn muss

$$e = (6N - M)f \pm (6n - m).$$

Inzwischen kann man doch alle diese Formuln durch eine einige Generalformul ausdrücken: Sit q numerus impar quicunque, dico fore

$$e = \frac{(\sqrt{2}+1)^q + (\sqrt{2}-1)^q}{2\sqrt{2}} f \pm \left(\frac{(\sqrt{2}+1)^q - (\sqrt{2}-1)^q}{2}\right)$$

und es ist auch gewiss, dass alle Fälle, in welchen e durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann, in diesen Formuln enthalten sind. Gleichergestalt, wenn

$$(bb \pm 1)\, ee \mp 4aaff \pm 4cc\,(bb \pm 1)$$

ein Quadrat seyn soll, so ist:

$$e = \frac{(\sqrt{(bb \pm 1)} + b)^q + (\sqrt{(bb \pm 1)} - b)^q}{\sqrt{(bb \pm 1)}} \cdot af \pm$$
$$\left(\left(\sqrt{(bb \pm 1)} + b\right)^q - \left(\sqrt{(bb \pm 1)} - b\right)^q\right) c;$$

also in diesem Fall $3ee + ff - 3 =$ quadrato, wird

$$e = \frac{(\sqrt{3}+2)^q + (\sqrt{3}-2)^q}{2\sqrt{3}} f \pm \frac{((\sqrt{3}+2)^q - (\sqrt{3}-2)^q)}{2}.$$

Euler.

LETTRE CXLIII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet. Question de syntaxe de la langue française.

St. Petersburg d. 9. Mai 1752.

Ew. Dissertation de summis divisorum, welche Sie an die hiesige Akad. der Wiss. übersandt haben, ist mir von dem Hrn. Prof. Grischow communiciret worden. Ich befinde mich jetzo nicht im Stande davon pro dignitate zu urtheilen, allein Dero bekannte Einsicht in dergleichen Sachen, lässet mich an der Richtigkeit alles dessen, was in bemeldter Dissertation enthalten ist, nicht zweifeln. Insonderheit habe ich mit Vergnügen gesehen, dass in den numeris 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, etc. eine so schöne Ordnung von Ew. bemerkt worden, und glaube gänzlich, dass es series gibt, aus deren mehr als hundert terminis consequentibus die lex progressionis, ob sie gleich an sich selbst kurz und leicht ist, dennoch nicht zu ersehen seyn wird, als z. Ex. sit series

$$\alpha \ldots \overset{1}{1},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{5},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{1},\ \overset{6}{23},\ \overset{7}{43},\ \text{etc.}$$

cujus progressio haec est, ut dato termino quocunque A et exponente termini n, fiat $A \pm \sqrt{(2.3^n - 2AA)} =$ termino proxime sequenti B, sumendo signum $+$ vel $-$, ita ut B non fiat divisibilis per 3, ex quo sequitur seriem α habere sororem

$$\beta \ldots \overset{1}{1},\ \overset{2}{2},\ \overset{3}{1},\ \overset{4}{4},\ \overset{5}{11},\ \overset{6}{10},\ \overset{7}{13},\ \text{etc.}$$

ita comparatam, ut duplum quadrati termini, cujus exponens est n in serie β, additum ad quadratum termini, cujus exponens est idem n in serie α, det 3^n, unde simul apparet legem progressionis seriei β esse $A \pm \sqrt{(3^n - 2AA)} = B$, sumendo $+$ vel $-$, ita ut B non fiat divisibilis per 3.

Sit ex. gr. $n = 4$, erit terminus huic exponenti respondens in serie α, 7, quadratum ejus 49, et duplum quadrati termini huic exponenti respondentis in serie β erit 2.4^2 ergo $7^2 + 2.4^2 = 3^4 = 81$.

Similiter quadratum termini, cujus exponens est 5 in serie α, est 1^2, duplum quadrati termini respondentis exponenti 5 in serie β, est $= 2.11^2$, ergo $1 + 2.11^2 = 3^5 = 243$ et ita porro. Hinc patet solutio problematis: Dividere numerum 3^{n+1} in tria quadrata, quorum nonnisi duo sint aequalia.

Ich habe auch observiret, dass $\square + \square + \square = \frac{\square + 2\square + 3\square}{6}$, oder dass in der Aequation

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6}$$

datis a, b, c, integris, die numeri p, q, r allezeit per integros exprimiret werden können.

Goldbach.

P. S. Dass ein jeder numerus $(2mm + 1)^n$ in drey quadrata, quorum duo sunt aequalia, resolviret werden kann,

ist gar leicht auf folgende Art zu demonstriren: Sit

$$(2mm + 1)^n = pp + 2mmqq,$$

erit

$$(2mm + 1)^{n+1} = (p \pm 2mmq)^2 + 2mm(p \mp q)^2;$$

nun aber ist die propositio antecedens wahr in casu $n = 1$ (denn es wird $p = q = 1$), also ist auch die propositio consequens wahr, weil auf gleiche Art aus jedem casu der proxime sequens demonstriret werden kann.

(Feuillet annexé).

Der P. Bouhours saget an einem Orte: Comme ces messieurs m'ont reproché plusieurs fois que je lisois ce que je ne devrois point lire, je me suis attaché plus que jamais à la lecture du Nouveau Testament.

Hierüber hat ein gewisser Autor nachfolgende critique gemacht: „Je ne *devrois*“ est là une faute de temps, il falloit avoir mis: „que je lisois ce que je ne *devois* point lire,“ autrement il faudra supposer que cet auteur lit encore les livres qu'on lui a reproché de lire.

Ich möchte gern wissen, ob diese critique, die sehr subtile ist, von M. Achard oder von M. Formey vor richtig erkannt wird, im Fall Ew. Gelegenheit hätten sich darüber zu informiren.

LETTRE CXLIV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Question de syntaxe de la lettre précédente. Intégrations et théorème de la géométrie des courbes.

Berlin d. 30. Mai 1752.

Die series

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{5},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{1},\ \overset{6}{23},\ \overset{7}{43},\ \text{etc.},$$

von welcher Ew. diese schöne Eigenschaft angemerket, dass $B = A \pm \sqrt{(2.3^n - 2A^2)}$, ist dem ersten Anblick nach so irregulär, dass sie nach keinem gewissen Gesetz fortzugehen scheinet. Weil aber die bemerkte Eigenschaft Statt findet, die termini mögen affirmative genommen werden oder negative, so kann man denselben solche signa vorsetzen, dass eine sehr regelmässige series herauskomme, nehmlich:

$$-\overset{1}{1}+\overset{2}{1}+\overset{3}{5}+\overset{4}{7}-\overset{5}{1}-\overset{6}{23}-\overset{7}{43}-\overset{8}{17}+\overset{9}{215}\ \text{etc.}+\overset{n}{P}+\overset{n+1}{Q}+\overset{n+2}{R}$$

als welche recurrens ist von der Eigenschaft, dass $R = 2Q - 3P$.

Folglich ist kraft der Natur dieser serierum

$$P = \frac{-(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2}$$

und

$$Q = \frac{-(1+\sqrt{-2})^{n+1} - (1-\sqrt{-2})^{n+1}}{2}.$$

folglich $2.3^n = Q^2 - 2PQ + 3P^2$ und also

$$Q = P + \sqrt{(2.3^n - 2P^2)}.$$

Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der andern serie sorore, welche mit den gehörigen signis diese Form bekommt

$$+\overset{1}{1}+\overset{2}{2}+\overset{3}{1}-\overset{4}{4}-\overset{5}{11}-\overset{6}{10}+\overset{7}{13}\ \text{etc.}\ \overset{n}{p}+\overset{n+1}{q}+\overset{n+2}{r},$$

da auch $r = 2q - 3p$, und also

$$p = \frac{(1+\sqrt{-2})^n - (1-\sqrt{-2})^n}{2\sqrt{-2}} \text{ und } q = p + \sqrt{(3^n - 2pp)}.$$

Was aber die schöne Vewandtschaft dieser beyden serierum anlangt, so habe ich überhaupt gefunden, wenn man zwey solche series hat

$$\alpha \ldots \overset{(0)}{1},\ \overset{(1)}{a},\ \overset{(2)}{aa-b},\ \overset{(3)}{a^3-3ab},\ \overset{(4)}{a^4-6aab+bb},$$

$$\ldots \overset{(n)}{\frac{(a+\sqrt{-b})^n + (a-\sqrt{-b})^n}{2}} = X$$

$$\beta \ldots \overset{(0)}{0},\ \overset{(1)}{1},\ \overset{(2)}{2a},\ \overset{(3)}{3aa-b},\ \overset{(4)}{4a^3-4ab},$$

$$\ldots \overset{(n)}{\frac{(a+\sqrt{-b})^n - (a-\sqrt{-b})^n}{2\sqrt{-b}}} = Y$$

welche beyde recurrentes sind von der Natur, dass

$$C = 2aB - (aa+b)A,$$

wenn nehmlich A, B, C tres termini successivi sind, so ist immer $XX + bYY = (aa+b)^n$. Setzt man nun $a = 1$, $b = 2$, so kommen Ew. beyde series heraus.

