LETTRE CXXIV.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite sur la courbe catoptrique.

Moscau d. 27. März 1749.

Aus der von Ew. mir übersandten Figur sowohl, als aus dem casu der curvae tricuspidalis, triangulo aequilatero inscriptibilis, kann ich nicht anders urtheilen, als dass die arcus *ac*, *ab*, *cb* nicht nur aequales sondern auch similes, und die puncta *d*, *m*, *n* curvas illas in duas partes aequales bisecantia seyn sollen. Wenn nun dieses ist, so müssen auch die puncta *I* et *K* von dem medio axis *CD* (welches Ew. in der Figur mit keinem Buchstaben bezeichnet haben und indessen *r* heissen kann) aeque distantia seyn, woraus denn ferner folget, dass die curva generatrix auch hexagono regulari circumscriptibilis sey und mit dem circulo, cujus radius est *Cr* in den sex punctis *C*, *I*, *A*, *D*, *B*, *K* coin-

cidiren müsse, womit aber die übersandte und hiebey zurückkommende Figur (die mir wieder zuzuschicken bitte) nicht übereinstimmt, weil sonst alle diese puncta in dem punctirt gezogenen Circul stehen müssten. Wenn aber auch die arcus *ab*, *bc*, *ca* nur longitudine aequales und nicht similes wären, so müsste nichts desto weniger folgen, dass die puncta *A*, *B*, *C* ein triangulum aequilaterum, circulo, cujus radius est *Cr*, inscriptum, formiren und in den punctirt gezogenen Circul fallen, dessen Centrum *r* zugleich der Mittelpunct des trianguli aequilateri ist, wie denn auch ferner die distantiae punctorum *EA* und *EB* aequales seyn müssten, welche doch in der Figur um ein gar merkliches differiren. Dieses alles habe nur deswegen erinnern wollen, damit Ew. überzeuget würden, dass ich die mir übersandte Figur nicht nur obenhin angesehen, sondern mit einiger Attention (woran es mir oftmals zu fehlen pfleget) betrachtet habe.

Was ich von den quadratis $AA + BB + CC$ etc. in meinem vorigen gemeldet hatte, ist, wie ich aus Dero Solution ersehe, von keiner Erheblichkeit gewesen und einer Distraction zuzuschreiben.

Goldbach.

P. S. v. 1. April 1749. Nachdem ich ungefähr die curvam generatricem abermal betrachtet, so habe befunden, dass bey der, von Ew. mir übersandten Figur nichts Essentielles zu erinnern gewesen, welches bey Zeiten, um Deroselben keine vergebliche Mühe zu machen, melden wollen, wobey nur noch dieses anmerke, dass von der punctirt gezeichneten curva exteriore (welche man trigibberam nennen könnte) cujus omnes normales curvam secantes aequales sunt, die curva, normales omnes in duas partes aequales dividens, wie die innere Figur anzeiget, tricuspidalis ist.

Die aequatio $4n + 5 = 4\square + 4\boxdot + \boxdot$ (allwo $\boxdot$ ein quadratum impar, $\square$ ein quadratum par bedeutet) ist zwar allezeit möglich, man kann aber für $\boxdot$, so eines von den vier quadratis ist, nicht ein jedes pro lubitu annehmen, wie in der aequatione $4\boxdot + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8n + 7$ geschiehet, allwo vor eines von diesen vier quadratis ein jedes quadratum $< 8n + 7$ genommen werden kann.

LETTRE CXXV.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches arithmétiques.

Berlin d. 12. April 1749.

Nunmehr habe ich endlich einen bündigen Beweis gefunden, dass ein jeglicher numerus primus von dieser Form $4n + 1$ eine summa duor. quadr. ist. Es sey $\boxed{2}$ das Zeichen der Zahlen, welche summae duor. quadr. sind, so sind meine Sätze folgende:

I. Si $a = \boxed{2}$ et $b = \boxed{2}$, erit etiam $ab = \boxed{2}$, wovon der Beweis leicht.

II. Si $ab = \boxed{2}$ et $a = \boxed{2}$, erit etiam $b = \boxed{2}$. Hievon ist der Beweis schon schwerer und erfordert einige Sätze.

III. Summa duor. quadr. $aa + bb$, ubi a et b communem divisorem non habeant, nullos alios admittit divisores, nisi qui ipsi sint $\boxed{2}$.

IV. Proposito numero primo $4n+1$, per eum semper $a^{4n}-1$ erit divisibilis, nisi ipse numerus a sit per $4n+1$ divisibilis. Den Beweis hievon habe in den Commentariis Petropolitanis gegeben.

V. Da $a^{4n}-1=(a^{2n}+1)(a^{2n}-1)$, so ist also entweder $a^{2n}+1$ oder $a^{2n}-1$ per $4n+1$ theilbar. Könnte nun ein einiger Fall angezeigt werden, da nicht $a^{2n}-1$, sondern $a^{2n}+1$ durch $4n+1$ divisibel wäre, weil $a^{2n}+1=\boxed{2}$, so wäre per N. III bewiesen, dass $4n+1$ eine summa duor. quadr. seyn muss.

VI. *Theorema.* Omnis numerus primus formae $4n+1$ est summa duor. quadr.

Demonstr. Si $4n+1$ non esset $\boxed{2}$, quia $a^{4n}-1$, vel etiam $a^{4n}-b^{4n}$ per $4n+1$ est divisibilis (dummodo neque a neque b sit per $4n+1$ divisibile) nunquam $a^{2n}+b^{2n}$, sed semper $a^{2n}-b^{2n}$ per $4n+1$ esset divisibile. Forent ergo sequentes numeri omnes $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, $5^{2n}-4^{2n}$, etc. (quamdiu radices sunt minores quam $4n+1$) per $4n+1$ divisibiles. Hoc est hujus progressionis $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}, \ldots (4n)^{2n}$ differentiae forent per $4n+1$ divisibiles. Forent ergo quoque differentiae secundae et tertiae et quartae et tandem differentiae ordinis $2n$, quae sunt constantes, per $4n+1$ divisibiles.

At ex doctrina differentiarum notum est, differentias ordinis $2n$, quae sunt constantes, esse $=1.2\ 3.4\ldots.2n$, qui numerus, cum non sit divisibilis per numerum primum $4n+1$, sequitur non omnes differentias $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, etc. per $4n+1$ esse divisibiles; dabitur ergo quaedam differentia $a^{2n}-b^{2n}$, quae non erit per $4n+1$ divisibilis, quare cum $a^{4n}-b^{4n}=(a^{2n}+b^{2n})(a^{2n}-b^{2n})$ semper sit per $4n+1$ divisibilis (in serie enim superiori, cujus differentias sum contemplatus, termini tantum usque ad $(2n+1)^{2n}$ continuantur, ita ut sit a et $b<2n+1$, ideoque neque a neque b per se sit per $4n+1$ divisibilis, qui casus sunt excepti) necesse est ut hoc casu factor $a^{2n}+b^{2n}$ sit per $4n+1$ divisibilis, qui cum sit $\boxed{2}$, ejus quoque divisorem $4n+1$ summam duor. quadr. esse oportet. Q. E. D.

Dass eine jede Zahl eine summa quatuor vel pauciorum quadratorum sey, kann ich beynahe beweisen; es fehlt mir nehmlich nur noch an einer Proposition, welche dem ersten Ansehen nach keine Schwierigkeit zu haben scheint.

Dieses Zeichen $\boxed{4}$ bedeute eine jegliche Zahl, welche eine Summ von 4 oder weniger quadratis ist, so sind meine Sätze folgende:

I. Si $a=\boxed{4}$ et $b=\boxed{4}$ erit quoque $ab=\boxed{4}$. Hievon ist der Beweis bündig, denn es sey $a=pp+qq+rr+ss$ und $b=xx+yy+zz+vv$, so wird

$$ab=(px+qy+rz+sv)^2+(py-qx\pm rv\mp sz)^2+(pz\mp qv-rx\pm sy)^2+(pv\pm qz\mp ry-sx)^2=\boxed{4}.$$

II. Si $ab=\boxed{4}$ et $a=\boxed{4}$, erit etiam $b=\boxed{4}$. Dieses ist der Satz, worauf die ganze Sach beruhet, und den ich noch nicht beweisen kann.

III. *Coroll.* (Dieses Zeichen $\neq$ soll nach Ew. negationem aequalitatis bedeuten). Si ergo $ab=\boxed{4}$ et $a\neq\boxed{4}$, tum etiam $b\neq\boxed{4}$. Si enim esset $b=\boxed{4}$, per II. foret quoque $a=\boxed{4}$ contra hyp.

IV. Si omnes numeri primi essent formae $\boxed{4}$, tunc omnes omnino numeri in hac forma continerentur. Manifestum est ex N. I, unde demonstratio propositi ad numeros tantum primos revocatur.

V. Proposito numero primo quocunque p, semper datur numerus formae $aa+bb+cc+dd$ per p divisibilis, ita ut nullus numerorum a, b, c, d seorsim per p sit divisibilis. Ich kann nehmlich beweisen, dass es allzeit solche Zahlen $aa+bb+cc+dd$, und das unendlich viel gibt, obschon ich in genere keine davon anzuzeigen vermögend bin. Der Beweis davon ist insbesondere merkwürdig, aber etwas weitläufig und kann auf Belieben den Inhalt eines ganzen Briefes inskünftige abgeben.

VI. Si $aa+bb+cc+dd$ per p est divisibile, quantumvis numeri a, b, c, d sint magni, semper exhiberi potest similis forma $xx+yy+zz+vv$ per p divisibilis, ita ut singuli numeri x, y, z, v semisse ipsius p non sint majores.

Demonstr. Erit enim $a=\alpha p \pm x$, $b=\beta p \pm y$, $c=\gamma p \pm z$, $d=\delta p \pm v$ atque x, y, z, v erunt numeri non majores quam $\frac{1}{2}p$. Cum igitur sit $aa+bb+cc+dd=(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)pp \pm 2p(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta v)+xx+yy+zz+vv$ haecque forma per p divisibilis existat, ob duo priora membra jam sponte per p divisibilia, necesse est ut ultimum membrum $xx+yy+zz+vv$ quoque per p sit divisibile.

VII. Si p est numerus primus ideoque impar, erunt singuli numeri x, y, z, v minores quam $\frac{1}{2}p$, ideoque

$$xx+yy+zz+vv<4\cdot\frac{1}{4}p^2<p^2.$$

VIII. Si p est numerus primus, certe erit summa quatuor quadratorum vel pauciorum.

Demonstr. Per N. VI datur numerus $aa+bb+cc+dd$ per p divisibilis, ac per N. VII dabitur etiam numerus $xx+yy+zz+vv$ per p divisibilis, ita ut sit

$$xx+yy+zz+vv<pp$$

Quodsi jam darentur numeri $\neq\boxed{4}$, existeret horum nume-

rorum minimus, qui sit $=p$, ita ut sit p minimus eorum numerorum, qui in quatuor quadrata sunt irresolubiles, (hic semper de numeris integris est sermo). Sit igitur

$$xx+yy+zz+vv=\boxed{4}=pq,$$

et quia per hyp. $p\neq\boxed{4}$, foret quoque $q\neq\boxed{4}$, at $pq<pp$, ideoque $q<p$, ac propterea haberetur numerus q minor quam p, qui esset $\neq\boxed{4}$, contra hypoth. Nullus ergo datur numerus minimus in quatuor quadrata irresolubilis, ideoque nullus plane datur numerus $\neq\boxed{4}$, ac per consequens omnis numerus $p=\boxed{4}$.

Weil ich nicht zweifle, dass diese demonstrationes Ew. nicht gefallen sollten, so bitte dieselben Dero Aufmerksamkeit zu würdigen.