Dero Anmerkung, dass allezeit

$$aa + bb + cc = \frac{pp+2qq+3rr}{6},$$

beruhet auf diesem Grund, dass $p = 2a + b - c$, $q = a - b + c$, und $r = b + c$. Dieselbe hat mir aber Anlass gegeben zu suchen, in welchen Fällen es möglich sey, dass

$$aa + bb + cc = fpp + gqq + hrr.$$

Zu diesem Ende setze ich
$p = \alpha a + \beta b + \gamma c$, $q = \delta a + \varepsilon b + \zeta c$, $r = \eta a + \vartheta b + \iota c$,
und da muss folgenden sechs Aequationen ein Genüge geleistet werden:

$$f\alpha\alpha + g\delta\delta + h\eta\eta = 1;\ f\beta\beta + g\varepsilon\varepsilon + h\vartheta\vartheta = 1;$$
$$f\alpha\beta + g\delta\varepsilon + h\eta\vartheta = 0;\ f\alpha\gamma + g\delta\zeta + h\eta\iota = 0;$$
$$f\gamma\gamma + g\zeta\zeta + h\iota\iota = 1;$$
$$f\beta\gamma + g\varepsilon\zeta + h\vartheta\iota = 0;$$

deren Resolution nicht wenig Mühe kostet. Ich habe dieselbe folgendergestalt herausgebracht: Für $\beta, \gamma, \varepsilon, \zeta$ kann man annehmen, was man will, und ausser denselben noch nach Belieben die Zahlen m und n, so wird

$$\alpha = \frac{n}{m}(\beta\varepsilon + \gamma\zeta);\ \delta = -\frac{m}{n};\ \eta = mn(\gamma\varepsilon - \beta\zeta);$$
$$\vartheta = mm\gamma + nn\zeta(\beta\varepsilon + \gamma\zeta);\ \iota = -mm\beta - nn\varepsilon(\beta\varepsilon + \gamma\zeta);$$

und ferner $f = \frac{mm}{mm(\beta\beta + \gamma\gamma) + nn(\beta\varepsilon + \gamma\zeta)^2}$; $g = \frac{nn}{mm + nn(\varepsilon\varepsilon + \zeta\zeta)}$
und $h = \frac{fg}{mmnn}$. Also ist $aa + bb + cc = \frac{3pp + 14qq + rr}{42}$ wenn

$$p = 3a + 2b - c$$
$$q = a - b + c$$
$$r = -a + 4b + 5c.$$

Dergleichen theoremata können also unendlich viel aus diesen Generalformuln herausgebracht werden.

Wegen der überschriebenen passage des P. Bouhours habe ich erstlich den Hrn. De Maupertuis als un des quarante de l'Académie française befraget, welcher, nachdem er dieselbe nebst der critique etlichemal überlesen, gesagt,

dass er ohne einiges Bedenken sich sowohl des *devrois* als des *devois* bedienen würde, und fügte hinzu: „il est plaisant qu'on a critiqué le Père Bouhours sur ce mot.“

M. Achard lässt Ew. wegen des in ihn gesetzten guten Zutrauens sein gehorsamstes Compliment vermelden, und nachdem er die Sache wohl erwogen, so vermeint er, dass *devrois* besser sey; doch will er das *devois* nicht verwerfen.

Ich habe darüber auch den Hrn. Beguelin, Hofmeister bey dem Prinz Friedrich von Preussen, welcher für ungemein stark in der französischen Sprache gehalten wird, befraget, und dieser approbirt die critique vollkommen.

M. de Maupertuis hatte wohl noch diesen Einfall, dass man untersuchen müsste, ob man auf Latein sagen soll „quos legere non debebam“ oder „non deberem“, und die Decision im Lateinischen, welche weder er noch ich zu geben uns getraueten, würde auch im Französischen gelten. Hieraus werden also Ew. selbst die Sache am besten decidiren.

Mir kommt des Hrn. Beguelin's Entscheidung deswegen am gründlichsten vor, weil er die Reguln der französischen Sprache mit allem Fleiss studirt hat, welche M. de Maupertuis und Achard nur ex usu wissen, und beyde sagen mir, dass sie oft der Sache einen andern tour geben müssen, weil sie in Zweifel stehen, ob gewisse Expressionen, die sie brauchen wollten, recht sind oder nicht.

Neulich bin ich auf curieuse Integrationen verfallen. Denn gleich wie von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$ das integrale ist $yy + xx = cc + 2xy\sqrt{(1-cc)}$, also ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$ das integrale:

$$yy + xx = cc + 2xy\sqrt{(1-c^4)} - ccxxyy.$$

Ferner ist von dieser Aequation $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$ das integrale:

$$xx + yy + ccxxyy = 4c - 4cc(x+y) + 2xy - 2cxy(x+y).$$

Aus solchen Formuln habe ich folgendes theorema hergeleitet (Fig. 41):

In quadrante elliptico ACB, si ad punctum quodvis M ducatur tangens VMT, alteri axi CB occurrens in T, eaque capiatur $TV = CA$, et ex V ipsi CB agatur parallela VN; itemque ex centro C in tangentem perpendiculum CP, dico fore differentiam arcuum BM et AN rectificabilem, scilicet $BM - AN = MP$.

Dieses Jahr habe ich wieder den auf den Saturnum gesetzten Preis, welcher doppelt war, nemlich von 5000 ℔. allein erhalten.

Euler.

LETTRE CXLV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Développement ultérieur du théorème de géométrie précédent. Opinion de Formey sur la question de syntaxe.

Berlin d. 3. Juni 1752.

Seit dem vorigen Posttag hat mir auch M. Formey seine Meynung über die gemeldte Stelle des P. Bouhours zugeschickt, welche also Ew. nicht habe ermangeln wollen zuzustellen.

Die Eigenschaft der ellipsis, dass darin zwey arcus, deren differentia rectificabilis ist, können angegeben werden, scheinet um so viel mehr merkwürdig zu seyn, da bisher die arcus elliptici auf keinerley Art haben unter sich verglichen werden können. Seitdem habe ich aber angemerkt, dass wenn man das problema umgekehrt vorträgt und diejenige krumme Linie sucht, welcher die gedachte Eigenschaft zukommt, die Solution durch die gewöhnlichen Methoden gefunden werden kann.

Quaeratur scilicet (Fig. 41) curva AMB hujus indolis, ut ducta in quovis puncto M tangente TMV, axi CB in T occurrente, indeque sumta $TV = CA$, si ex V ad axem CA perpendicularis agatur VNq curvam in N secans, differentia arcuum BM et AN fiat rectificabilis, scilicet $= \frac{CQ.Cq}{b}$.

Solutio. Pro puncto M sit abscissa $CQ = x$, arcus $BM = s$; pro puncto autem N sit abscissa $Cq = X$ et arcus $BN = S$, et ob curvae continuitatem relatio inter X et S similis esse debet relationi inter x et s. Ponatur totus arcus $AMB = A$, erit arcus $AN = A - S$, ideoque oportet sit

$$BM - AN = s - A + S = \frac{xX}{b};$$

hincque differentiando $ds + dS = \frac{Xdx + xdX}{b}$. Deinde quia $TV = CA = a$ est tangens curvae in M, erit

$$ds : dx = TV : Cq = a : X, \text{ ergo } ds = \frac{adx}{X}.$$

Cum autem puncta M et N sint inter se permutabilia ob curvae continuitatem, erit pari modo $dS = \frac{adX}{x}$; sicque habebitur $ds + dS = \frac{adx}{X} + \frac{adX}{x}$. At invenimus

$ds + dS = \frac{Xdx + xdX}{b}$, unde fit $\frac{adx}{X} + \frac{adX}{x} = \frac{Xdx + xdX}{b}$,

seu $ab(xdx + XdX) = Xx(Xdx + xdX)$, quae aequatio integrata dat $ab(xx + XX) = XXxx \pm c^4$, ideoque

$$XX = \frac{abxx \mp c^4}{xx - ab} = \frac{\pm c^4 - abxx}{ab - xx} \text{ et } X = \sqrt{\frac{c^4 - abxx}{ab - xx}}.$$

Consequenter

$$ds = \frac{adx}{X} = \frac{adx\sqrt{(ab - xx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Sit applicata $QM = y$, ob $dy = \sqrt{(ds^2 - dx^2)}$ erit

$$dy = \frac{dx\sqrt{(a^3b - aaxx - c^4 + abxx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Cum nunc constans c pro lubitu accipi queat, dantur infinitae curvae problemati satisfacientes, inter quas erit curva algebraica, si $c^4 = a^3b$, quo casu fit $dy = \frac{xdx\sqrt{(ab - aa)}}{\sqrt{ab(aa - xx)}}$, et integrando $y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)}(aa - xx)$, quae est aequatio pro ellipsi, existente $CA = a$ et $CB = a\sqrt{\frac{b-a}{b}}$; hincque $b = \frac{a^3}{aa - CB^2}$. Ita vicissim ellipsis proprietas ante memorata hinc colligitur. Scilicet sumta tangente $TMV = CA$, unde punctum N definitur, erit

$$BM - AN = \frac{CQ.Cq(CA^2 - CB^2)}{CA^3},$$

cujus expressionis valor reducitur ad portionem tangentis inter punctum M et perpendiculum ex C in eam dimissum interceptam.

Euler.

(Billet de Formey annexé à cette lettre).

La critique qui concerne le P. Bouhours ne paroît point fondée, et son expression est grammaticale, aussi bien que convenable à ce qu'il veut exprimer. *Je devois* n'aurait pas exprimé une simple convenance, mais une obligation étroite. Or ce n'est que par raison de convenance que le P. Bouhours auroit dû ne pas trop s'enfoncer dans la lecture des auteurs profanes. Et sa façon de parler suppose qu'il les lisoit bien encore, mais moins qu'auparavant. Dans le cas où il y auroit tout à fait renoncé, l'expression propre seroit: „ce que je n'aurois pas dû lire.“ Berlin ce 30 mai 1752.

Formey.

LETTRE CXLVI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse aux deux lettres précédentes. Formules de Maupertuis pour les lois du mouvement.

Sans date (juillet 1752?)

Ew. beyde mir sehr angenehme Schreiben vom 30. Mai und 3. Juni habe ich allhie d. 10. und 14. ejusd. wohl erhalten. Was die von Ew. angeführte series betrifft, deren progressiones ich durch gewisse formulas determiniret hatte, sehe ich mit Vergnügen, dass Sie selbigen auch die terminos generales bestimmt haben. Ich erinnere mich hiebey, dass ich schon ehemals mündlich gegen Ew. erwähnet, dass alle quantitates finitae, tam rationales quam quovis modo irrationales, durch die einige seriem $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. exprimiret werden könnten, und die ganze Kunst nur darauf ankommen würde, wie die Abwechselungen der signorum $+$ et $-$ zu determiniren sind. Solchergestalt ist z. Ex.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\text{etc.}=$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\text{etc.};$$

die signa $+$ und $-$ werden allhie so abgewechselt, dass in terminis, qui locis imparibus exstant, die signa alterniren, nehmlich

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{18}-\text{etc.}$$

in terminis vero, qui locis paribus exstant, eadem signa occurrunt, quibus dupla eorum affecta sunt; also hat der terminus $\frac{1}{8}$ das signum $+$, weil $\frac{1}{4}$ das signum $+$ hat; $\frac{1}{12}$ hat das signum $-$, weil $\frac{1}{6}$ das signum $-$ hat etc.