In meinen Umständen ist seit der Zeit nichts veränderliches vorgefallen, als dass ich dieser Tage in einer Lotterie 600 Rthlr. gewonnen, welches also eben so gut ist, als wenn ich dieses Jahr einen Pariser Preis gewonnen hätte.

Euler.

LETTRE CXXVI.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Courbe catoptrique. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. April 1749.

Hiebey habe die Ehre, meine Figur von den curvis catacausticis wiederum zurückzusenden, und weil dieselbe nicht accurat genug gerathen, indem freylich die Bögen AE und BE, wie Ew. angemerkt, gleich seyn sollten, so füge noch eine andere Figur hinzu (Fig. 37), welche ich mit mehrerem Fleisse aufgezeichnet. Indessen ist, wie in der vorigen, die curva tricuspidata abc aequilatera und die drey partes adb, bmc, cna unter sich aequales et similes. Diese curva hat also ein centrum in O, welches das centrum circuli triangulo abc circumscripti ist. Dieses Punct O ist aber nicht das Mittelpunct der Linie CD, welches Ew. mit dem Buchstaben r

andeuten wollen, denn aus der Natur der Evolution ist CD der Faden, welcher vorher um den Bogen cna gelegen und bis in A ausgedehnt gewesen, folglich ist $cD =$ Arc. $cna + Aa =$ Arc. $cna + Cc$ (ob $Cc = Aa = Bb$) und also $cD + Cc = CD =$ Arc. $cna + 2Cc$. Wenn nun das Punct r in der Mitte der Linie CD genommen wird, so ist $Cr = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}$ Arc. $cna + Cc$, und dahero $cr = Cr - Cc = \frac{1}{2}$ Arc. $cna = cn$. Nun aber ist in der Figur cO grösser als der Bogen cn, und also $cO > cr$ (ich habe nehmlich die puncta d, m, n in der Mitte der Bögen ab, ac, bc angenommen). Hernach sind freylich die Linien OI und OK nicht nur einander gleich, sondern machen auch mit OC gleiche Winkel. Denn es ist $OI = OK = OD$; allein, weil das Punct O nicht in die Mitte der Linie CD fällt, so sind auch diese drey Linien OI, OK, OD nicht so gross als CO oder AO und BO. Dieses ist auch aus der Auswickelung offenbar, da der anfänglich gelegte Faden $bmcC$ in bOI nach der geraden Linie ausgedehnt wird. Also ist $bI = bmc + Cc$, und $OI = bmc + Cc - bO$. Nun aber ist $Cc = OC - cO$ und daher $OI = bmc + OC - cO - bO$, oder weil $bO = cO$, so ist $OI = OC - 2cO + bmc = OC - 2(cO - cm)$, und da $cO > cm$ so ist $OI < OC$. Wenn daher aus dem centro O mit dem radio $OC = OA = OB$ ein Circul beschrieben wird, so berührt derselbe die curvam descriptam in drey Puncten C, A, B, und diese curva hat also drey Bückel in A, B, C und drey Tiefen I, D, K, kann also trigibba genannt werden. In der vorigen Figur war der Circul aus dem centro r beschrieben, welchen hier gleichfalls bezeichne, woraus ganz klar zu sehen, wie dieser Circul die curvam trigibbam in zwey Puncten berührt und in zweyen durchschneidet; wie denn auch dieser Circul und die curva trigibba ejusdem perimetri, folglich die area curvae kleiner als die area des Circuls seyn muss.

Ich füge noch eine neue Figur hinzu, (Fig. 38) in welcher die curva tricuspidata abc nicht aequilatera, sondern scalena, aus welcher auch eine curva trigibba scalena ABC entstehet. Ungeacht es solche curvas continuas oder aequatione exprimibiles gibt, so kann man doch auch von freyer Hand ohne einige Regel solche curvas tricuspidatas aufreissen und aus denselben per evolutionem die curvas trigibbas beschreiben, aus welchen hernach weiter auf unendlich vielerley Arten die gesuchten curvae catoptricae construirt werden können. Wie ich denn in dieser Figur die curvam tricuspidatam abc aus drey Circulbögen ab, ac, bc, so einander berühren, formirt, und daraus die trigibbam also gezeichnet habe, nachdem ich die tangentes ad cuspides a, b, c und puncta laterum media l, m, n gezogen und aA pro arbitrio angenommen, so wird $mM = ma + aA$, $c\gamma = cm + mM$, $l\lambda = c\gamma - cl$, $bB = l\lambda - lb$, $nN = nb + bB$ etc. bis man herumkommt.

Ich bin neulich auf diese Betrachtung gefallen, ob es nicht möglich sey zwey Zahlen x und y zu finden, so dass $xy(x+y)$ einer gegebenen Zahl a gleich sey; oder proposito numero a, invenire duos numeros rationales x et y (sive integros, sive fractos) ut sit $xy(x+y) = a$. Solches ist immer möglich, so oft die Zahl a in dieser Form

$$pq(pm^3 \pm qn^3)$$

enthalten ist. Ich glaube aber, dass in dieser Form bey weitem nicht alle Zahlen enthalten sind, und also das problema öfters unmöglich ist, welches zu geschehen scheint, wenn $a = 1$, oder $a = 3$ etc.

Wenn aber dieses problema proponirt wird:

Proposito numero a, invenire tres numeros rationales x, y, z, ut sit $xyz(x+y+z) = a$, so ist das problema immer möglich und kann sogar in genere die Solution angegeben werden, welche ich endlich nach vieler angewandter Mühe herausgebracht. Nehmlich man setze (sumendo pro s et t numeros quoscunque pro lubitu)

$$x = \frac{6ast^3(at^4 - 2s^4)^2}{(4at^4 + s^4)(2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8)},$$

$$y = \frac{3s^5(4at^4 + s^4)^2}{2t(at^4 - 2s^4)(2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8)},$$

$$z = \frac{2(2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8)}{3s^3t(4at^4 + s^4)},$$

so wird

$$x + y + z = \frac{2aat^8 + 10as^4t^4 - s^8}{6s^3t(at^4 - 2s^4)}$$

und hieraus bekommt man $xyz(x+y+z) = a$.

Als es sey $a = 1$ und man nehme $t = 2$, $s = 1$, so wird

$$x = \frac{48.14^2}{65.671}, \quad y = \frac{3.65^2}{56.671}, \quad z = \frac{2.671}{6.65};$$

daher

$$x + y = \frac{1350723}{56.65.671} = \frac{3.671^2}{56.65.671} = \frac{3.671}{56.65}$$

und

$$x + y + z = \frac{671}{3.56},$$

folglich

$$xyz(x+y+z) = \frac{48.14^2}{65.671} \cdot \frac{3.65^2}{56.671} \cdot \frac{671}{3.65} \cdot \frac{671}{3.56} = 1.$$

LETTRE CXXVII.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la lettre précédente.

Moscau d. 16. Juni 1749.

Vor die Communication von Dero theorematibus in dem Briefe vom 12. April sage ich schuldigsten Dank, und dass an der mir übersandten Figur nichts auszusetzen gewesen, hatte ich schon in meinem vorigen Postscript, welches ohne Zweifel angekommen seyn wird, erkannt. Ich glaube es werde Ew. auch nicht viel Mühe kosten die curvam omnes verticales bisecantem zu beschreiben in casu, da die curva tricuspidalis, so zum Grunde gelegt wird, aus lauter arcubus circuli bestehet, und es scheinet, dass diese curva verticales bisecans seltsame proprietates haben wird.

Was die resolutionem cujusvis numeri in quatuor quadratos betrifft, so sehe ich gar wohl ein, dass alles, wie

Ew. angemerket, auf der Demonstration des andern Satzes beruhet: Si ab est $\boxed{4}$, et $a = \boxed{4}$, erit etiam $b = \boxed{4}$. Eine gleiche Bewandniss hat es mit der demonstratione hujus propositionis: Si summa quatuor quadratorum in numeris fractis sit = numero integro, erit idem numerus integer = quatuor quadratis integris. Allein die demonstrationem hujus propositionis: Si numerus aliquis est summa quatuor quadratorum imparium, idem numerus est summa quatuor quadratorum parium, oder datis quatuor quadratis imparibus $= 8m + 4$, dantur etiam quatuor quadrata numeri $2m + 1$, meine ich in potestate zu haben.

Wenn man aber ein Mittel finden könnte die summam quatuor quorumque quadratorum $AA + BB + CC + DD$ in die vier folgenden quadrata zu resolviren

$$aa + bb + \frac{(kk - bb)^2}{4} + dd,$$

wo doch auch quatuor quantitates indeterminatae sind, so hätte man zugleich erwiesen, dass eine jede Zahl $= \boxed{4}$, denn die letztern vier quadrata sind so beschaffen, dass ihre summa unitate aucta wieder eine summa quatuor quadratorum wird, oder diese quinque quadrata

$$4aa + 4bb + (ff + 2bf)^2 + 4dd + 4$$

sind allezeit = quatuor quadratis.

Ob Ew. das praemium bey der Frage von der Ursache der perturbationum in motibus planetarum erhalten haben, ist mir entweder nicht bekannt worden, oder ich habe es vergessen, und da ich schliesse, dass Sie auch um den Preis über die Frage von der Direction der courans etc. werden competiret haben, so wünsche ich, dass Dero pièce durch einen kleinen Zusatz von *vües*, künftiges Jahr victorieuse werden möge.

Goldbach.

P. S. Wenn das signum $\boxed{4}$ eine summam entweder von vier oder von weniger quadratis, und $\underset{|}{\boxed{4}}$ eine summam nicht von wenigern als 4 quadratis bedeutet, so kann gar leicht demonstriret werden omnem numerum hujus formae $8m+7$ esse $\underset{|}{\boxed{4}}$; wenn aber zugleich nachgegeben wird, dass alle numeri $\underset{|}{\boxed{4}}$ in dieser formula begriffen sind: $4^{e-1}(8m+7)$, ubi e sit numerus integer affirmativus quicunque, so kann demonstriret werden numerum quemcunque esse $\boxed{4}$.

LETTRE CXXVIII.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Nouveau travail sur la théorie de Saturne. Considérations ultérieures sur les nombres.

Berlin d. 26. Juli 1749.

Ueber die Pariser Frage von den courans habe ich nicht gearbeitet, und vernommen, dass nur eine einige Schrift darüber soll eingelaufen seyn. Ich zweifle auch sehr, ob ich künftiges Jahr etwas Tüchtiges darin hervorzubringen im Stande seyn werde. Auf die wiederholte Frage aber vom Saturno habe ich schon eine neue Abhandlung übersandt, worüber auch künftige Ostern das Urtheil gefället werden soll.

Ew. theorema, dass wenn $8m+4$ eine summa quatuor quadr. imparium ist, eben diese Zahl $8m+4$ auch eine summa quatuor quadr. parium seyn müsse, kann ich auf folgende Art demonstriren:

Es sey

$$8m+4=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2+(2d+1)^2,$$

so wird, (wenn man durch 2 dividirt, da $\frac{(2p+1)^2+(2q+1)^2}{2}=(p+q+1)^2+(p-q)^2$):

$$4m+2=(a+b+1)^2+(a-b)^2+(c+d+1)^2+(c-d)^2,$$

also $4m+2=4\square$. Da aber $4m+2$ ein numerus impariter par ist, so müssen von diesen vier quadratis zwey paria und zwey imparia seyn. Also wird seyn:

$$4m+2=(2p+1)^2+(2q+1)^2+4rr+4ss,$$

dahero

$$2m+1=(p+q+1)^2+(p-q)^2+(r+s)^2+(r-s)^2,$$

folglich

$$8m+4=4(p+q+1)^2+4(p-q)^2+4(r+s)^2+4(r-s)^2.$$

Q. E. D.

Hieraus folget, dass wenn $2A$ eine summa quatuor quadratorum ist, auch A eine summa quatuor quadratorum in integris sey, und generalius: Si $2^nA=4\square$, tum etiam A erit $=4\square$ in integris; oder: Si in fractis habetur $A=\frac{aa+bb+cc+dd}{2^n}$, tum etiam numerus A in integris in quatuor quadrata resolvi poterit.

Dieses ist nun schon ein Stück von dem allgemeinen theoremate: Si summa quatuor quadratorum fractorum aequatur numero integro A, tum etiam hic numerus erit in integris summa quatuor quadratorum; oder von diesem, worauf ich meine ganze vorige Demonstration gegründet: Wenn $mA=4\square$ und $m=4\square$, tum etiam erit $A=4\square$. Von diesem theoremate ist also schon dieser casus bewiesen: Si $2A=4\square$, tum etiam $A=4\square$, oder si $2^nA=4\square$, tum quoque $A=4\square$. Ich kann aber auch noch einige andere Fälle beweisen, als:

Theorema. Si $3A=4\square$, erit etiam $A=\boxed{4}$ (Ich habe im vorigen vergessen dieses Zeichen $\boxed{4}$ um summam quatuor quadratorum integrorum anzuzeigen).

Demonstratio. Quia omne quadratum est vel formae $3n$ vel $3n+1$, so sind entweder alle vier quadrata per 3 divisibilia, oder nur eins. Im ersten Falle wird

$$3A=9aa+9bb+9cc+9dd,$$

und also $A=3aa+3bb+3cc+3dd$, das ist

$$A=(a+b+c)^2+(a-b+d)^2+(a-c-d)^2+(b-c+d)^2.$$

Im andern Fall ist

$$3A=(3a+1)^2+(3b+1)^2+(3c+1)^2+9dd,$$

und folglich

$$A=1+2a+2b+2c+3aa+3bb+3cc+3dd.$$

Dieses aber ist

$$A=(1+a+b+c)^2+(a-b+d)^2+(a-c-d)^2+(b-c+d)^2;$$

also wiederum $A=\boxed{4}$.

Theor. Si $5A=\boxed{4}$, erit quoque $A=\boxed{4}$.

Demonstr. Erit enim

vel I. $5A=25aa+25bb+25cc+25dd$

vel II. $5A=(5a+1)^2+(5b+2)^2+25cc+25dd$

vel III. $5A=(5a+1)^2+(5b+2)^2+(5c+1)^2+(5d+2)^2$.

Casu I. est $A=5aa+5bb+5cc+5dd=$
$(2a+b)^2+(a-2b)^2+(2c+d)^2+(c-2d)^2=\boxed{4}$.

Casu II est $A=1+2a+4b+5aa+5bb+5cc+5dd=$
$(1+a+2b)^2+(2a-b)^2+(2c+d)^2+(c-2d)^2=\boxed{4}$.

Casu III est
$A=1+2a+4b+5aa+5bb+1+2c+4d+5cc+5dd=$
$(1+a+2b)^2+(2a-b)^2+(1+c+2d)^2+(2c-d)^2=\boxed{4}$.

Hier ist zu bemerken, dass a, b, c, d sowohl numeros affirmativos als negativos bedeuten. Dahero nicht nöthig habe um der Allgemeinheit willen $5a \pm 1$ für $5a + 1$ zu schreiben. Wenn man nun diese theoremata zusammennimmt, so folget daraus dieses:

Si $2^{\alpha}.3^{\beta}.5^{\gamma}A = \boxed{4}$, tum erit quoque $A = \boxed{4}$.

Man kann auch noch weiter gehen, als:

Theor. Si $7A = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Cum omnes quadrati sint vel formae $7m$, vel $7m+1$, vel $7m+2$, vel $7m+4$, erit

vel I. $7A = 49aa + 49bb + 49cc + 49dd$, ergo

$$A = 7(aa+bb+cc+dd) = \boxed{4}, \text{ nam } \boxed{4}.\boxed{4} = \boxed{4},$$

vel II. $7A = (1+7a)^2 + (1+7b)^2 + (1+7c)^2 + (2+7d)^2$,

vel III. $7A = (1+7a)^2 + (2+7b)^2 + (3+7c)^2 + 49dd$,

vel IV. $7A = (2+7a)^2 + (2+7b)^2 + (2+7c)^2 + (3+7d)^2$,

vel V. $7A = (1+7a)^2 + (3+7b)^2 + (3+7c)^2 + (3+7d)^2$.

Casu II erit

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 4d + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd =$$
$$(1+a+b+c+2d)^2 + (a-b-2c+d)^2 +$$
$$(a+2b-c-d)^2 + (2a-b+c-d)^2 = \boxed{4}.$$

Casu III. erit

$$A = 2 + 2a + 4b + 6c + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd =$$
$$(a-2b+c+d)^2 + (b+2c+d-a+1)^2 +$$
$$(a+b-c+2d)^2 + (2a+b+c-d+1)^2 = \boxed{4}.$$

etc.

Wenn der numerus A also in vier quadrata könnte resolvirt werden $A = aa + bb + \frac{1}{4}(kk-bb)^2 + dd$, so würde freylich, wie Ew. bemerket, $A + 1 = \boxed{4}$, denn

$$A + 1 = \left(\tfrac{1}{2}(kk-bb) - 1\right)^2 + kk + aa + dd.$$

Dass im postscripto gemeldte theorema ist sehr artig; denn wenn alle numeri $\boxed{4}$ (welche nicht aus weniger als vier quadratis bestehen) in dieser Form $4^{e-1}(8m+7)$ enthalten wären, so finde ich auch, dass daraus folgte omnem numerum esse $= \boxed{4}$. Mein Beweis davon ist dieser:

Si omnes numeri $\boxed{4}$ in hac forma $4^{e-1}(8m+7)$ continentur, tum omnes numeri in hac forma $4^{e-1}(8m+7)$ non contenti essent $= \boxed{4}$. Foret ergo $8m+1 = \boxed{4}$, item $8m+3 = \boxed{4}$, item $8m+5 = \boxed{4}$. At si $8m+5 = \boxed{4}$ erit quoque $3(8m+5) = 8n+7 = \boxed{4}$. Oder also: Quia

$$3(8n+7) = 8m+5, \text{ erit } 3(8n+7) = \boxed{4},$$

ideoque etiam $8n+7 = \boxed{4}$.

Hieraus folget ferner, dass wenn man nur beweisen könnte, omnes numeros formae $8m+1$ esse $= \boxed{4}$, tum omnes plane numeros futuros esse $= \boxed{4}$. Cum enim sit $3(8n+3) = 8m+1$, erit $3(8n+3) = \boxed{4}$, ergo et $8n+3 = \boxed{4}$. Porro ob $5(8n+5) = 8m+1$, erit $5(8n+5) = \boxed{4}$, ergo et $8n+5 = \boxed{4}$. Hinc denique erit $8n+7 = \boxed{4}$; ergo omnes numeri impares, ac proinde etiam omnes pares essent $= \boxed{4}$.

Euler.

P. S. Das theorema für $7A = \boxed{4}$, so ich nicht ausgeführt, wird durch folgendes Generaltheorema vollendet:

Theorema. Posito $m = aa + bb + cc + dd$, si sit $mA = \boxed{4}$, erit quoque $A = \boxed{4}$.

Demonstr. Sit $mA = (f+mp)^2 + (g+mq)^2 + (h+mr)^2 + (k+ms)^2$ atque $ff + gg + hh + kk =$

$$(aa+bb+cc+dd)(xx+yy+zz+vv),$$

erit

$$f = ax + by + cz + dv$$
$$g = bx - ay - dz + cv$$
$$h = cx + dy - az - bv$$
$$k = dx - cy + bz - av$$

fietque $A = xx + yy + zz + vv + 2(fp + gq + hr + ks) + m(pp + qq + rr + ss)$; at reperitur hinc

$$A = (ap + bq + cr + ds + x)^2 + (aq - bp + cs - dr - y)^2 + (ar - bs - cp + dq - z)^2 + (as + br - cq - dp - v)^2$$

ergo $A = \boxed{4}$ in integris. Q. E. D.

Ita si $7A = (2+7p)^2 + (2+7q)^2 + (2+7r)^2 + (3+7s)^2$ erit $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $xx + yy + zz + vv = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $v = 0$, unde $f = 4$, $g = -2$, $h = 0$, $k = 1$. Ergo si

$$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2 \text{ erit}$$

$$A = (2p + q + r + s + 1)^2 + (2q - p + s - r - 1)^2 + (2r - s - p + q - 1)^2 + (2s + r - q - p)^2.$$

Neulich ward in den Braunschweiger Anzeigen diese Frage aufgegeben: Wie viel ein Capital von 1000 Rthlrn. in 640 Jahren zu 5 pro cento, Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?

Weil die herauskommende Zahl sehr gross, und die Rechnung nach der ordentlichen Art auszuführen fast unmöglich ist, so ist die Auflösung gewiss nicht leicht. Ich habe folgende Summ gefunden: 36404192715744080 Rthlr. 22 Ggr. $11\frac{9}{10}$ Pf., welche nicht um $\frac{1}{10}$ Pf. von der Wahrheit fehlen soll. — Der Aufgeber verlangt, dass man die Antwort in einer halben Stund finden soll, mich hat aber dieselbe wohl eine ganz Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzt werden könnte.

Euler.

LETTRE CXXIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la précédente.

St. Petersburg d. 24. März 1750.

Es sind schon mehr als sieben Monate verflossen, seitdem ich Ew. letztes Schreiben erhalten habe, und dieses würde nicht geschehen seyn, wenn nicht einestheils unterschiedene Abhaltungen dazwischen gekommen wären, anderntheils aber dasjenige, so ich hätte schreiben können, auch nach meinem eignen Urtheil von gar zu geringem Werth gewesen wäre. Die Methode, so Ew. gefunden um zu zeigen, dass wenn $mA = \boxed{4}$ auch $A = \boxed{4}$ sey, halte ich vor ein inventum inventorum, und ob ich zwar geglaubet, dass die propositio: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, auf eine leichtere Art würde können demonstrirt werden, so habe doch dergleichen Demonstration nicht gefunden. Ich lasse aber dahin gestellt seyn, ob nicht einige kleine theoremata, so mir en passant vorgekommen, hiezu dienlich seyn möchten, von welchen ich Ew. einige anzeigen will:

I.