Was übrigens Ew. von den zwey seriebus, allwo

$$XX+bYY=(aa+b)^n,$$

imgleichen von

$$\square+\square+\square=f\square+g\square+h\square$$

melden, zeiget alles von der grossen Fertigkeit, welche Sie, für unzähligen Andern, erlanget haben, dergleichen calculos einzusehen und unendlich generaler zu machen.

Ich habe vorher nicht gewusst, auch vielleicht niemals daran gedacht, ob es möglich sey, den quadrantem ellipsis in aliquot partes aequales zu theilen. Aus demjenigen aber, was Ew. in Dero Schreiben anführen, lässt sich leicht schliessen 1. dass es zwar möglich, diesen quadrantem in zwey gleiche Theile zu theilen, wenn $PM=0$ genommen wird, aber 2. schlechterdings unmöglich sey, den quadrantem in mehrere partes aliquotas zu theilen, ohne zugleich eine partem assignabilem hujus quadrantis zu rectificiren. Denn es sey nach Ew. Figur (Fig. 41) $AN=BE$ eine pars aliquota quaecunque totius quadrantis, so wird der arcus

$$EM=BM-BE=\text{rectae } PM.$$

Von den integralibus aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ möchte ich wissen, ob Ew. nur allein die casus $n=2$, $n=3$, $n=4$ entdecket, oder ob Sie deren noch mehr in potestate haben? Sonst ist mir zwar die integralis von $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ bekannt, ich mag aber dieselbe nicht hersetzen, weil ich besorge, sie möchte Ew. gar zu einfältig vorkommen. Hingegen gestehe ich gern, dass ich auch selbige jetzo nicht hätte finden können, wenn ich sie nicht schon längst in einem Buche annotirt hätte.

Zu dem abermal erhaltenen Preise aus Paris gratulire ich von Herzen. Die erste Nachricht davon bekam ich aus der französischen Zeitung, allein das eigentliche quantum des praemii war mir entfallen. Dafern Ew. ein Exemplar von der pièce an Hn. Prof. Grischow schicken möchten, werde mir selbiges auf einige Tage ausbitten.

Was endlich die über eine gewisse expression des P. Bouhours entstandene difficulté betrifft, habe ich grosse Ursach Ew. zu danken, dass Sie darüber die éclaircissemens von vier so berühmten Männern mir communiciren wollen, bedaure aber auch zugleich, dass Ihnen dadurch mehrere Mühe, als ich gedacht hatte, verursachet worden. Indessen halte ich gänzlich dafür, dass wenn die difficulté von denen Quarante selbst hätte decidiret werden sollen, die sentimens nicht weniger partagiret gewesen seyn würden, so dass man bey dieser Gelegenheit eben das sagen könnte, was der P. Bouhours in der Suite des remarques nouvelles gesaget hat: „J'ai consulté sur cette question de fort habiles gens, et j'ai été surpris de voir que leurs sentimens ne s'accordent point," worin er aber wiederum, nach der Meynung desselben Critici, einen Fehler begangen, indem er hätte sagen sollen: „ne s'accordoient point". Und auf diese Weise sollte es fast das Ansehen gewinnen, dass die Quarante, welche in ihrer Observation über die Remarque 201 de Vaugelas gesagt haben: „On a décidé d'une voix qu'il faut dire"... vielmehr hätten sagen sollen: „qu'il falloit dire etc."

Von M. Achard, welchen unter den vier Gelehrten, deren Ew. Erwähnung gethan haben, nur allein persönlich kenne, bin ich ein alter admirateur. Ich habe denselben schon vor 27 Jahren mit ungemeinem Vergnügen gehöret, und erinnere mich noch eigentlich zweyer Predigten, deren eine von der médisance, die andere von der dritten Bitte im Vater-unser handelte.

Wenn Ew. mir die zwey oder drey kurze formulas, wodurch die leges motus von dem Herrn de Maupertuis exprimiret werden, und wie selbige von den formulis Leibnitianis unterschieden sind, communiciren oder auch nur melden wollten, ob sie den erstern gänzlich beypflichten, würden Sie mich obligiren; ich weiss wohl, dass diese formulae in einem gewissen tomo der Miscellaneorum befindlich sind, woselbst ich sie auch im Durchblättern gesehen; ich erinnere mich aber nicht mehr, von wem ich damals denselben tomum bekommen hatte.

Goldbach.

LETTRE CXLVII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 5. August 1752.

Ich erinnere mich noch ganz wohl von Ew. gehört zu haben, dass alle mögliche Zahlen durch die seriem

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \text{etc.}$$

ausgedrückt werden können, wofern nur statt der Puncte die gehörigen Zeichen $+$ oder $-$ gesetzt werden. Ew. hatten mir auch einige solche series eröffnet, und wo ich nicht irre, so befand sich darunter auch die letzt überschriebene

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

Da nun jene series $= \frac{\pi}{4}$, wenn π die peripheriam circuli,

dessen diameter $= 1$, andeutet, so ist

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

welche seriem ich auch in meiner Introductione in Analysin pag. 244 angebracht. Daselbst befinden sich noch viel andere series von dieser Art, als

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \text{etc.}$$

ubi binarius habet signum $-$, numeri primi formae $4n - 1$ signum $-$, et numeri primi formae $4n + 1$ signum $+$; numeris autem compositis id signum convenit, quod iis ratione multiplicationis ex primis competit, also $\frac{1}{60}$ ob $2 . 2 . 3 . 5$ hat das Zeichen $- . - . - . + = -$. Ferner ist

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, numeri primi formae $4n - 1$ signum $+$, et numeri primi formae $4n + 1$ signum $-$. Ferner ist

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}$$
$$+ \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, numeri primi $4n - 1$ signum $+$, numeri primi $4n + 1$, excepto quinario, signum $-$. Alle dergleichen series folgen aus diesen beiden Formuln, wo die factores nach den numeris primis fortgehen:

$$\text{I. } \frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13}) \text{ etc.}}$$

$$\text{II. } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ etc.}}$$

als aus welchen unendlich viel andere hergeleitet werden können.

Als multiplicetur prima per $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$, erit

$$\pi=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$

et resolutione in seriem facta

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\text{ etc.}$$

ubi 2 habet signum $+$, numeri primi formae $4n-1$, excepto ternario, signum $-$, numeri primi $4n+1$ signum $+$. Hernach, da $0=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\text{ etc.}}$, können auch unendlich viel series $=0$ gemacht werden, als $0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$ etc. ubi omnes numeri primi habent signum $-$.

Noch mehr, als in meinem Briefe befindlich, können auch noch aus den daselbst gegebenen Formuln gefunden werden, als da $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$, ubi numeri primi $6n-1$ habent $+$, numeri primi $6n+1$ sign. $-$. Multiplicetur per $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$ erit

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ etc.}}$$

und also

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$$
$$+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\text{ etc.}$$

ubi 2 habet $-$; 3, $+$; $6n-1$, $-$; et $6n+1$, $+$.

Vermittelst dieser Methode aber kann ich keine andere series von dieser Art herausbringen, als deren summae entweder $=0$, oder a quadratura circuli pendent.

Von den integralibus aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ kann ich keine andere angeben, als die Fälle $n=2$, $n=3$, $n=4$ und $n=6$. Wenn ich diesen letzten Fall Ew. zu berichten vergessen habe, so ist von dieser aequatione differentiali $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^6)}}$ die aequatio integralis

$$x^4+y^4-4cx^4y^4+4ccxxyy(xx+yy)-2xxyy+$$
$$2c(xx+yy)+cc=0,$$

wo c die constantem andeutet, so durch die Integration dazugekommen, und nach Belieben angenommen werden kann, so dass dieses integrale completum ist.

Die Integration dieser Aequation $\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ fällt auch nicht sogleich in die Augen, wie Ew. scheinen zu sagen; allein, da ein jedes Glied für sich integrabel ist per logarithmos, so kann davon eine aequatio integralis algebraica gegeben werden, welcher Umstand sich bey obigen Formuln nicht befindet, da weder $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$, noch $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, noch $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$ ullo modo sive per circulum, sive logarithmos integrirt werden kann; dahero um so viel merkwürdiger ist, dass doch für jene aequationes differentiales, aequationes integrales algebraicae angegeben werden können. Für Ew. Formuln aber, wenn ich setze $\sqrt{(1-x^n)}=v$, so wird $x^n=1-vv$ und $\frac{ndx}{x}=\frac{-2vdv}{1-vv}$, also $\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}}=-\frac{2}{n}\cdot\frac{dv}{1-vv}$, und integrando

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}}=-\frac{1}{n}\,l\,\frac{1+v}{1-v}=-\frac{1}{n}\,l\,\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Ebenfalls ist

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(1-y^p)}}=\frac{-1}{p}\,l\cdot\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}+\text{Const.}$$

folglich

$$\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}} = C\left(\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}\right)^{\frac{mn}{p}},$$

welches die integratio completa ist von dieser aequatione differentiali $\frac{x^{-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}\,dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$.

Es ist noch sehr zweifelhaft, ob ich von meiner pièce über den Saturnum aus Paris exemplaria bekommen werde; denn bisher habe ich keine erhalten, und es ist so schwer dergleichen Sachen von Paris zu bekommen, dass auch ein Buch, so M. Bouguer mir zum Präsent geschickt, unter Wegs verloren gegangen. Sollte ich aber bekommen können, so werde nicht ermangeln damit Ew. aufzuwarten.

Als ich letztens bey M. de Maupertuis speisete, so habe ich die von Ew. angeführten Passagen auf die Bahn gebracht. Die Meinung fiel dahin aus, dass grammaticaliter sowohl das Praesens als Imperfectum recht sey, allein der Sinn sey unterschieden. Also sey es recht: „On a décidé d'une voix qu'il faut dire ...“ weil man nicht nur so hätte sagen sollen, sondern auch immer so sagen soll. Stünde aber „qu'il falloit dire“, so würde solches nicht mehr anzeigen, als dass man bey dem vorgelegten Fall allein so hätte reden sollen, und würde also nicht als ein beständiges Gesetz angesehen werden können.