$\beta\beta + \gamma\gamma + (3\delta - \beta - \gamma)^2 = (2\delta - \beta)^2 + (2\delta - \gamma)^2 + (\delta - \beta - \gamma)^2$. Diese transmutatio trium quadratorum in tria alia scheinet mir von ziemlichem Nutzen zu seyn, nam inter quatuor quadrata $aa + bb + cc + 4kk$, ubi omnes litterae denotant numeros impares, semper erunt tria quadrata, quorum summa radicum est divisibilis per 3; folglich können diese vier quadrata nach solcher Methode auf viele, und vielleicht auf alle mögliche Arten transformiret werden, wie denn z. Ex. die Zahl 335 durch diese Methode in alle modos possibiles verwandelt wird, nemlich $3^2 + 7^2 + 9^2 + 14^2 = 3^2 + 13^2 + 11^2 + 6^2 = 9^2 + 13^2 + 9^2 + 2^2 = 15^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 = 15^2 + 1^2 + 3^2 + 10^2 = 15^2 + 9^2 + 5^2 + 2^2 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 18^2 = 3^2 + 1^2 + 17^2 + 6^2 = 7^2 + 13^2 + 9^2 + 6^2$ ($= 14^2 + 11^2 + 3^2 + 3^2$ *N. m. d'Euler*), so dass in diesen transmutationibus alle quadrata paria et imparia, in quae resolvi potest numerus 335, begriffen sind. Es wäre aber schon genug, wenn man ein Mittel hätte diese vier quadrata $3^2 + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\varepsilon\varepsilon$ in nachfolgende vier zu verwandeln $1 + \eta\eta + \vartheta\vartheta + 4\varkappa\varkappa$; denn so hätte man demonstriret, dass alle numeri $8n + 7$ summae quatuor quadratorum sind. Mir ist aber gleichwohl noch kein exemple vorgekommen, da nicht die quadrata $3^2 + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\varepsilon\varepsilon$ post primam aut secundam transmutationem in quatur quadrata, quorum unum sit unitas, hätten verwandelt werden können; denn also findet man:

$$3^2 + 13^2 + 15^2 + 2^2 = 407 = 1^2 + 9^2 + 15^2 + 10^2$$
$$3^2 + 9^2 + 15^2 + 10^2 = 415 = 1^2 + 5^2 + 17^2 + 10^2$$
$$3^2 + 5^2 + 17^2 + 10^2 = 423 = 1^2 + 5^2 + 19^2 + 6^2$$
$$3^2 + 5^2 + 19^2 + 6^2 = 431 = 1^2 + 3^2 + 15^2 + 14^2$$

die folgenden vier quadrata werden alsofort durch eine einige Operation, eben wie die vorhergehende, in quatuor quadrata, quorum unum est unitas, transmutiret, bis auf $3^2 + 3^2 + 21^2 + 2^2 = 463$, allwo man per primam transmutationem bekommt $15^2 + 15^2 + 3^2 + 2^2$, und aus diesen, per secundam transmutationem, $1^2 + 13^2 + 17^2 + 2^2$.

II.

Wie schwer es auch ist zu sagen, was datis quatuor quadratis, in quae resolvi potest numerus $2m - 1$, die quatuor quadrata $=$ numero $2m + 1$, seyn werden, so haben doch die erstern vier quadrata mit den letztern einen ganz genauen nexum, welcher in den tribus quadratis $= 8m + 3$ gegründet ist; datis enim his, dantur simul quatuor quadrata pro $2m - 1$ et pro $2m + 1$.

III.

Wenn α, β, γ, δ quatuor numeri impares quicunque sind, und man selbige gleich setzen kann folgenden numeris: $\alpha = 2er + 1$, $\beta = b + fr$, $\gamma = c + gr$, $\delta = r - eer - e - bf - cg$, so dass b, c, r numeri integri seyen, so kann man auch demonstriren omnem numerum $8m + 4$ oder generatim omnem numerum esse summam quatuor quadratorum: Denn es ist

$$(2er + 1)^2 + (b + fr)^2 + (c + gr)^2 + (r + e^2r - e - bf - cg)^2 =$$
$$1^2 + (b - fr)^2 + (c - gr)^2 + (r + e^2r + e + bf + cg)^2.$$

Dass derjenige, welcher das problema in den Braunschweigischen Anzeigen aufgegeben, bessere compendia als

Ew. zu dessen Solution haben sollte, kann ich mir nicht vorstellen, und bitte mir zu melden, ob der autor ferner etwas davon bekannt gemacht? In den Amsterdamer französischen Zeitungen vom 5. Aug. 1749 war folgendes avertissement: M. Quin Mackenzie Quin .... a inventé, à l'âge de 8 ans, et il a eu l'honneur de présenter au Roy une méthode par laquelle il multiplie et divise quelque nombre de figures que ce soit, et en vérifie le produit et le quotient en une seule ligne. Il fait cette opération en moins de trois minutes, quand même il s'agiroit de multiplier 20 figures par 20 figures, ou 40 par 20. Ceux qui voudront souscrire pour avoir cette méthode seront tenus de donner d'abord une guinée, et une autre après que cette méthode leur aura été communiquée ou à leurs correspondans. Nach der Zeit habe ich nichts mehr hiervon gehört.

Goldbach.

LETTRE CXXX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Résolution de chaque nombre en quatre quarrés. Série dont les termes sont les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 9. Juni 1750.

Ew. theorema

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$$

hat mir Anlass gegeben folgende theoremata zu finden, unter welchen dieses das erste ist

I. Si $a+b+c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2$$

II. Si $a+b+2c=3m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2$$

III. Si $a+2b+2c=9m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2$$

IV. Si $a+b+3c=11m$, erit

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2$$

V. Si $a+2b+3c=7m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(2m-b)^2+(3m-c)^2$$
VI. Si $2a+2b+3c=17m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(4m-a)^2+(4m-b)^2+(6m-c)^2$$
VII. Si $a+3b+3c=19m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(6m-b)^2+(6m-c)^2$$
VIII. Si $2a+3b+3c=11m$, erit
$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(3m-b)^2+(3m-c)^2$$
wo zu merken, dass die radices a, b, c sowohl negative als affirmative genommen werden können.

Solche theoremata können auch für vier quadrata gefunden werden als

I. Si $a+b+c+d=2m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2$$
II. Si $a+b+c+2d=7m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(4m-d)^2$$
III. Si $a+b+2c+2d=5m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2$$
IV. Si $a+2b+2c+2d=13m$, erit
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2+(4m-d)^2$$

Wenn dahero $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ zu $1^2+\eta^2+\vartheta^2+4\varkappa^2$ reducirt werden soll, wo alle Buchstaben numeros impares bedeuten, sowohl affirmativos, als negativos, so würde nach dem II[ten] theoremate kommen:

1. Si $3+\beta+\gamma+4\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=$
$(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4(2m-\varepsilon)^2$,
wo auch m ein numerus impar; also müsste entweder $2m-3=1$, oder $2m-\beta=1$, oder $2m-\gamma=1$. Solches geschiehet nur in folgenden Fällen:

1. wenn $m=1$, und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=4$,
2. wenn $m=2$, und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=11$, welches unmöglich,
3. wenn $\beta=2m\pm1$, und $\gamma+4\varepsilon=5m-3\mp1$.

2. Si $3+\beta+2\gamma+2\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=$
$(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(4m-\gamma)^2+4(m-\varepsilon)^2$.
Also müsste seyn entweder $2m-3=\pm1$, oder $2m-\beta=\pm1$, oder $4m-\gamma=\pm1$, wo m eine gerade Zahl ist. Also geschiehet dieses in folgenden Fällen:

1. wenn $m=2$, und also $\beta+2\gamma+2\varepsilon=11$,
2. wenn $\beta=2m\pm1$, und $2\gamma+2\varepsilon=5m-3\mp1$,
3. wenn $\gamma=4m\pm1$, und $\beta+2\varepsilon=-m-3\mp2$.

3. Si $6+\beta+\gamma+2\varepsilon=7m$, erit $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=$
$(4m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4(m-\varepsilon)^2$,
wo m wieder ein numerus par ist.

Jedoch zweifle ich, ob durch dieses 2[te] theorema allein immer ein Quadrat $=1$ gefunden werden könne.

Man kann auch solche theoremata für fünf quadrata geben, als:

I. Si $a+b+c+d+e=5m$, erit $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=$
$(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2$.
II. Si $a+b+c+d+2e=4m$, erit $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=$
$(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2+(2m-e)^2$.
etc.

Wenn man nun beweisen könnte, dass eines von diesen letztern quadratis könnte ad nihilum gebracht werden, so hätte man auch was man verlanget. Solches gehet also an, wenn entweder $a+b+c+d=0$, oder $3a=b+c+d+2e$.

Ew. II[tes] theorema von dem nexu inter $2m-1=4\square$ et $2m+1=4\square$, concessa resolutione numeri $8n+3$

in tria quadrata, verstehe ich also: Sit $n = m - 1$, atque $8n + 3 = 8m - 5 = aa + bb + cc$, wo a, b, c numeri impares sind; erit $8m - 4 = 1 + aa + bb + cc$, unde

$$4m - 2 = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

wo zwey radices pares sind, und zwey impares, folglich diese Form $4m - 2 = 4pp + 4qq + rr + ss$, also

$$2m - 1 = (p+q)^2 + (p-q)^2 + \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Weil a, b, c sowohl negative als affirmative genommen werden können, sit $2p = \frac{a+1}{2}$, $2q = \frac{b+c}{2}$, erit $2m - 1 = \left(\frac{a+b+c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c-1}{4}\right)^2.$ Hernach ist $8m + 4 = 9 + aa + bb + cc$; also $4m + 2 = \left(\frac{a+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$, wo $\frac{a-3}{2}$ et $\frac{b+c}{2}$ gerade, $\frac{a+3}{2}$, $\frac{b-c}{2}$ ungerade Zahlen seyn werden. Also wird $2m + 1 = \left(\frac{a+b+c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c+3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c+3}{4}\right)^2.$ Hieraus folget, dass wenn

$$2m - 1 = pp + qq + rr + ss,$$

alsdann immer seyn werde

$$2m + 1 = (p+1)^2 + (q+1)^2 + (r-1)^2 + (s-1)^2,$$

nehmlich zwey von den radicibus quadratorum ipsius $2m+1$, werden um 1 grösser seyn, als zwey von den radicibus quadratorum ipsius $2m - 1$, und zwey um 1 kleiner. Woraus dieses schöne theorema entspringet:

Theorema. Wenn $2m - 1 = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$, et

$$2m + 1 = aa + bb + cc + dd,$$

so werden von den Wurzeln a, b, c, d zwey um 1 grösser, die andern zwey aber um 1 kleiner seyn, als die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Also ist:

$1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2$ $3 = (0+1)^2 + (0+1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2$	$3 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ $5 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (1-1)^2 + (1-1)^2$
$5 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$ $7 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + (2-1)^2 + (0-1)^2$	$7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$ $+ \quad + \quad - \quad -$ $9 = 2^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2$
$9 = 0^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2$ $- \quad + \quad + \quad -$ $11 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$	

Zu merken ist, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowohl affirmative als negative genommen werden können. Also kann das theorema also ausgesprochen werden: Singulae radicum a, b, c, d, semper unitate discrepabunt a singulis litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Folgendes theorema scheint also merkwürdig zu seyn: Si $2m - 1 = pp + qq + rr + ss$, erit semper

$$2m + 1 = (p \pm 1)^2 + (q \pm 1)^2 + (r \pm 1)^2 + (s \pm 1)^2$$

dummodo signorum ambiguitas rite observetur *)

Coroll. Also ist allzeit $\pm 2p \pm 2q \pm 2r \pm 2s + 4 = 2$, oder $\pm p \pm q \pm r \pm s + 1 = 0$; das ist: Eine jegliche ungerade Zahl $2m - 1$ kann allzeit in vier solche quadrata

$$pp + qq + rr + ss$$

resolvirt werden, ut sit $\pm p \pm q \pm r \pm s = 1$. Denn es ist zu merken, dass man auch oft solche vier quadrata findet, da diese Eigenschaft nicht Statt findet als $27 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2$, oder $39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2$. Doch aber ist auch

$$27 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2, \text{ ubi } +1 - 1 - 3 + 4 = 1.$$

Also ist, wenn diese signa $+ - - +$ verkehrt unter jene quadrata geschrieben werden

*) Nicht eine jegliche Resolution von $2m - 1$ hat diese Eigenschaft, sondern es gibt allzeit eine, so diese Eigenschaft hat.

$$27 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 4^2$$
$$- \quad + \quad + \quad -$$
$$29 = 0^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2, \text{ ubi } +0+2-4+3=1$$
$$- \quad - \quad + \quad -$$
$$31 = 1^2 + 1^2 + 5^2 + 2^2, \text{ ubi } -1-1+5-2=1$$
$$+ \quad + \quad - \quad +$$
$$33 = 2^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2, \text{ ubi } +2-2+4-3=1$$
$$- \quad + \quad - \quad +$$
$$35 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2, \text{ ubi } -1+3+3-4=1$$
$$+ \quad - \quad - \quad +$$
$$37 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 5^2, \text{ ubi } +2+2+2-5=1$$
$$- \quad - \quad - \quad +$$
$$39 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 6^2.$$

Von hier aus lässt sich nicht weiter gehen; dahero muss man eine andere Resolution von 39 nehmen, welches durch die IIIte der obigen Formuln geschehen kann, da dann wird $a=1, b=-1, c=-1, d=6$; $a+b+2c+2d=10=5m$, also $m=2$ und also

$$39 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 2^2, \text{ ubi } 1+3-5+2=1 \text{ oder}$$
$$1-3+5-2=1, \text{ also}$$
$$- \quad - \quad + \quad -$$
$$- \quad + \quad - \quad +$$
$$\left.\begin{aligned}41 &= 0^2 + 2^2 + 6^2 + 1^2\\ &= 0^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2\end{aligned}\right\}$$

Hieraus muss wieder eine Resolution gesucht werden. Nach dem andern theoremate wird $a=-1$, $b=2$, $c=6$, $d=0$; $a+b+c+2d=7=7m$, also $m=1$, und dahero $41=3^2+0^2+4^2+4^2$, welche wieder nichts hilft. Hieraus aber wird durch das andere theorema $a=0$, $b=4$, $c=4$, $d=3$, $m=2$*) und also

*) Hierzu ist es aber leichter die theoremata von drey quadratis, sonderlich das erste zu gebrauchen.

$$41 = 4^2 + 0^2 + 0^2 + 5^2, \text{ ubi } -4+0+0+5=1$$
$$+ \quad - \quad - \quad -$$
$$43 = 5^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2, \text{ ubi } +5+1-1-4=1 \text{ oder}$$
$$-5+1+1+4=1$$
$$- \quad - \quad + \quad +$$
$$+ \quad - \quad - \quad -$$
$$45 = 4^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2, \text{ ubi } +4+0+2-5=1$$
$$= 6^2 + 0^2 + 0^2 + 3^2.$$

Ungeacht ich aber in dieser Materie so weit gekommen, dass ich dieses theorema demonstriren kann: omnem numerum esse summam quatuor quadratorum vel pauciorum, so fehlet mir doch noch zu zeigen, dass diese vier oder wenigere quadrata allzeit in integris angegeben werden können. Und dahero bin ich noch weit von des Fermat's Erfindung entfernt. Zu dieser glaube ich auch nicht dass man gelangen könne, ohne bey den numeris trigonalibus anzufangen. Man müsste also trachten zu beweisen, dass omnis numerus integer summae trium vel pauciorum numerorum trigonalium gleich sey. Hierzu aber kann eine algebraische Evolution keineswegs behülflich seyn, weil es nicht einmal wahr ist, dass $n = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$ generaliter, sondern nur in den Fällen, da n ein numerus integer affirmativus; da hingegen diese Formul $n = xx + yy + zz + vv$ wahr ist, wenn n auch ein numerus fractus ist, nur nicht negativus. Ich habe aber hierauf seit langer Zeit nicht weiter gedacht, und also auch nichts weiter gefunden.

Vor einiger Zeit habe ich Ew. eine Entdeckung über die summas divisorum numerorum naturalium zu überschreiben die Ehre gehabt: *)

*) Lettre CIII du 1 Avril 1747.

Numeri: 1,2,3,4,5, 6,7, 8, 9,10,11,12,13,14,15 etc.
Summae divisor.: 1,3,4,7,6,12,8,15,13,18,12,28,14,24,24 etc.
und bemerket, dass diese series summae divisorum recurrens sey, also dass wenn $\int n$ die summam divisorum numeri n andeutet, allzeit ist

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) - \int(n-22) - \text{etc.}$$

Diese Entdeckung schien mir um so viel merkwürdiger, da der Beweis davon nicht vollständig war, sondern sich auf dieses theorema gründete, dass

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ \text{etc.} =$$
$$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.},$$

welches ich nur per inductionem gefunden hatte und auf keinerley Weise beweisen konnte. Es schien mir auch merkwürdig, dass die exponentes alternatim sumti 1, 5, 12, 22, 35, etc. die numeri pentagonales sind, und die übrigen 2, 7, 15, 26, 40, etc. die seriem pentagonalium retro continuatam vorstellen, also dass die obige series auch solchergestalt dargestellt werden kann

$$\text{etc.} - x^{40} + x^{26} - x^{15} + x^7 - x^2 + x^0 - x^1 + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + \text{etc.},$$

wo die differentiae exponentium eine progressionem arithmeticam ausmachen.

Seit der Zeit aber habe ich auch die Demonstration dieses theorematis gefunden, welche sich auf dieses lemma gründet:

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)\ \text{etc.} =$$
$$1 - \alpha - \beta(1-\alpha) - \gamma(1-\alpha)(1-\beta) - \delta(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) - \text{etc.}$$

dessen Demonstration sogleich in die Augen fällt.

Also ist nach diesem lemmate

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\ \text{etc.} = s =$$
$$1 - x - x^2(1-x) - x^3(1-x)(1-x^2) -$$
$$x^4(1-x)(1-x^2)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Ponatur $s = 1 - x - Axx$, erit

$$A = 1 - x + x(1-x)(1-x^2) + x^2(1-x)(1-x^2)(1-x^3) + \text{etc.}$$

Evolvatur ubique factor $1 - x$, erit

$$\begin{aligned} A = 1 - x \quad & - x^2(1-xx) \quad - x^3(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.} \\ & + x(1-xx) + x^2(1-xx)(1-x^3) + x^3(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.} \end{aligned}$$

hincque fiet

$$A = 1 - x^3 \quad - x^5(1-xx) \quad - x^7(1-xx)(1-x^3) - \text{etc.}$$

Sit $A = 1 - x^3 - Bx^5$, erit

$$B = 1 - xx + x^2(1-xx)(1-x^3) + x^4(1-xx)(1-x^3)(1-x^4) + \text{etc.}$$

Evolvatur factor $1 - xx$:

$$\begin{aligned} B = 1 - xx \quad & - x^4(1-x^3) \quad - x^6(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.} \\ & + xx(1-x^3) + x^4(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.} \end{aligned}$$

hincque fiet

$$B = 1 - x^5 \quad - x^8(1-x^3) \quad - x^{11}(1-x^3)(1-x^4) - \text{etc.}$$

Sit $B = 1 - x^5 - Cx^8$, erit

$$C = 1 - x^3 + x^3(1-x^3)(1-x^4) + x^6(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5) + \text{etc.}$$

Evolvatur factor $1 - x^3$:

$$\begin{aligned} C = 1 - x^3 \quad & - x^6(1-x^4) \quad - x^9(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.} \\ & + x^3(1-x^4) + x^6(1-x^4)(1-x^5) + x^9(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) + \text{etc.} \end{aligned}$$

ergo

$$C = 1 - x^7 \quad - x^{11}(1-x^4) \quad - x^{15}(1-x^4)(1-x^5) - \text{etc.}$$

Sit $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$ etc.

Wenn man nun auf gleiche Art fortgehet, so wird

$$D = 1 - x^9 - Ex^{14},\quad E = 1 - x^{11} - Fx^{17}\ \text{etc.}$$

Also wird seyn:

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 - x - Ax^2 \\ A = 1 - x^3 - Bx^5 \\ B = 1 - x^5 - Cx^8 \\ C = 1 - x^7 - Dx^{11} \\ D = 1 - x^9 - Ex^{14} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} s \quad = 1 - x - Ax^2 \\ Ax^2 = x^2\,(1 - x^3) - Bx^7 \\ Bx^7 = x^7\,(1 - x^5) - Cx^{15} \\ Cx^{15} = x^{15}\,(1 - x^7) - Dx^{26} \\ Dx^{26} = x^{26}\,(1 - x^9) - Ex^{40} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

woraus denn ganz ungezweifelt folget

$$s = 1 - x - x^2\,(1 - x^3) + x^7\,(1 - x^5) - x^{15}\,(1 - x^7) + x^{26}\,(1 - x^9) - \text{etc.}$$

oder

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}$$

Euler.

LETTRE CXXXI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorèmes relatifs à la résolution des nombres en trois et quatre quarrés.

St. Petersburg d. 18. Juli 1750.

Die Demonstration von den theorematibus, die summas trium et quatuor quadratorum betreffend, welche Ew. in Dero Schreiben aufführen, habe ich leicht eingesehen, weil generaliter wahr ist, dass posita $z = \frac{2(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)}{ee + ff + gg + hh}$, die vier gegebenen quadrata $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta$ gleich sind $(ez - \alpha)^2 + (fz - \beta)^2 + (gz - \gamma)^2 + (hz - \delta)^2$, allwo die quantitates e, f, g, h pro lubitu genommen werden können, wenn auch über dieses, die letztern vier quantitates so beschaffen sind, dass die summa quatuor radicum

$$(e + f + g + h)\,z - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0,$$

so können die vier quadrata allezeit in drey quadrata verwandelt werden.

Ich will noch einige andere propositiones beyfügen, die mir schon längst bekannt gewesen, und sich selbst demonstriren:

I. $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+(2\delta+\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\delta)^2+(\alpha+\gamma+\delta)^2+(\beta+\gamma+\delta)^2+\delta\delta=(\alpha+\delta)^2+(\beta+\delta)^2+(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$

woraus zugleich die Methode erhellet, wie data quatuor quadrata imparia (non aequalia inter se) in quatuor alia, sive paria sive imparia, verwandelt werden können, denn wenn δ in den gegebenen vier quadratis ein numerus par ist, so gilt die erste Aequation pro quadratis paribus, und die andere pro imparibus.

II. Si dantur in uno casu $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma=8m+3$, dantur etiam quatuor quadrata pro casu quocunque $2m+pp\pm p+1$; nam si $8m+3$ est $=$ tribus quadratis, erit $8m+3+(1+2p)^2=$ quatuor quadratis et divisis omnibus per 4, $2m+pp\pm p+1=$ quatuor quadratis.

III. Nachfolgende drey quadrata in fractis

$$\frac{(\pm pp\alpha\mp 2qq\beta-2pq\gamma)^2+(\mp 2qq\alpha\pm pp\beta-2pq\gamma)^2+(\mp 2pq\alpha\mp 2pq\beta+(2qq-pp)\gamma)^2}{(pp+2qq)^2}$$

allwo α, β, γ pro integris genommen werden, sind $=$ diesen drey quadratis integris $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma$.

IV. Si $AA+BB+CC=8m+3$, erit

$$\frac{(A+B-C\pm1)^2}{4.4}+\frac{(A-B+C\pm1)^2}{4.4}+\frac{(-A+B+C\pm1)^2}{4.4}+\frac{(-A-B-C\pm1)^2}{4.4}$$
$$=2m+1.$$

und wenn man 3 anstatt 1 setzet, so kommen vier quadrata $=2m+3$ heraus.

Goldbach.

LETTRE CXXXII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches arithmétiques. Suite.

Berlin d. 15. August 1750.

Die überschriebenen theoremata circa resolutionem numerorum in tria et quatuor quadrata sind alle merkwürdig und haben ihre völlige Richtigkeit; ich habe mich aber bisher umsonst bemühet aus solchen theorematibus den geringsten Nutzen für die bewussten Fermatiana zu ziehen. Ich habe zwar bewiesen omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum; allein es fehlet mir noch an diesem Beweise: Si numerus integer n fuerit summa quatuor fractorum quadratorum

$$\frac{aa}{pp}+\frac{bb}{qq}+\frac{cc}{rr}+\frac{dd}{ss},$$

tum eundem quoque semper esse summam quatuor quadratorum in integris. Und ich sehe wohl, dass ich ohne diese

Demonstration nichts pro resolutione numerorum in tres trigonales, quinque pentagonales, sex hexagonales, etc. auszurichten vermögend bin; und weil hier alles auf numeros integros ankommt, so können die formulae universales, als welche auch fractos in sich schliessen, nicht viel helfen. Die demonstrationem pro quadratis habe ich aus der Betrachtung der residuorum, welche post divisionem cujusque numeri per quadratum überbleiben, hergeleitet; allein diese Betrachtung kann bey den übrigen numeris polygonalibus nicht angewandt werden, dahero ich den sichern Schluss mache, dass Fermat durch ganz andere Speculationen auf seine theoremata geleitet worden, welche vielleicht aus fleissiger Erwägung seiner Werke zu errathen wären.