Was Ew. wegen der von M. de Maupertuis gegebenen Formuln über die leges motus zu fragen belieben, wird ohne Zweifel diejenigen antreffen, wodurch er die regulas communicationis motus in conflictu corporum tam elasticorum quam non elasticorum bestimmt; weil dieselben mit den schon längst bekannten vollkommen einerley sind, so kommen sie auch mit den Leibnizianis überein. Was aber das principium selbst anlanget, woraus der H. v. Maupertuis diese regulas hergeleitet, solches ist allerdings vollkommen

neu. Denn ungeachtet man schon vorlängst behauptet, dass die Natur via facillima würke, so hat doch weder Leibniz noch Jemand anders gezeigt, welches eigentlich diejenige Quantität sey, welche in den operationibus naturae ein minimum ist. M. de Maupertuis nennet diese Quantität die quantitatem actionis, und bestimmt dieselbe durch das Product aus der massa, der Geschwindigkeit und dem spatio, und leitet daraus nicht nur die regulas motus, sondern andere Sachen gar schön her. Ich hatte auch schon längst gewiesen, dass in motibus corporum coelestium immer die Formul $\int Mv\,ds$ ein minimum sey, wo M die massam, v die celeritatem und ds das spatiolum percursum andeutet. Also ist $Mv\,ds$ die quantitas actionis elementaris und $\int Mv\,ds$ die totalis, welche folglich nach M. de Maupertuis ein minimum seyn muss.

Euler.

LETTRE CXLVIII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets. Winsheim et le P. Mersenne sur les nombres parfaits.

St. Petersburg d. 7. October 1752.

Meine Demonstration, dass $\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+$ etc. $=$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{etc.}$$

ist ein casus particularis von dieser propositione generali

$$A\ldots\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{d}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{e}+\text{etc.}=$$

$$B\ldots\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+\frac{2}{e}-\text{etc.}$$

sunt enim seriei A termini impares $=\frac{B}{2}$, et ejusdem seriei A termini pares et termini impares simul sumti nempe $\frac{B+A}{2}=A$, ergo $A=B$. Es sind zwar allhie in der serie

B die signa $+$ et $-$ alternantia angenommen worden, es können aber auch, wenn nur die summa ipsius B finita ist, alle termini affirmativi oder quacunque lege variantes angenommen werden; wenn man also die Condition, dass in der serie A die termini continuo decresciren sollen (non attenta variatione signorum $+$ et $-$) bey Seite setzet, so kann eine jede series B in A verwandelt werden; hingegen sehe ich nicht, wie eine einzige von denen, welche Ew. gefunden haben, hieraus deduciret werden könne; dass aber alle solche series entweder $=0$ sind, oder von der quadratura circuli dependiren, halte ich vor eine merkwürdige Observation.

Was Ew. von den casibus integrabilibus aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$$

melden, wird ohne Zweifel nur von denen zu verstehen seyn, wo n ein numerus integer ist, denn dass jede aequatio

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{\frac{1}{m+1}})}}=\frac{a\,dy}{\sqrt{(1-y^{\frac{1}{m+1}})}},$$

posito m numero integro affirmativo, integrabilis sey, scheinet mir ganz gewiss zu seyn. In denen von Ew. angegebenen casibus aber, wo $n=2$, vel 3, vel 4, vel 6, finde ich, dass zwar die valores von y etwas verworren aussehen, wenn man die constantem generatim durch c exprimiret, weil sich alsdann allezeit quantitates irrationales mit einmischen; setzet man aber $c=-1$, so wird

pro casu $n=2$, $yy=1-xx$; pro casu $n=3$, $yy=\frac{(xx+x-2)^2}{(1-x)^4}$

$n=4$, $yy=\frac{1-xx}{1+xx}$; $\qquad n=6$, $yy=\frac{-2x^4+xx+1}{(1+2xx)^2}$

woraus man siehet, dass alle diese casus in der formula

$$\frac{ax^4+bx^3+cxx+ex+f}{1+px+qxx+rx^3+sx^4}$$

begriffen sind; so dass, wenn Jemand noch mehrere casus suchen wollte, derselbe sehr wohl thun würde, wenn er gleich anfangs die constantem $c=-1$ setzete.

Hiebey liegt ein Zettel von Dero eignen Hand, worauf Sie schon vor vielen Jahren aus der aequatione $xx+yy-1=0$, diese $xx-1=2cy+cc$ deduciret; ich zweifle aber, ob $xdx+ydy=dy\sqrt{(xx+yy-1)}$ gesetzt werden könne, wenn gleich beydes ex hypothesi $=0$ ist; denn sonst würde auch folgen, dass positis X et Y pro functionibus quibuscunque ipsarum x et y, $xdx+ydy=XYdy\sqrt{(xx+yy-1)}$ seyn könnte.

Als ich vor wenigen Tagen einige tomos Commentariorum tam antiquorum quam novorum von der Akad. der Wiss. zum Präsent bekam, hat sich mir, sobald ich den tomum II der letztern eröffnet, des Hrn. Winsheim's Dissertatio de numeris perfectis praesentiret, woselbst er p. 77 die von Ew. angegebenen numeros perfectos, absonderlich aber den neunten, cum salutari clausula „donec contrarium fuerit probatum“ annimmt; ich zweifle aber, ob Ew. das schöne excerptum, so er aus dem Mersenno anführet, schon gelesen haben, welches meines Erachtens sehr lesenswürdig ist. Ob die cogitata Mersenni oder des Leuneschlos paradoxa eher bekannt gemacht worden, ist mir zwar unbekannt, ich sehe aber, dass sie beyde sich in Betrachtung der noch rückständigen 10 oder 11 numerorum perfectorum, einer gleich lautenden Expression bedienet. „Qui undecim alios invenerit — sagt Mersennus — noverit se analysim omnem, quae fuerit hactenus, superasse“, er hält aber doch die Erfindung derselben nicht unmöglich; und Leuneschlos sagt paradoxo 46 et 47: „Vastissima et infinita numerorum multitudo capit duntaxat decem numeros perfectos; qui decem alios invenerit, noverit se analysin omnem, quae fuerit hactenus, superasse“, welcher Zusatz aber überflüssig ist, wenn, nach des autoris Vorgeben, nur 10 numeri perfecti in rerum natura sind.

Goldbach.

LETTRE CXLIX.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches sur les nombres premiers. Réponse à la précédente.

Berlin d. 28. October 1752.

Ew. Methode eine jede seriem $\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{d} +$ etc. in eine andere, als $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2b}$ etc. zu verwandeln, erinnere ich mich noch sehr wohl, und es können allerdings durch Hülfe derselben solche Verwandelungen gefunden werden, die sich aus der von mir gebrauchten Methode, als welche nur auf eine gewisse Art von Zahlen eingeschränkt ist, nicht herleiten. Hingegen gibt auch meine Methode solche series, welche mit jener keine Gemeinschaft haben. Da meine Methode nur eine gewisse Art von Variation in den signis in sich schliesst, so folgt daher, dass die

Summ aller daraus entspringenden serierum entweder 0 ist, oder a circuli quadratura dependirt. Wenn ich aber im Stande wäre andere variationes signorum anzubringen, so zweifle ich nicht, dass nicht quaelibet quantitas pro summa herausgebracht werden könnte.

Da die numeri primi in Ansehung ihrer gedoppelten Form von $4n+1$ und $4n-1$, so sehr von einander verschieden sind, und die Menge von beyden Gattungen infinita ist, so habe ich die summam folgender seriei proxime untersucht

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + 11 - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} - \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} \text{ etc.}$$

wo die numeri primi formae $4n-1$ das signum $+$, die formae $4n+1$ aber das signum $-$ haben, in der Hoffnung, ob etwa die summa nicht rational seyn möchte. Ich fand aber diese summam $= 0{,}334980$ und also etwas grösser als $\frac{1}{3}$. Wäre accurat $\frac{1}{3}$ herausgekommen, so hätte die Sach allerdings Nachdenken verdient.

Da die Anzahl aller numerorum primorum unendlich ist, aber doch ein infinitum infimi ordinis, weil ich gezeigt, dass wenn die Zahl omnium numerorum $= n$, die Anzahl der numerorum primorum seyn werde $= ln$, es ist aber ln kleiner als $n^{\frac{1}{m}}$, so gross auch immer die Zahl m seyn mag: so wäre die Frage, ob auch die Anzahl der numerorum primorum, so z. Ex. in dieser Formul $aa+1$ enthalten sind, auch unendlich sey, weil dieselbe gewiss unendlich mal kleiner ist, als die Anzahl aller numerorum primorum. Hernach, wenn auch diese unendlich wäre, könnte man eben dieses fragen de numeris primis hujus formae a^4+1 oder a^8+1 etc. Ich habe die numeros primos in hac forma $aa+1$ contentos untersucht und gefunden, dass $aa+1$ ein numerus primus wird in Folgenden Fällen: $a=$

1. 2. 4. 6. 10. 14. 16. 20. 24. 26. 36. 40. 54. 56. 66. 74. 84. 90. 94.
110. 116. 120. 124. 126. 130. 134. 146. 150. 156. 160. 170. 176. 180. 184.
204. 206. 210. 224. 230. 236. 240. 250. 256. 260. 264. 270. 280. 284. 300.
306. 314. 326. 340. 350. 384. 386. 396. 400.
406. 420. 430. 436. 440. 444. 464. 466. 470. 474. 490. 496.
536. 544. 556. 570. 576. 584. 594.
634. 636. 644. 646. 654. 674. 680. 686. 690. 696. 700.
704. 714. 716. 740. 750. 760. 764. 780. 784.
816. 826. 844. 860. 864. 890.
906. 910. 920. 930. 936. 946. 950. 960. 966. 986.
1004. 1010. 1036. 1054. 1060. 1066. 1070. 1094. 1096.
1106. 1124. 1140. 1144. 1146. 1150. 1156. 1174. 1176. 1184.
1210. 1234. 1244. 1246. 1274. 1276. 1290. 1294.
1306. 1314. 1316. 1320. 1324. 1340. 1350. 1354. 1366. 1374. 1376. 1394.
1406. 1410. 1416. 1420. 1430. 1434. 1440. 1456. 1460. 1494.