Ich habe neulich einen Einfall gehabt eine seriem

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.}$$

daraus zu bestimmen, wenn die producta ex binis terminis contiguis gegeben sind, als:

Quaeratur series numerorum $a + b + c + d + e + f +$ etc. certa et uniformi lege procedens, ut sit: $ab = 1$, $bc = 2$, $cd = 3$, $de = 4$, $ef = 5$, etc.

Hieraus ist sogleich klar, dass wenn nur ein terminus bekannt wäre, die übrigen alle daraus bestimmt werden. Also aus dem ersten a sind die folgenden:

$$b = \frac{1}{a},\ c = \frac{2a}{1},\ d = \frac{1.3}{2.a},\ e = \frac{2.4a}{1.3},\ f = \frac{1.3.5}{2.4.a},\ \text{etc.}$$

Nun folgt ex natura seriei, dass die termini infinitesimi einander gleich seyn müssen, also wenn je zwey contigui einander gleich gesetzt werden, so müssen folgende valores der Wahrheit immer näher kommen:

$$aa = \frac{1.1}{2} = \frac{1.1.3}{2.2} = \frac{1.1.3.3}{2.2.4} = \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4}\ \text{etc.}$$

also wird seyn

$$aa = \frac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\text{etc.}}{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.\text{etc.}}\ \text{in inf.}$$

Diese Expression aber ist $= \frac{2}{\pi}$ (exist. $1 : \pi =$ diam.: periph.), folglich wird $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Dahero ist dieses eine series uniformi lege procedens:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \frac{1.3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{2.4}{1.3}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \text{etc.}$$

Von dieser serie:

$$1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \text{etc.}$$

halte ich für merkwürdig, dass wenn man setzt $x = 1 - y$, diese series herauskommt:

$$\tfrac{1}{2} + 0y + 0y^2 + 0y^3 + 0y^4 + \text{etc.}$$

nehmlich dass alle potestates finitae ipsius y evanesciren, welches aber bey den infinitis nicht geschehen kann, indem die summa derselben seriei unmöglich allzeit seyn kann $= \frac{1}{2}$. Solches mag wohl eintreffen casu $x = 1$; aber wenn $x < 1$, so ist die summa gewiss $> \frac{1}{2}$. Allein setze ich nur $x = \frac{9}{10}$, oder $y = \frac{1}{10}$, so wird die Summ $= 0{,}4999492$, wofern ich im Rechnen nicht gefehlt.

Euler.

LETTRE CXXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Amendement à la lettre précédente. Recherche de l'intégrale d'une équation différentielle au moyen d'une seconde différentiation.

Berlin d. 17. August 1750.

Ich kann nicht unterlassen den in meinem letzten Schreiben begangnen Rechnungsfehler anzuzeigen, dass ich die Summ der dort angeführten seriei kleiner als $\frac{1}{2}$ befunden, welche doch wirklich nach wiederholter Rechnung grösser ist als $\frac{1}{2}$. Ich habe seit der Zeit verschiedene casus mit allem Fleiss berechnet von dieser serie

$$s = 1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \text{etc.}$$

und befunden, dass

wenn $x = 0$ so ist $s = 1$, welches für sich klar;

$x = \frac{1}{2}$ „ $s = 0{,}5605621040$

$x = \frac{2}{3}$ „ $s = 0{,}5063351$

$x = \frac{7}{10}$ „ $s = 0{,}5029379861$

$x = \frac{8}{10}$ „ $s = 0{,}5000591683$

$x = \frac{9}{10}$ „ $s = 0{,}5000000005$

$x = 1$ „ $s = 0{,}5.$

Wenn also x nur um sehr wenig kleiner ist als 1, nehmlich $x = 1 - \omega$, so wird die summa s um etwas fast unmerkliches grösser als $\frac{1}{2}$. Denn wenn $\omega = \frac{1}{10}$, so ist $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{10}}$, und wenn man setzet $\omega = \frac{1}{20}$ oder $x = \frac{19}{20}$, so kann man sicher schliessen, dass der Excess der summae s über $\frac{1}{2}$ nur ungefähr $\frac{5}{10^{20}}$ betragen würde. Ich habe aber bisher umsonst einen sichern Weg gesucht um die Summe dieser seriei proxime in numeris zu bestimmen, wenn ω ein sehr kleiner Bruch ist. Denn wenn ich setzen wollte $\omega = \frac{1}{100}$ oder $x = \frac{99}{100}$, so müsste ich alle terminos seriei auf mehr als 100 Figuren in Decimalfractionen berechnen, weil $s =$ 0,5000000 etc. und die Anzahl der nach der 5 folgenden Nullen sich bis auf hundert belaufen würde. Denn ungefähr wird seyn $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{100}}$. Es wäre also eine Methode hoch zu schätzen, vermittelst welcher man im Stande wäre den Werth von s proxime zu bestimmen, wenn ω ein sehr kleiner Bruch ist.

Die theoremata Fermatiana haben mich auf die Betrachtung dieser seriei

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \text{etc.}$$

gebracht, als in welcher keine andere potestates ipsius x vorkommen als deren exponentes numeri quadrati sind. Nimmt man nun das Quadrat von dieser serie:

$$ss = 1 + 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + \text{etc.},$$

so enthält diese series keine andere potestates ipsius x, als deren exponentes summae duorum quadratorum sind. In der serie s^3 werden noch nicht alle potestates ipsius x vorkommen, sondern darin noch diese x^7, x^{15}, x^{23}, x^{28}, etc.

fehlen. Könnte man nun beweisen, dass in der serie s^4 gar alle potestates ipsius x nothwendig vorkommen, so wäre zugleich bewiesen, dass eine solche Zahl summa quatuor quadratorum pauciorumve wäre.

Ebenfalls pro resolutione numerorum in tres triangulares müsste man beweisen, dass posito

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.}$$

die daraus entstehende series s^3 gar alle potestates ipsius x in sich fasse. Und pro numeris pentagonalibus müsste bewiesen werden, dass posito $s = 1 + x^1 + x^5 + x^{12} + x^{22} + \text{etc.}$ die daher entstehende series s^5 gar alle potestates ipsius x in sich fasse, etc. In diesen seriebus pro s assumtis habe ich alle coëfficientes gleich 1 gesetzt. Der Beweis aber wird einerley seyn, wenn man quosvis coëfficientes affirmativos annimmt, und es käme darauf an, solche coëfficientes zu erwählen, dass der Beweis erleichtert würde. Dieser Weg däucht mir noch der natürlichste zu seyn, um zum Beweis der theorematum Fermatianorum zu gelangen.

Ew. werde noch ein curieuses paradoxon in analysi infinitorum vorlegen, welches darin bestehet, dass man öfters das integrale von einer Differential-Aequation finden kann, ohne dieselbe zu integriren, indem man dieselbe sogar noch weiter differentiirt, ungeachtet eine solche Operation dem Endzweck schnurstracks entgegen zu seyn scheinet. Denn wenn man eine aequationem differentialem nochmals differentiirt, so bekommt man ihr differentiale, oder das differentio-differentiale aequationis integralis quaesitae. So wunderbar muss es also scheinen, dass man durch eine solche Operation die aequationem integralem selbst bekommen sollte. Folgendes Exempel wird dieses paradoxon deutlich an den Tag legen.

Proposita sit haec aequatio differentialis

$$y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

cujus integrale quaeratur.

Ponatur $dy = p\,dx$, haec aequatio abibit in

$$y - px = a\sqrt{(1 + pp)},$$

quae denuo differentiata dat

$$dy - p\,dx - x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Atqui est $dy = p\,dx$ (per hyp.) ergo $-x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, ideoque hinc habebitur $x = \frac{-ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Porro ex aequatione $y - px = a\sqrt{(1+pp)}$ fit $y = px + a\sqrt{(1+pp)}$, unde valore invento pro x substituto, obtinetur $y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum jam sit $x = \frac{-ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ erit $xx + yy = aa$, quae est aequatio integralis quaesita, atque per differentiationem eruta.

Euler.

LETTRE CXXXIV.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. Observation sur les nombres résolubles en quatre quarrés.

St. Petersburg d. 5. October 1750.

Der Rechnungsfehler, welchen Ew. selbst in Dero Schreiben vermuthet hatten, ist mir alsofort sehr wahrscheinlich vorgekommen; es hätte mir aber viele Mühe gekostet selbigen eigentlich anzuzeigen, wenn solches nicht Ew. selbst in Dero Brief v. 17. Aug. gethan hätten; mir werden auch diese Sachen, seitdem Ew. von hier abgereiset sind und ich hierüber mit keinem Menschen mehr spreche, noch in Büchern etwas dergleichen lese, je länger je fremder, wie ich denn den nexum inter aequationes $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ und $x^2 + y^2 = a^2$ schwerlich würde entdecket haben, wenn Ew. selbigen nicht so deutlich angezeiget hätten.

Aus dem theoremate Fermatiano folget auch dieses: dass die summa radicum quatuor quadratorum imparium allezeit $=$ seyn kann ± 2, oder dass data summa quatuor quadratorum imparium, die quatuor quadrata so angegeben werden können, dass die summa radicum $=$ sey ± 2. Wenn man aber auf eine leichte Art beweisen kann, dass die summa quatuor quadratorum imparium auf nachfolgende vier zu reduciren ist: $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + (2 - \alpha - \beta - \gamma)^2$, so ist auch leicht zu beweisen, dass $8m + 4$ allezeit eine summa quatuor quadratorum imparium ist.

Goldbach.

LETTRE CXXXV.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorèmes de stéreométrie.

Berlin d. 14. November 1750.

Neulich kam mir in Sinn die allgemeinen Eigenschaften der Cörper, welche hedris planis eingeschlossen sind, zu bestimmen, weil kein Zweifel ist, dass sich in denselben nicht eben dergleichen allgemeine Eigenschaften finden sollten, als in den figuris planis rectilineis, deren Eigenschaften darin bestehen, dass 1. in einer jeglichen figura plana der numerus laterum dem numero angulorum gleich ist, hernach 2. dass die summa angulorum omnium gleich ist bis tot rectis quot sunt latera, demtis quatuor. Wie aber in den figuris planis nur latera und anguli zu betrachten vorkommen, so müssen bei den Cörpern mehr Stücke in Betrachtung gezogen werden, als

I. die hedrae, deren Anzahl sey $= H$;

II. die anguli solidi, deren Anzahl sey $= S$;

III. die Fügungen, wo zwey hedrae secundum latera zusammenkommen, so ich aus Mangel eines recipirten Worts, *acies* nenne, deren Anzahl sey $= A$;

IV. die latera singularum hedrarum, quorum omnium simul sumtorum numerus sit $= L$;

V. die anguli plani singularum hedrarum, quorum omnium numerus sit $= P$.

1. Bei diesen fünf Stücken ist nun erstlich klar, dass $P = L$, weil in allen hedris der numerus angulorum $=$ numero laterum.

2. Ist auch immer $A = \frac{1}{2} L$, oder $A = \frac{1}{2} P$, weil immer zwey latera diversarum hedrarum zusammenkommen, um eine aciem zu formiren.