Bis 1500 habe ich dieses Examen getrieben, und hierdurch bin ich im Stande viel numeros primos anzuzeigen, welche nicht nur grösser sind als 100000, als so weit die tabulae numerorum primorum gehen, sondern auch als 1000000. Sonsten würde es gewiss sehr schwer seyn einen numerum primum > 1000000 anzugeben.

Soll aber a^4+1 ein numerus primus seyn, so werden die valores von a seyn folgende wenige

$$a = 1.\ 2.\ 4.\ 6.\ 16.\ 20.\ 24.\ 34.$$

Doch bin ich noch weit entfernt des Fermatii problema zu solviren: invenire numerum primum, dato quovis numero majorem. Sollte man eine seriem regularem finden können, deren alle termini in jenen valoribus von a enthalten wären, so wäre das problema solvirt. Jedoch gibt es gewiss keine series algebraica, deren omnes termini numeri primi seyn können. Denn es sey X der terminus indici x respondens, und daher A der terminus indici dato a respondens, so wird, wenn man nimmt $x = nA + a$, der terminus X divisibilis per A und also nicht primus.

Meine integratio aequationis $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by^n)}}$ setzet nicht nur zum voraus, dass n ein numerus integer ist, sondern ich kann auch nur die integralia angeben in diesen Fällen: $n=2$, $n=3$, $n=4$ und $n=6$. Wenn $n=5$, so habe ich bisher das integrale nicht finden können. Wenn aber $n=\frac{1}{m+1}$, so wären die formulae allerdings absolute integrabiles, dahero dieselben nichts sonderbares geben würden. Denn dieses kam mir fürnehmlich merkwürdig vor, dass, da die Formuln in den Fällen $n=3$, oder $n=4$, oder $n=6$ auf keinerley Art weder ad circuli noch hyperbolae quadraturam gebracht werden können, doch die Aequation selbst algebraice und das generaliter integrirt werden kann.

Beygelegten Zettel erinnere ich mich noch bey Ew. geschrieben zu haben, um zu zeigen, dass man nicht allezeit per integrationem alle casus findet, quibus aequationi differentiali satisfit, wovon ich in meiner Mechanic einige wichtige casus angemerket hatte. Ich kann den Fall noch simpler machen und diese aequationem differentialem $adx = (a-x)dy$ vorlegen, welcher augenscheinlich ein Genügen geschiehet, wenn $x = a$, welcher Fall doch durch die Integration nicht herausgebracht wird. Also wenn ich habe $\frac{Pdz}{Z} = dy$, oder $Pdz = Zdy$, existente Z functione ipsius z, et P quantitate ex y et z utcunque composita, so satisfacirt $Z = 0$, denn daher wird $z =$ certae constanti und also $dz = 0$. Setzt man nun für z eine formulam magis compositam, als $xx + yy - aa$, so bekommt man aus $Z = 0$ solche casus integrales, welche durch die Integration nimmer herausgebracht werden. Also wenn $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(xx + yy - aa)}} = Vdy$, existente V functione quacunque ipsarum x et y, so satisfacirt gewiss $xx + yy - aa = 0$.

Den tomum II Nov. Comment. habe ich noch nicht bekommen. Ob $2^{30}(2^{31} - 1)$ wirklich ein numerus perfectus sey, oder nicht, kann ich freylich nicht behaupten, weil ich nicht weiss ob $2^{31} - 1$ ein numerus primus ist, oder nicht. Dass es aber nicht unendlich viel numeros perfectos geben sollte, kann ich nicht einsehen. Weil aber um dieselben zu finden, erforderlich wird, dass man alle casus, quibus formula $2^n - 1$ fit numerus primus, anzeigen könne, so sehe ich nicht ab, wie man mehr als sieben, nehmlich: $2^1(2^2-1)$, $2^2(2^3-1)$, $2^4(2^5-1)$, $2^6(2^7-1)$, $2^{12}(2^{13}-1)$, $2^{16}(2^{17}-1)$, $2^{18}(2^{19}-1)$, und also nicht einmal acht, oder gar zehn angeben kann. So viel ist gewiss, dass wenn $2^n - 1$ ein numerus primus seyn soll, auch n ein numerus primus seyn muss. Allein es gibt viel numeros primos, die für n gesetzt, $2^n - 1$ nicht primum machen, als $n = 11$, $n = 23$, $n = 29$, $n = 37$, etc. Was also Mersennus oder Leunenschloss sagt, als wenn die Anzahl der numerorum perfectorum endlich wäre, halte ich für ungegründet, ungeacht ich nicht glaube, dass mehr als sieben, praeter unitatem mit Gewissheit angezeigt werden können. Des Leunenschloss Tractat erinnere ich mich bey Ew. gesehen zu haben; ich kann aber von diesem auctore in keinem Lexico die geringste Nachricht finden, dahero ich Ew. um einige Umstände seines Tractats und wo möglich seiner selbst gehorsamst ersuchet haben wollte.

Euler.

LETTRE CL.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 18. Novbr. 1752.

Durch was für compendia Ew. die differentiam serierum

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\text{etc. et }\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{etc.}$$

erhalten haben, ist mir zwar nicht bekannt. Sollten Sie aber die Methode schon herausgegeben haben, so bitte mir den Ort, wo selbige zu finden ist, anzuzeigen.

Dass der numerus numerorum primorum omnium hujus formae $aa+1$ infinite magnus sey, halte ich für gewiss, ohngeachtet ich es nicht alsofort demonstriren kann, und finde ich die rationem dubitandi, dass die Anzahl numerorum primorum hujus formae $aa+1$ unendliche Mal kleiner ist, als die Anzahl numerorum primorum omnium, gar nicht erheblich, indem kein numerus infinitus so klein genommen werden kann, dass er nicht infinities major alio infinito sey.

Mersennus hat um so viel weniger gesagt, dass nur zehn numeri perfecti möglich sind, weil er deren eilf selbst angiebt, darunter aber der octavus von Ew. nicht begriffen ist; er sagt auch nicht, dass die Anzahl der numerorum perfectorum endlich sey, wohl aber, dass kein so grosses intervallum numerorum anzugeben möglich sey, welches nicht *absque* numeris perfectis seyn könne, wie solches Ew. aus der von dem Hrn. Winsheim allegirten praefatione gener. ad Mersenni cogitata physico-mathematica § 19, wenn der tom. II Commentariorum noch nicht angekommen ist, allenfalls selbst werden ersehen können.

Was des Leuneschlos paradoxa mathematica betrifft, so sind selbige zu Heidelberg A. 1658, 8°. gedruckt, ich habe aber dieses Buch selbst niemals gehabt, sondern ich hatte das Exemplar, welches ich A. 1716 gelesen, von der altstädtischen Bibliothec in Königsberg genommen, welches derselben auch noch vor meiner letzten Abreise A. 1718 restituiret worden, dahero es unmöglich ist, dass Ew. selbiges Buch in Petersburg bey mir gesehen haben sollten; hingegen erinnere ich mich, jedoch nicht mit völliger Gewissheit, dass Sie mir vor einigen Jahren aus Berlin geschrieben, Sie hätten sich selbiges nebst des Bungi Buch aus der Königl. Bibliothec geben lassen*). Von diesem Leuneschlos ist mir weiter nichts bekannt, als dass ich irgendwo gelesen, er habe in Heidelberg als Professor gestanden; er wird auch von einigen, ni fallor, Luneschlos genennt, und wäre also dessen Name auf beyde Art in den Lexicis zu suchen. Es scheinet, dass er sein paradoxum de numeris perfectis in dem Mersenno gefunden und nachgehends, da er

*) V. les lettres 34ème et suiv. page 104 et suiv.

es memoriter hingeschrieben, von dem wahren Sinn des Mersenni abgegangen ist.

Dass keine formula algebraica lauter numeros primos geben könne, hatte ich schon in einem meiner vorigen Briefe angemerket; denn es sey z. Ex. die formula

$$x^3 + bxx + cx + e,$$

so ist offenbar, dass so oft x ein multiplus des termini absoluti e ist, so oft auch (und folglich infinitis modis) die formula einen numerum non primum geben wird, sollte aber $e = 1$ seyn, so setze ich nur $x + p$ anstatt x, alsdann wird die formula transmutiret in

$$\begin{aligned} x^3 + 3pxx &+ 3ppx + p^3 \\ + \ bxx &+ 2bpx + bpp \\ &+ \ cx + cp \\ &\qquad + 1 \end{aligned}$$

und so oft x ein multiplus numeri $p^3 + bpp + cp + 1$ ist, so oft gibt die formula einen numerum non primum. Da nun dieser casus, wo die potestas maxima ipsius $x = 3$ ist, auf alle andere *lusus naturae*, quaecunque fuerit potestas ipsius x, appliciret werden kann, so ist es unmöglich eine seriem algebraicam anzugeben, in welcher nicht infiniti termini aus numeris non primis bestehen sollten.

Noch habe ein kleines ganz neues theorema beyzufügen, welches so lange vor wahr halte, donec probetur contrarium: Omnis numerus impar est = duplo quadrati + numero primo, sive $2n - 1 = 2aa + p$, ubi a denotet numerum integrum vel 0, p numerum primum, ex. gr. $17 = 2.0^2 + 17$, $21 = 2.1^2 + 19$, $27 = 2.2^2 + 19$, etc.

Goldbach.

LETTRE CLI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches numériques et autres relatives à la résolution des équations algébriques.

Berlin d. 16. December 1752.

Ich bin weit davon entfernt, dass ich die wahre Summ dieser seriei

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} \text{ etc.}$$

sollte anzeigen können. Ich habe diese Summ nur per approximationem gesucht, von deren Beschaffenheit ich mich nicht mehr erinnern kann. Meine Absicht war dabey nur, zu erforschen, ob etwan diese Summ simpel seyn möchte, weil ich schon vorher gemerket hatte, dass dieselbe beynahe $\frac{1}{3}$ ist.

Ew. theorema, quod omnis numerus impar $2n - 1$ sit aggregatum ex quadrato duplicato $2aa$ et numero primo p, hat bey mir alle Aufmerksamkeit verdienet, und nach angestellter Probe habe ich dasselbe für alle numeros $2n-1$ unter 1000 würklich wahr befunden. Kraft desselben kann man also behaupten, quod dato numero $2n-1$, semper detur duplum quadratum $2aa$, ut $2n-1-2aa$ evadat numerus primus.

Um die Demonstration davon zu finden, fiel mir ein, ob man etwan nicht beweisen könnte, dass je grösser die Zahl $2n-1$, je mehr numeri primi aus der Form $2n-1-2aa$ erwachsen müssten. Denn, da das theorema wahr ist für die kleinen Zahlen, so würde man um so viel sicherer auf die grossen Zahlen schliessen können. Ich habe demnach pro quovis numero non primo $2n-1$ bemerket, wie viel numeri primi daraus entstehen, allein ich habe befunden, dass, wenn auch $2n-1$ eine sehr grosse Zahl, doch bisweilen nur ein einziger numerus primus entspringt.

Also wenn $2n-1=785$, so wird $785-2aa$ unico casu numerus primus, nehmlich quo $a=18$. Eben dieses geschiehet auch, wenn $2n-1=1703=13.131$, und der casus ist $1703-2.21^2=821$; wenn also 821 kein numerus primus wäre, so fände hier das theorema nicht Statt. Ich habe auch hier noch viel andere und grössere Zahlen untersucht, von welchen ich vorhersahe, dass die daher entstehenden numeri primi sparsam seyn müssen; doch habe ich aber keine Ausnahme finden können. Ich glaube also dieses theorema, ungeacht ich nicht darauf schwören wollte.

Es fiel mir dabey ein ziemlich ähnliches theorema ein, nehmlich: dass a numero impari non primo $2n-1$ allzeit eine potestas binarii abgezogen werden könne, dass der Rest ein numerus primus sey. Nach angestellter Probe hat sich dieses auch noch bis auf sehr grosse Zahlen wahr befunden;

als ich aber auf $959=7.137$ kam, so fand sich eine Ausnahme, indem $959-2^a$ nullo modo primus werden kann.

Ich bin letztens auf folgende theoremata negativa gefallen.

I. Si n non est numerus formae $\square+2\triangle$, tum $4n+1$ certe non est primus.

II. Si n non est numerus formae $\square+\triangle$, tum $8n+1$ certe non est primus.

III. Si n non est numerus formae $2\triangle+\triangle$, tum $8n+3$ certe non est primus.

Der Grund der zwey letztern beruhet darauf, dass wenn $8n+1$ oder $8n+3$ primus ist, so sey derselbe auch in hac forma $2\square+\square$ enthalten; als $3=2.1+1$, $11=2.1+9$, $17=2.4+9$, $19=2.9+1$. Dieses aber kann ich nicht beweisen, ungeacht ich es für eben so gewiss halte, als dass $4n+1=\square+\square$, siquidem $4n+1$ sit primus, welches ich bewiesen habe.

Ew. bin ich für die mir gütigst ertheilten Nachrichten über den Leunenschloss gehorsamst verbunden. Ich habe mich geirrt, wenn ich geglaubt, das Buch selbst bey Ew. gesehen zu haben; es werden nur einige excerpta gewesen seyn, so Dieselben mir zu communiciren die Güte gehabt. Hier habe ich dieses Buch nicht finden können. Des Bungi Buch erinnere ich mich auch nicht gelesen zu haben; ich werde es aber auf der hiesigen Bibliothec aufsuchen. Den II tomum Novor. Comment. habe ich noch nicht bekommen, um darin nachsehen zu können, was der seel. Winsheim von den numeris perfectis geschrieben. Ich glaube, dass man keine andere numeros perfectos für gewiss angeben könne, als folgende: I. $2^0(2-1)=1$; II. $2^1(2^2-1)=6$; III. $2^2(2^3-1)=28$; IV. $2^4(2^5-1)$; V. $2^6(2^7-1)$; VI. $2^{12}(2^{13}-1)$; VII. $2^{16}(2^{17}-1)$; VIII. $2^{18}(2^{19}-1)$.

weil man von den folgenden Formuln $2^p - 1$ (existente p primo) nicht gewiss seyn kann, ob dieselben primi sind, oder nicht. Der folgende wäre $2^{30}(2^{31}-1)$, wenn nur $2^{31}-1$ ein numerus primus wäre, welches aber weder behauptet noch untersuchet werden kann. So viel ist gewiss, dass diese Zahl $2^{31}-1$ keine andere divisores haben kann, als welche in dieser Formul $62n+1$ enthalten sind, woraus ich so viel gefunden, dass kein divisor unter 2000 Statt findet.

Aus Anlass der aequationum Moivreanarum habe ich noch viel ähnliche formulas gefunden, deren radix angegeben werden kann, ungeacht die Aequation keine divisores rationales hat.

Als von dieser Aequation $x^5 = 5\alpha xx + 5\beta x + \frac{\beta\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}$ ist radix $x = \sqrt[5]{\frac{\beta\beta}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}$. Also von dieser $x^5 = 10xx + 10x + 6$ ist radix $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Ferner von dieser aequatione 6^{ti} gradus

$$x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18xx - 12x + 2$$

ist $x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. Diese casus scheinen um so viel mehr merkwürdig zu seyn, weil diese Aequationen nicht in factores (rationales) zergliedert werden können.

Hernach habe ich auch wahrgenommen, wenn eine solche Formul vorgegeben wird

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4},$$

welche von den signis radicalibus befreyt werden soll, solches geschehen könne, ohne dass man nöthig hat über die fünfte Potestät des x herauf zu steigen. Dieses scheint deswegen paradox zu seyn, da vier signa radicalia und das

surde solida vorhanden, welche durch eine einige Elevation ad 5^{tam} dignitatem nicht gehoben werden können. Doch kommt nun diese aequatio rationalis 5^{ti} gradus heraus:

$$x^5 = 55(AD+BC)x^3 + \left.\begin{matrix} 5As(AC+BB) \\ +5Dss(CC+BD) \end{matrix}\right\} xx \; \left.\begin{matrix} +5A^3Bs \\ +5ss(AC^3+B^3D) \\ -5ss(A^2D^2+B^2C^2) \\ +5ABCDss \\ +5CD^3s^3 \end{matrix}\right\} x$$

$$\begin{matrix} +A^5s + B^5s^2 + C^5s^3 + D^5s^4 \\ -5ACss(A^2D+B^3) \\ +5ABss(ABD+AC^2) \\ -5BDs^3(C^3+AD^2) \\ +5CD^2s^3(B^2+AC) \end{matrix}$$

also ist auch hinwiederum die radix aus dieser Aequation $x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4}$. Und da die obige Aequation general ist, so glaube ich, dass in dieser Form alle radices aequationum 5^{ti} gradus enthalten sind, und in einem jeglich vorgelegten Fall kommt es nur auf die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D und s an, und zuletzt wird s nur per aequationem 4^{ti} ordinis bestimmt werden, wie ich vermuthe. Daraus schliesse ich ferner, dass proposita aequatione quacunque

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} - \varepsilon x^{n-5} \text{ etc.} = 0$$

die radix allzeit diese Form haben werde

$$x = \frac{1}{n}\alpha + A\sqrt[n]{s} + B\sqrt[n]{s^2} + C\sqrt[n]{s^3} + D\sqrt[n]{s^4} + \text{etc.}$$

und es ist so viel gewiss, dass wenn $n=2$, oder 3, oder 4, die Bestimmung des Buchstabens s von einer aequatione 1^{mi} oder 2^{di} oder 3^{tii} ordinis dependire, woraus zu schliessen, dass in genere s durch eine aequationem $(n-1)^{ti}$ ordinis bestimmt werde.

In meinen Papieren habe ich noch ein ander theorema, so Ew. mir vormals communicirt, gefunden. Nehmlich dass ein jeder numerus impariter par $4a+2$ allzeit gleich sey einer Summ von zwey numeris primis formae $4n+1$, als $6=1+5$, $10=5+5$, $14=1+13$, $18=1+17=5+13$, $22=5+17$, $26=13+13$, $30=1+29=13+17$, $34=5+29=17+17$, wobey ich bemerke, dass nicht nur bey kleinen Zahlen keine Ausnahme vorkommt, sondern bey grössern um so viel weniger eine zu vermuthen. Denn die Zahlen, bey welchen eine solche Zergliederung nur einmal angehet, sind 2, 6, 10, 14, 22, 26, 38, 50, 62, 86 und von hier bis 150 gibt es keine mehr, auch nicht bis 230, daher auch unter den folgenden um so viel weniger zu vermuthen, indem die Anzahl der Resolutionen immer zunimmt, als 210 lässt sich auf 9 Arten resolviren.

Euler.

LETTRE CLII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

Moscau d. 12. März 1753.

Dass sich das theorema: omnem numerum imparem resolvi posse in duplum quadrati et numerum primum, bis auf die Zahl 1000 wahr befunden, auch in grössern Zahlen sich annoch keine Ausnahme geäussert, ist mir sehr lieb; jedoch muss es bishero für eine blosse conjecture passiren und hat man Ursach zu zweifeln, ob die Demonstration davon, wenn sie ja possibilis wäre, jemals gefunden werden wird.

Weil Ew. melden, dass Sie, ob a numero impari *non primo* allezeit eine potestas binarii abgezogen werden könne, so dass ein numerus primus überbleibe? hatten versuchen wollen, so schliesse ich aus der Restriction *non primo*, dass Sie es von den numeris primis falsch befunden, und

*

möchte wohl wissen, bey welchem numero primo solches zu ersehen, denn ich habe schon vor einigen Jahren dergleichen Einfall von den numeris primis gehabt, selbigen aber nicht weiter, als bis 89 continuirt.