3. Dahero ist der numerus laterum seu angulorum planorum omnium hedrarum corpus includentium allzeit par.

$$\left.\begin{array}{l}4.\ \text{Semper est vel } L = 3H \text{ vel } L > 3H \\ 5.\ \text{Semper est vel } P = 3S \text{ vel } P > 3S\end{array}\right\}\ \text{at est } P = L.$$

Dieses ist klar, weil keine hedra aus weniger als drey Seiten, und kein angulus solidus aus weniger als drey angulis planis bestehen kann. Folgende Proposition aber kann ich nicht recht rigorose demonstriren:

6. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum, seu est $H + S = A + 2$, seu $H + S = \frac{1}{2} L + 2 = \frac{1}{2} P + 2$.

7. Impossibile est ut sit $A + 6 > 3H$ vel $A + 6 > 3S$.

8. Impossibile est ut sit $H + 4 > 2S$ vel $S + 4 > 2H$.

9. Nullum formari potest solidum, cujus omnes hedrae

sint sex pluriumve laterum, nec cujus omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis sint conflati.

10. Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cujusque occurrunt, tot angulis rectis aequatur quot sunt unitates in $4A - 4H$.

11. Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo, seu est $= 4S - 8$ rectis.

Exemplo sit (Fig. 39) prisma triangulare, ubi est

1. numerus hedrarum $H = 5$;
2. numerus angulorum solidorum $S = 6$;
3. numerus acierum $(ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef)$ $A = 9$;
4. numerus laterum et angulorum planorum $L = P = 18$. Includitur enim corpus duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde $L = P = 2.3 + 3.4 = 18$. Nun ist nach dem theor. 6$^{\text{to}}$: $H + S (11) = A + 2 (11)$. Ferner summa omnium angulorum planorum (aus den beiden triangulis $= 4$ rectis, aus den drey quadrilateris $= 12$ rectis) erit $= 16$ rectis $= 4(A - H)$ $= 4S - 8$ rectis.

Es nimmt mich Wunder, dass diese allgemeinen proprietates in der Stereometrie noch von Niemand, so viel mir bekannt, sind angemerkt worden; doch viel mehr aber, dass die fürnehmsten davon als theor. 6 et theor. 11 so schwer zu beweisen sind, denn ich kann dieselben noch nicht so beweisen, dass ich damit zufrieden bin.

Um die soliditatem eines Cörpers zu bestimmen, so wollte ich nach Belieben inners desselben ein Punct annehmen, und daraus nach allen angulis solidis grade Linien ziehen. Hierdurch wird der Cörper in lauter Pyramiden zertheilt,

deren vertices im angenommenen Punct sind und die hedras zu basibus haben. Welche Pyramiden nicht triangulares sind, können ferner leicht in triangulares zerschnitten werden. Alles kommt also darauf an, dass man die soliditatem pyramidis triangularis bestimmen könne, welches also ex cognitis lateribus geschehen kann:

Sit (Fig. 40) $ABCD$ pyramis proposita, in qua habeantur $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$, erit hujus pyramidis soliditas $=$

$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{r} +aaff(bb+cc+dd+ee-aa-ff)-aabbcc \\ +bbee(aa+cc+dd+ff-bb-ee)-aaddee \\ +ccdd(aa+bb+ee+ff-cc-dd)-bbddff \\ -cceeff \end{array}\right\}}$$

Euler.

LETTRE CXXXVI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Encore sur la décomposition des nombres en quatre quarrés.

St. Petersburg d. $\frac{4}{15}$. Juni 1751.

Ew. bin ich für die mir communicirten schönen theoremata von den Eigenschaften der Cörper, welche hedris planis eingeschlossen sind, sehr verbunden; ich beklage aber, dass bey mir die gehörige Attention zu dergleichen Betrachtungen je länger je mehr, und zwar per seriem valde ad nihilum convergentem wider meinen Willen abnimmt, ausser dass ich noch bisweilen an das theorema Fermatianum gedenke, wovon ich über Vermuthen nachfolgende casus, darin quatuor quadrata $+8$ aequalia fiunt quatuor quadratis, bemerket. Sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ numeri integri permutabiles sive affirmativi sive negativi, erunt $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$ aequalia quatuor quadratis si fuerit $\delta = 7+\alpha+\beta+\gamma$, vel $=$

$2+\alpha+\beta+\gamma$, vel $=2\beta+2\gamma+3$, vel $=\frac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3}$ (casu quo hic numerus fit integer), vel $=3\alpha+2\beta+2\gamma$, vel $=\alpha$, vel $=3\gamma+8$, in welchen allen Fällen die quatuor quadrata gar leicht angegeben werden können; ingleichen wenn

$$\delta = \frac{(3qq+1)\gamma-2q(q+1)(\alpha+\beta+\gamma)}{3qq-2q-1}$$

numero integro, ubi et $2q$ sit numerus integer quicunque. Ich habe schon längst in den Zeitungen gelesen, dass der Herr Philidor sich in Berlin bei den grössesten Schachspielern fürchterlich gemacht, woraus ich vermuthe, dass er Ew. auch nicht unbekannt seyn wird.

Goldbach.

LETTRE CXXXVII.

=

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches sur la décomposition des nombres. Le célèbre joueur aux échecs Philidor. Nouveau mémoire sur Jupiter et Saturne.

Berlin d. 3. Juli 1751.

Ich beklage von Herzen, dass bey Ew. die Lust zu mathematischen Speculationen abzunehmen beginnt, woran ohne Zweifel der Mangel eines vertrauten Umgangs über dergleichen Untersuchungen grossen Antheil haben wird. Denn die mir gütigst überschriebenen Anmerkungen über das theorema Fermatianum zeigen nichts weniger, als eine Verminderung in der Kraft dergleichen Sachen nachzudenken an. Dieselben haben mir Anlass gegeben diese Bestimmung allgemeiner zu machen und den Werth von δ zu bestimmen, dass $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e$ eine summa quatuor quadratorum werde. Setze ich nun

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+e=(\alpha-kx)^2+(\beta-mx)^2+(\gamma-nx)^2+(\delta+x)^2,$$

so wird

$$\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma-\tfrac{1}{2}x(kk+mm+nn+1)+\frac{e}{2x}.$$

Damit nun diese Formul in ganzen Zahlen bestehe, setze ich $e(kk+mm+nn+1)=ab$, oder ich resolvire

$$e(kk+mm+nn+1)$$

in zwey factores, die entweder beyde grad oder beyde ungrad sind, so wird

$$\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+\frac{a-b}{2} \text{ und } x=\frac{e}{a}.$$

Ist nun, wie bey Ew. $e=8$, so können in genere die vier quadrata, deren Summ $=\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$, angegeben werden, wenn $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+f$, und f so angenommen wird, dass $f=c-d$, existente

$$2(kk+mm+nn+1)=cd;$$

und da wird $x=\frac{4}{c}$, oder $x=-\frac{4}{d}$.

Für k, m und n können nun Zahlen nach Belieben angenommen werden, da immer für f ein, zwei oder mehr taugliche Werthe herauskommen. Als setzt man

$$k=1,\ m=0,\ n=0, \text{ so wird } cd=4 \text{ und } f=0, \text{ oder } f=3;\ \delta=\alpha+\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}0^*\\3\end{matrix}\right.$$

$$k=2,\ m=0,\ n=0,\ \text{„}\ cd=10\ \text{„}\ f=3,\ \text{„}\ f=9;\ \delta=2\alpha+\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}3\\9\end{matrix}\right.$$

$$k=3,\ m=0,\ n=0,\ \text{„}\ cd=20\ \text{„}\ f=1, f=8, f=19;\ \delta=3\alpha+\ldots\ldots\left\{\begin{matrix}1\\8^*\\19\end{matrix}\right.$$

$$k=1,\ m=1,\ n=0,\ \text{„}\ cd=6\ \text{„}\ f=1, f=5;\quad \delta=\alpha+\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}1\\5\end{matrix}\right.$$

$$k=2,\ m=1,\ n=0,\ \text{„}\ cd=12\ \text{„}\ f=1, f=4, f=11;\ \delta=2\alpha+\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}1\\4\\11\end{matrix}\right.$$

$$k=2,\ m=2,\ n=0,\ \text{„}\ cd=18\ \text{„}\ f=3,\quad 7,\quad 17;\ \delta=2\alpha+2\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}3^*\\7\\17\end{matrix}\right.$$

$$k=3,\ m=1,\ n=0,\ \text{„}\ cd=22\ \text{„}\ f=9,\quad 21;\quad \delta=3\alpha+\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}9\\21\end{matrix}\right.$$

$$k=3,\ m=2,\ n=0,\ \text{„}\ cd=28\ \text{„}\ f=3,\quad 12,\quad 27;\ \delta=3\alpha+2\beta+\ldots\left\{\begin{matrix}3\\12\\27\end{matrix}\right.$$

$k=3, m=3, n=0$, so wird $cd=38$ und $f=17, 37$; $\quad \delta=3\alpha+3\beta+\ldots . \left\{\begin{matrix}17\\37\end{matrix}\right.$

$k=1, m=1, n=1$, „ $cd=8$ „ $f=2, 7$; $\quad \delta=\alpha+\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}2^*\\7^*\end{matrix}\right.$

$k=2, m=1, n=1$, „ $cd=14$ „ $f=5, 13$; $\quad \delta=2\alpha+\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}5\\13\end{matrix}\right.$

$k=2, m=2, n=1$, „ $cd=20$ „ $f=1, 8, 19$; $\quad \delta=2\alpha+2\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}1\\8\\19\end{matrix}\right.$

$k=2, m=2, n=2$, „ $cd=26$ „ $f=11, 25$; $\quad \delta=2\alpha+2\beta+2\gamma+\left\{\begin{matrix}11\\25\end{matrix}\right.$

$k=3, m=1, n=1$, „ $cd=24$ „ $f=2, 5, 10, 23$; $\quad \delta=3\alpha+\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}2\\5\\10\\23\end{matrix}\right.$

$k=3, m=2, n=1$, „ $cd=30$ „ $f=1, 7, 13, 29$; $\quad \delta=3\alpha+2\beta+\gamma+\left\{\begin{matrix}1\\7\\13\\29\end{matrix}\right.$

$k=3, m=2, n=2$, „ $cd=36$ „ $f=0, 5, 9, 16, 35$; $\quad \delta=3\alpha+2\beta+2\gamma+\left\{\begin{matrix}0^*\\5\\9\\16\\35\end{matrix}\right.$

wo ich die von Ew. überschriebenen Formeln mit einem * bemerkt. Man kann auch f nach Belieben annehmen, um daraus k, m und n zu bestimmen, als, wenn seyn soll $f=0$ oder $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma$, so wird $c=d$, folglich cd ein Quadrat. Dasselbe sey $=4pp$, so wird $kk+mm+nn=2pp-1$. Hier ist klar, dass wenn p ein numerus par, $2pp-1$ unmöglich die Summ von drey Quadraten seyn kann; also müssen für p nur ungrade Zahlen genommen werden, da dann für k, m, n, folgende Werthe herauskommen:

$2pp-1=1$	17	49	97	161	241	337
$k=1$	4, 3	7, 6	9, 6	12, 11, 10, 9	15, 14, 13, 12	18, 16, 12
$m=0$	1, 2	0, 3	4, 6	4, 6, 6, 8	4, 6, 6, 9	3, 9, 12
$n=0$	0, 2	0, 2	0, 5	1, 2, 5, 4	0, 3, 6, 4	2, 0, 7

Da nun solchergestalt, wenn α, β, γ gegeben sind, unendlich vielerley valores für δ gefunden werden können, nach-

dem entweder f oder k, m, n nach Belieben angenommen wird, und auch die Zahlen k, m, n und f negative genommen werden können, so wäre nun zu beweisen, dass auf solche Art alle mögliche Zahlen für δ herauskommen; und hieraus würde man einen sehr schönen Beweis für das theorema Fermatianum erhalten, welcher gewiss noch zu andern wichtigen Entdeckungen leiten würde.