Dass alle numeri primi hujus formae $8n+1$ gleich seyn sollen $2\square+\square$, hatte ich vorher nicht beobachtet, bey näherer Betrachtung aber habe gefunden, si $4n+1$ est numerus primus, esse eum $= d\square+\square$, denotante d quemcunque divisorem numeri n, wodurch hoffentlich die pomoeria der theorematum de numeris primis in numeros quadratos resolvendis in etwas werden erweitert werden.

Dass Ew. sowohl des Bungi Tractat, als des Leuneschlos paradoxa sich schon A. 1741 in Berlin aus der bibliothèque geben lassen und gelesen haben, ist ganz gewiss, indem Sie mir solches selbst d. 9. Sept. ejus anni umständlich gemeldet.

Dero meditationes, um die radicem quintae potestatis zu finden, scheinen mir so gründlich und zulänglich, dass wenn selbige auf diese Weise nicht zu erhalten ist, ich sehr zweifle ob jemand in dieser découverte réussiren wird. Es kommt alles, wie Ew. bemerken, darauf an, ob sich die quantitas s per aequationem quartae potestatis determiniren lässet, zu welcher Untersuchung aber meines Erachtens eine ferrea patientia erfordert wird.

Ich erinnere mich zwar wohl, dass man noch keinen numerum parem angegeben, welcher nicht eine summa duorum primorum wäre, dass aber ein jeder numerus pariter impar ein aggregatum duorum primorum hujus formae $4n+1$ ist, war mir entfallen, und dass zwischen 86 und 230 keine casus unici vorkommen, halte ich allerdings für merkwürdig, da bis 86 sich deren schon zehn befinden. Hingegen kommen in dem theoremate $2n-1=2aa+p$ viele

casus unici vor, wovon einige numeri primi selbst nicht ausgeschlossen sind, also ist 17 unico modo $=2aa+p$, wenn $a=0$, imgleichen 127, wenn $a=0$, und es scheinet fast, als wenn der numerus p, so zu einem casu unico gehöret, in keinem andern casu unico wieder vorkommt, ex. gr. $57=2.5^2+7$ ist ein casus unicus, weil in der formula $2aa+p$ vor p keine andere Zahl als 7 angenommen werden kann. Ob es aber ausser diesem noch andere casus unicos gibt, wo $2n-1=2aa+7$, lasse ich dahin gestellt seyn und möchte auch wohl keine weitere Untersuchung verdienen.

Ich habe in meinen annotatis gefunden, dass ich schon vor etwa 30 Jahren observiret, wie

$$An^2-Bn^4+Cn^6-Dn^8+\text{etc.}=n^{\sqrt{2}}$$

seyn könne, allwo A, B, C, etc. per series numerorum rationalium, quarum singularum summa plus quam finita est, exprimiret werden. Ich bin aber ungewiss, ob ich solches nicht etwa schon zu anderer Zeit Ew. gemeldet, oder ob es nicht gar in den Commentariis gedruckt worden.

Ich habe zwar zum öftern das Vergnügen gehabt aus den französischen Zeitungen zu ersehen, dass Ew. den Preis von der Parisischen Acad. des sc. erhalten; da ich aber nicht eigentlich weiss, wie viel Mal solches geschehen, so möchte gern davon benachrichtigt seyn.

Goldbach.

LETTRE CLIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur les nombres. Prix remportés par Euler à l'académie de Paris. Trouver un nombre qui appartienne à différentes séries de nombre polygonaux.

Berlin d. 3. April 1753.

Bei dem Einfall, ob etwan ab omni numero impari eine potestas binarii abgezogen werden könne, so dass ein numerus primus überbleibe, habe ich die Condition „a numero impari *non primo*" beygefügt, weil ich gleich befunden, dass solches bey dem numero primo 127 nicht angehet. Da nun solches auch bey dem numero non primo 959 nicht eintrifft, so fällt das ganze vermuthete theorema weg.

Wenn Ew. bey näherer Betrachtung befunden, dass wenn $4n+1$ ein numerus primus und d ein divisor quicunque ipsius n, auch allzeit sey $4n+1=daa+bb$, so bin ich sehr begierig zu vernehmen, ob Ew. diesen Satz demonstriren können, indem dadurch die pomoeria der theore-

matum de numeris primis in quadratos resolvendis allerdings ungemein würden erweitert werden. Ich habe auch eben diesen Satz schon längst bemerkt und bin von der Wahrheit desselben so überzeugt, als wenn ich davon eine Demonstration hätte. Also gleich wie $4.1m+1$ allzeit ist $=aa+bb$, welches ich demonstriren kann, so ist eben so gewiss $4.2m+1=2aa+bb$, $4.3m+1=3aa+bb$, $4.5m+1=5aa+bb$, etc. wovon mir aber die Demonstration noch fehlet. Doch ist hiebey ein besonderer Umstand wohl zu bemerken, dass bisweilen diese Resolution nicht in integris geschehen kann. Als, wenn gleich $4dm+1$ ein numerus primus ist, so gibt es Fälle, wo diese Zahl $4dm+1$ unmöglich in integris in die Form $daa+bb$ verwandelt werden kann. Dem ungeacht aber bleibt das theorema nicht weniger wahr, weil die Resolution allzeit in fractis Statt findet, welches um so viel mehr merkwürdig ist, da keine Zahl in fractis auf diese Formen $aa+bb$, $2aa+bb$, $3aa+bb$ und einige andere gebracht werden kann, wenn dieselbe nicht in integris darin enthalten. Dergleichen Fälle sind:

I. $4.22+1=89$ primus; folglich sollte 89 in dieser Form $11aa+bb$ enthalten seyn, welches aber in integris nicht angehet; doch ist in fractis $89=11(\frac{5}{2})^2+(\frac{9}{2})^2$ oder auch $=11(\frac{4}{3})^2+(\frac{25}{3})^2$.

II. $4.28+1=113$ primus; folglich sollte 113 in dieser Form $14aa+bb$ enthalten seyn, so in integris nicht möglich ist. In fractis aber ist $113=14(\frac{2}{3})^2+(\frac{31}{3})^2$.

III. $4.34+1=137$ primus; und doch nicht in integris $137=17aa+bb$; in fractis aber ist $137=17(\frac{4}{3})^2+(\frac{31}{3})^2$.

IV. $4.57+1=229$ primus; und doch nicht in integris $229=19aa+bb$; in fractis aber ist $229=19(\frac{5}{2})^2+(\frac{21}{2})^2$.

Bisher waren die Nenner nur 2 oder 3; es gibt aber auch Fälle, wo auch solche Brüche nicht Statt finden, sondern noch grössere Nenner zu Hülfe genommen werden müssen. Als $4.3.61+1=733$ primus; und ist doch nicht $733=61\,aa+bb$ in integris. Doch ist in fractionibus minimis $733=61\,(\frac{6}{5})^2+(\frac{127}{5})^2$. Demnach muss dieses theorema also ausgedruckt werden:

> Si $4n+1$ sit numerus primus, et d divisor ipsius n, tum iste numerus $4n+1$ certo in hac forma $daa+bb$ continetur, si non in integris, saltem in fractis,

und dieser Umstand wird auch insbesondere bey der Demonstration müssen in Betracht gezogen werden.

Da die Fälle, wo $2n-1=2a^2+p$ unico modo so sparsam vorkommen, so würde es freylich eine mühselige Arbeit seyn zu untersuchen, ob noch in einem andern unico modo $p=7$ seyn könnte, ausser $57=2.5^2+7$. Zum wenigsten habe ich bis 2500 keinen solchen gefunden. Wenn dieses behauptet werden könnte, so folgte daraus dieses theorema:

> Si $2aa+p$ unico modo est aggregatum ex duplo quadrato et numero primo, tum $2bb+p$ certo plus uno modo erit ejusmodi aggregatum, dum non sit $b=a$.

Ich konnte mich gar wohl erinnern, dass Ew. mir schon längst die Resolution von $n^{\sqrt{2}}$ communicirt, und weiss auch, dass ich solches unter meinen Papieren finden muss, allein es fället mir sehr schwer etwas daraus hervorzufinden, und ich konnte fast nicht mehr auf den Grund dieser Resolution kommen, bis mir ungefähr die Materie von der Interpolation wieder einfiel. Da nun proposita serie

$$\overset{0}{a},\ \overset{1}{b},\ \overset{2}{c},\ \overset{3}{d},\ \overset{4}{e},\ \text{etc.}$$

der terminus indici x respondens ist

$$(1-1)^x a+(1-1)^{x-1}xb+(1-1)^{x-2}.\frac{x(x-1)}{1.2}c+$$
$$(1-1)^{x-3}.\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}d+\text{etc.}$$

so ist der terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens $=$

$$a\sqrt{(1-1)}+\frac{b}{2\sqrt{(1-1)}}-\frac{1.1.c}{2.4(1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3d}{2.4.6(1-1)^{\frac{5}{2}}}-\text{etc.}$$

Setzt man nun n^1, n^2, n^4, n^8, n^{16}, etc. für a, b, c, d, e, etc. so ist $n^{\sqrt{2}}$ der terminus indici $\frac{1}{2}$ respondens, folglich

$$n^{\sqrt{2}}=n(1-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1.n^2}{2(1-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1.1.n^4}{2.4(1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3n^8}{2.4.6(1-1)^{\frac{5}{2}}}-\text{etc.}$$

Setzt man nun, ob primum terminum

$$n(1-1)^{\frac{1}{2}}=0,\ n^{\sqrt{2}}=An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\text{etc.}$$

so wird

$$A=\frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{1}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$
$$B=\frac{1.1}{2.4}(1-1)^{-\frac{3}{2}}=$$
$$\frac{1.1}{2.4}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{3.5}{2.4}+\frac{3.5.7}{2.4.6}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$
$$C=\frac{1.1.3}{2.4.6}(1-1)^{-\frac{5}{2}}=$$
$$\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(1+\frac{5}{2}+\frac{5.7}{2.4}+\frac{5.7.9}{2.4.6}+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}+\text{etc.}\right)$$

etc.

welches ohne Zweifel Ew. series numerorum rationalium sind, quarum singularum summa plus quam finita est.

Von dieser serie

$$An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\text{etc.}=n^{\sqrt{2}}$$

verdienet angemerkt zu werden, dass

$$An^2(2-\sqrt{2})-Bn^4(4-\sqrt{2})+Cn^8(8-\sqrt{2})-Dn^{16}(16-\sqrt{2})$$
$$+En^{32}(32-\sqrt{2})-\text{etc.}=0,$$

was auch immer n für eine Zahl seyn mag.

Bey den obigen Betrachtungen ist mir auch folgendes problema beygefallen:

Invenire summam duorum quadratorum $xx+yy$, quae simul in hac forma $2aa+bb$ contineatur.

Solutio. Sumantur $x=pp-qq$ et $y=rr\pm 2pq$, eritque $xx+yy=(pp-qq)^2+(rr\pm 2pq)^2=(pp+qq)^2\pm 4pqrr+r^4=(pp+qq-rr)^2+2(p\pm q)^2rr$. Q. E. I.

Ew. haben die Güte sich zu erkundigen, wie viel Mal ich schon bey der Akademie zu Paris den Preis erhalten? Weil ich solches nicht aufgeschrieben und auch von meinen Pièces keine Copien behalten, so kann ich weder die Jahre noch den Theil des Preises, so ich jedesmal bekommen, genau melden. Ich habe aber bey folgenden Fragen den Preis davongetragen: I. Sur la nature du feu. II. Sur le cabestan. III. Sur le flux et reflux de la mer. IV. Sur la théorie de l'aimant. V. Sur l'observation de l'heure du jour sur mer. VI. Sur les inégalités de Saturne. VII. Sur la même question.

Ich fand letztens, — weiss aber nich mehr, wo? — dieses problema: Invenire numerum, qui sit vel duplici, vel triplici, vel quadruplici modo, numerus polygonalis. Wollte man das problema so nehmen: invenire numerum qui simul sit trigonalis et tetragonalis, oder qui simul sit trigonalis et pentagonalis, etc. so liesse sich dasselbe wohl solviren. Kämen aber drey Bedingungen, als invenire numerum qui simul sit trigonalis, tetragonalis et pentagonalis, so wäre das problema vielleicht unmöglich. Bestimmt man aber den numerum laterum nicht, so ist es möglich, so viel Mal die Zahl auch ein numerus polygonalis seyn soll, und die Solution ist artig. Es sey z die gesuchte Zahl, x die radix, und n die Anzahl der Seiten der Polygonalzahl, so wird

$$z=\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2},$$

hieraus wird

$$n=\frac{2z+2xx-4x}{xx-x}=2+\frac{2z-2x}{xx-x}=2-\frac{2z}{x}+\frac{2(z-1)}{x-1}.$$

Also muss sich $2z$ durch x, und $2z-2$ durch $x-1$ theilen lassen; d. i. quaeruntur duo numeri binario differentes, qui habeant divisores unitate differentes (major majorem, minor minorem), und wenn dieses auf vielerley Art geschehen kann, so ist z auf eben so vielerley Art ein numerus polygonalis. Zum Exempel:

Numeri binario differentes.	Divisores unitate differentes.			
450	3.	5.	9.	15.
448	2.	4.	8.	14.

(Die divisores $\left\{\begin{matrix}225\\224\end{matrix}\right\}$ lasse ich weg, weil daraus numeri digonales entständen).

Also sey $2z=450$ oder $z=225$, so ist folgendergestalt

I. $n=2-\frac{450}{3}+\frac{448}{2}=76$; II. $n=2-\frac{450}{5}+\frac{448}{4}=24$;

III. $n=2-\frac{450}{9}+\frac{448}{8}=8$; IV. $n=2-\frac{450}{15}+\frac{448}{14}=4$;

Dahero ist 225 I. tetragonalis, II. octogonalis, III. 24-gonalis et IV. 76-gonalis.

Dergleichen Zahlen nun zu suchen, ist gewiss ein problema, wo es insonderheit auf die Natur der Zahlen ankommt, und welches zu schönen Speculationen Anlass geben kann.

Euler.

LETTRE CLIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Développement ultérieur des recherches sur les propriétés des nombres.

Moscau d. 28. Juni 1753.

Eine rigorosam demonstrationem, dass $1+4ef=PP+4QQ$ habe ich zwar nicht gefunden, jedoch bin ich auf einige observationes affines gerathen, worinnen Ew. vielleicht finden werden *qu'il y a des vûes.* Ich verstehe also in Folgendem durch p allezeit den numerum primum $1+4ef$ und $e>f$, imgleichen setze ich $aa+bb=p$. In einem gegebenen casu particulari wollte ich mich dieser Methode bedienen:

Zuvörderst suche ich numerum Q hujus naturae, ut

$$1+4ef+4fQQ=\square,$$

welches per substitutiones successivas $Q=1$, $Q=2$, etc. leicht zu seyn scheinet, indem viele numeri, ad hunc scopum non idonei, gleichsam bey dem ersten Anblick removiret

werden können, ex. gr. es wäre der gegebene numerus primus 89 und $f=2$, so siehet man alsofort, dass vor Q kein numerus desinens in 1 angenommen werden kann, weil sich das gesuchte quadratum auf 7 endigen würde, quod est absurdum; sobald nun ein solcher numerus congruus pro Q gefunden ist, setze ich die radicem quadrati inventi oder

$$\sqrt{(1+4ef+4fQQ)}=4fv+1,$$

wo v entweder affirmativa oder negativa zu nehmen ist, ut solutioni satisfiat, und alsdann findet sich

$$1+4ef=\frac{(e-v)^2+eQQ}{vv}.$$

Solchergestalt wird in denen von Ew. angeführten Zahlen in casu numeri 89, $Q=2$; numeri 113, $Q=1$; num. 137, $Q=2$; num. 229, $Q=5$; num. 733, $Q=3$. Hieraus folgt auch die doppelte Aequation

$$p=\frac{PP+eQQ}{vv}=\frac{(4fv+(P+v):e)^2-4fQQ}{(P+v)^2:ee}.$$

Ich bemerke ferner 1. dass weil die numeri a, b, e, f cogniti sind, es schon genug ist, wenn nur $p=\frac{RR\pm 2abe}{hh}$ Statt finden kann, so dass R und h rationales seyen, es mag $2ab$ ein numerus quadratus seyn oder nicht, denn es wird $Q=\frac{-(a+b)\pm R}{e+hh}=\frac{P-(a+b)}{h}$ und $p=aa+bb=PP+eQQ$.

2. Habe ich beobachtet, dass wenn $1+4ef+4fQQ=\square$, der numerus Q entweder eines von beyden quadratis aa oder bb, oder doch einer von dererselben factoribus ist, als in 89, wo $a=8$, $b=5$, wird $Q=5$; in casu numeri $137=4^2+11^2$, wird $Q=2$, wiewohl ich von der allgemeinen Gewissheit dieser Observation noch nicht convinciret bin. Dagegen kann ich:

3. in summo rigore demonstriren, dass wenn α ein numerus hujus formae ist $\beta\beta + e\gamma\gamma$, alsdann auch

$$\alpha(e + xx)(e + yy)(e + zz) \text{ etc.} = PP + eQQ.$$

4. Dependiret die natura numerorum P et v in dieser aequatione $1 + 4ef = \frac{PP + eQQ}{vv}$ allerdings von dem numero e, denn es müssen PP et vv beyde so beschaffen seyn, dass sie, divisa per e, idem residuum hinterlassen, als z. Ex. in dem casu $89 = \frac{9^2 + 11.5^2}{2^2}$, allwo $e = 11$, $PP = 81$, $vv = 4$, folglich das residuum commune post divisionem per 11 est $= 4$. Hingegen müssen die residua quadratorum PP et QQ post divisionem per vv so beschaffen seyn, dass wenn das residuum respectu PP aequale α wird, das residuum respectu QQ aequale $\frac{uvv - \alpha}{e}$ werde, so dass u ein numerus integer sey; also wird in eodem exemplo

$$\alpha = 1, \quad \frac{uvv - \alpha}{e} = \frac{4u - 1}{11} = 1$$

(weil 25 per 4 divisum, 1 zum residuo lässet) et $u =$ numero integro 3.

5. Will ich Ew. für die mir communicirte Solution des problematis: invenire duo quadrata quorum summa sit $PP + 2QQ$, qualiscunque hostimenti loco die Solution des nachfolgenden problematis offeriren: invenire duo quadrata, quorum summa sit $PP + eQQ$, dato pro e numero quocunque. Sint n et e numeri quicunque, erunt

$$\left(\frac{4nn + e}{4n}\right)^2 + \frac{4ee}{(e-1)^2} = \left(\frac{4nn - e}{4n}\right)^2 + \frac{e(e+1)^2}{(e-1)^2}$$

vel

$$\left(\frac{4nn + e}{4n}\right)^2 + \frac{4eemm}{(e - mm)^2} = \left(\frac{4nn - e}{4n}\right)^2 + e\left(\frac{e + mm}{e - mm}\right)^2$$

positis pro e, m, n numeris quibusvis.

Meine Expression für $n^{\sqrt{2}}$ bestehet in Folgendem: Sit

$$a = 1,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1.3}{2.4},\ d = \frac{1.3.5}{2.4.6},\ \text{etc.},$$

dico

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{2}} = {} & (a + b + c + d + \text{etc})\,nn - (b + 2c + 3d + 4e + \text{etc.})\,n^4 \\ & + (c + 3d + 6e + 10f + \text{etc.})\,n^8 - (d + 4e + 10f + 20g + \text{etc.})\,n^{16} \\ & + (e + 5f + 15g + 35h + \text{etc.})\,n^{32} - \text{etc.} \end{aligned}$$

und differiret nicht von dieser

$$n^{\sqrt{2}} = nn - \frac{1}{2}(n^4 - nn) + \frac{1.3}{2.4}(n^8 - 2n^4 + nn) - \frac{1.3.5}{2.4.6}(n^{16} - 3n^8 + 3n^4 - nn) + \text{etc.}$$

welche den terminum respondentem exponenti $\frac{1}{2}$ in serie $n^{2^1} + n^{2^2} + n^{2^3} + n^{2^4} + \text{etc.}$ exprimiret.

Goldbach.