Den grossen Schachspieler Philidor habe ich nicht gesehen, weil er sich mehrentheils in Potsdam aufhielt. Er soll noch ein sehr junger Mensch seyn, führte aber eine Maîtresse mit sich, wegen welcher er mit einigen Officiren in Potsdam Verdriesslickeiten bekommen, welche ihn genöthiget unvermuthet wegzureisen; sonsten würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben mit ihm zu spielen. Er hat aber ein Buch vom Schachspiel in England drucken lassen, welches ich habe, und darin gewiss sehr schöne Arten zu spielen enthalten sind. Seine grösste Stärke bestehet in Vertheidigung und guter Führung seiner Bauern, um dieselben zu Königinnen zu machen, da er dann, wenn die Anstalten dazu gemacht, pièce für pièce wegnimmt um seine Absicht zu erreichen und dadurch das Spiel zu gewinnen.

Seit einiger Zeit habe ich mich wiederum mit dem Jupiter und Saturnus gequälet, und darüber verschiedene Sachen entdecket, welche mir zu einer nähern Erkenntniss ihrer Bewegung den Weg gebahnet. Weil dieses wieder die Preisfrage bey der Pariser Akademie auf künftiges Jahr ist, so habe ich darüber eine neue Abhandlung dahin abgeschickt.

Euler.

LETTRE CXXXVIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches numériques précédentes.

St. Petersburg d. 17. Juli 1751.

Von der aequatione

$$3^2+5^2+u^2+8=uu+42=\text{tribus quadratis}$$

will ich nur bemerken, dass u infinities infinitis modis determiniret werden kann, davon ein casus ist

$$3^2+5^2+(4pp-10p+7)^2+8=$$
$$(4pp-10p+3)^2+(4p-9)^2+(4p-1)^2;$$

was ich aber in meinem vorigen Schreiben von dem valore δ per α, β, γ et q expresso erwähnet habe, verstehe ich jetzo selbst nicht mehr und zweifle an dessen Richtigkeit, doch ist dieses gewiss, dass

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\varepsilon\varepsilon+8=3^2+(1-\alpha+\beta)^2+$$
$$(1-\alpha+\gamma)^2+\frac{(2\varepsilon q+\alpha-1)^2}{qq},$$

si q determinetur per hanc aequationem

$$\frac{(3qq+1)}{2q}(1-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\,q=2\varepsilon.$$

Goldbach.

LETTRE CXXXIX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Même sujet.

St. Petersburg d. 3. August 1751.

Ew. sage ich schuldigsten Dank vor die Communication der vielen casuum pro

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8=aa+bb+cc+dd.$$

Es ist allerdings wahr, wie Ew. vermuthet, dass ich ausser Deroselben Niemand habe, mit dem ich von dergleichen découvertes schriftlich oder mündlich conferiren könnte. Ich glaube, man kann die Sache etwas kürzer fassen, wenn man nur drey quantitates indeterminatas annimmt und

$$\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8=bb+cc+dd$$

setzet, denn es ist gewiss, dass wenn b in einem casu bekannt ist, selbiges auch in infinitis aliis angegeben werden kann, wie ich in meinem letztern Schreiben angezeiget habe, (woselbst aber unnöthig $2p$ anstatt p gesetzt worden), indem es leicht zu demonstriren ist, dass alsdann auch seyn wird $\beta\beta+\gamma\gamma+(\delta+pu)^2+8=(b+pu)^2+(c+2u)^2+(d+2u)^2$, si ponatur $u=(\delta-b)p-(c+d)$. Ich weiss gar wohl, dass u noch auf unzählige andere Arten determiniret werden kann, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen formulis, welche an sich selbst kurz, und auf eine leichte Art immer generaler zu machen sind; denn wenn z. Ex. allhie $\delta+pu=\Delta$, $b+pu=B$, $c+2u=C$, $d+2u=D$, so entstehet daraus diese aequatio infinities generalior

$$\beta\beta+\gamma\gamma+(\Delta+PU)^2+8=$$
$$(B+PU)^2+(C+2U)^2+(D+2U)^2,$$

wenn P numerum integrum quemcunque bedeutet und

$$U=(\Delta-B)P-(C+D)$$

gesetzt wird.

Es folget auch ex theoremate Fermatiano, dass $8n+4$ allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $=2$, aber nicht allezeit in quatuor quadrata imparia, quorum summa radicum est $=0$, resolvirt werden kann.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit, dass eine summa quatuor quadratorum, quorum summa radicum est $=0$, in tria quadrata resolviret werden kann, ob aber quinque quadrata, quorum summa radicum $=0$, allezeit in quatuor quadrata die man angeben kann, resolviret werden könne, weiss ich noch nicht, jedoch gibt es unendlich viele casus, da solches angehet, ohngeachtet die summa radicum nicht $=0$ ist, also ist z. Ex.

$$((2+pp)b-c-d-e)^2+(c-2b)^2+(d-2b)^2+$$
$$(e-2b)^2+4ppbb=$$

his quatuor $((4+pp)b-c-d-e)^2+cc+dd+ee$.

Goldbach.

LETTRE CXL.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Recherche sur le nombre des manières dont un polygone peut être partagé en triangles par des diagonales.

Berlin d. 4. September 1751.

So gross das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrachtung der Eigenschaften der Zahlen finde, so wird mir doch diese Materie, wenn ich einige Zeit mit ganz andern Untersuchungen umgegangen, so fremd, dass ich mich sobald nicht mehr darin finden kann. Also konnte ich den Grund des schönen theorematis, dessen Ew. Meldung thun, dass eine summa quatuor quadratorum $aa+bb+cc+dd$, quorum summa radicum $a+b+c+d=0$, allzeit in drey quadrata resolvirt werden könne, sogleich nicht einsehen, da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$aa+bb+cc+dd=aa+bb+cc+(a+b+c)^2=$$
$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2.$$

Doch lässt sich auf gleiche Weise nicht darthun, dass eine summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ in quatuor quadrata resolvirt werden könne, so oft die summa radicum $a + b + c + d + e = 0$. Allein aus dem Vorigen erhellet, dass diese Resolution Statt findet, so oft die fünf radices a, b, c, d, e so beschaffen sind, dass vier derselben zusammengenommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kann, da es erlaubt ist eine jede radicem sowohl affirmative als negative zu nehmen, dass es schwer seyn würde fünf solche Zahlen anzuzeigen, davon nicht vier zusammengenommen auf 0 gebracht werden könnten. Oder die summa quinque quadratorum $aa + bb + cc + dd + ee$ lässt sich in vier quadrata resolviren in folgenden Fällen

$$a \,..\, b \,..\, c \,..\, d = 0$$
$$a \,..\, b \,..\, c \,..\, e = 0$$
$$a \,..\, b \,..\, d \,..\, e = 0$$
$$a \,..\, c \,..\, d \,..\, e = 0$$
$$b \,..\, c \,..\, d \,..\, e = 0$$

wo das Zeichen .. statt $\pm$ gesetzt ist. Dahero jede von diesen fünf Aequationen acht in sich schliesst, und folglich vierzig darin enthalten sind.

Wenn also die radices a, b, c, d, e alle affirmative genommen werden, und unter diesen vierzig Formuln nur eine enthalten ist, die $= 0$, so kann man sicher schliessen, dass die summa quinque quadratorum

$$aa + bb + cc + dd + ee$$

sich in summam quatuor quadratorum verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satze, dass

$$aa + bb + cc + dd = \square + \square + \square,$$

wenn $a + b + c + d = 0$. Weil nun eine summa quatuor quadratorum in unendlich viel andern Fällen auch in drey quadrata resolvirt werden kann, so können daher noch unendlich viel mehr Conditionen angezeigt werden, unter welchen summa quinque quadratorum in quatuor quadrata resolvirt werden kann.

So oft die quatuor quadrata $aa + bb + cc + dd$ so beschaffen, dass $a + b + c + d = 2$, so ist
$aa + bb + cc + dd = (a+b-1)^2 + (a+c-1)^2 + (b+c-1)^2 + 1$; folglich ist $aa + bb + cc + dd - 1$ in drey quadrata resolubel. Da nun $8n + 3$ in drey quadrata resolubel, wenn man setzt

$$8n + 3 = (a + b - 1)^2 + (a + c - 1)^2 + (b + c - 1)^2,$$

so wird $8n + 4 = aa + bb + cc + dd$ dergestalt, dass

$$a + b + c + d = 2;$$

und dieses ist das schöne theorema, welches Ew. aus dem theoremate Fermatiano hergeleitet haben.

Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam. Dieselbe betrifft, auf wie vielerley Arten ein gegebenes polygonum durch Diagonallinien in triangula zerschnitten werden könne.

Also ein quadrilaterum $abcd$ kann entweder durch die diagonalem ac, oder durch bd, und also auf zweyerley Art in zwey triangula resolvirt werden.

Ein Fünfeck $abcde$ wird durch zwey diagonales in drey triangula getheilet, und solches kann auf fünferley verschiedene Arten geschehen, nehmlich durch die diagonales I. ac, ad. II. bd, be. III. ca, ce. IV. db, da, V. ec, eb.

Ferner wird ein Sechseck durch drey diagonales in vier triangula zertheilet, und dieses kann auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage generaliter: da ein polygonum von n Seiten durch $n - 3$ diagonales in $n - 2$ triangula zerschnitten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$, so habe ich per inductionem gefunden

wenn $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

so ist $x = 1,\ 2,\ 5,\ 14,\ 42,\ 132,\ 429,\ 1430.$

Hieraus habe ich nun den Schluss gemacht, dass generaliter sey

$$x = \frac{2.6.10.14.18.22\ldots.(4n-10)}{2.3.4.5.6.7\ldots.(n-1)}$$

oder es ist $1 = \frac{2}{2}$, $2 = 1.\frac{6}{3}$, $5 = 2.\frac{10}{4}$, $14 = 5.\frac{14}{5}$, $42 = 14.\frac{18}{6}$, $132 = 42.\frac{22}{7}$; dass also aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die Induction aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, dass diese Sach nicht sollte weit leichter entwickelt werden können. Ueber die Progression der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, etc. habe ich auch diese Eigenschaft angemerket, dass $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$. Also wenn $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \text{etc.} = 4.$$

Euler.

LETTRE CXLI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches numériques.

St. Petersburg d. 16. October 1751.

Aus Ew. werthem Schreiben vom 4. Sept. habe ich mit Vergnügen die leichte legem progressionis von

$$1 + 2a + 5aa + 14a^3 + \text{etc.}$$

ersehen. Wenn mir wäre aufgegeben worden die coëfficientes incognitos b, c, d etc. in serie

$$A\ldots 1 + ba + caa + da^3 + ea^4 + \text{etc.} = \frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$$

zu determiniren, so würde ich die Solution kaum unternommen haben, da ich aber diese coëfficientes bereits exprimiret gesehen, so habe ich zwey Methoden zur Solution gefunden: 1. Weil aus der summa $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa} = A$ folget, dass $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$, oder dass

$$B\ldots 1 + a + baa + ca^3 + da^4 + \text{etc.}$$

in se multiplicata $= A$ seyn muss, so wird

$$BB = \left\{\begin{array}{llllll} 1 + & a + & baa + & ca^3 + & da^4 & \ldots \\ \vdots & a + & aa + & ba^3 + & ca^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & baa + & ba^3 + & bba^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & ca^3 + & ca^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & da^4 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right.$$

$$= A\ldots 1 + 2a + 5aa + 14a^3 + 42a^4 \ldots$$

nehmlich $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$ etc. 2. Wenn in der serie A gesetzt wird $a = \alpha - \alpha\alpha$, so wird die summa seriei $= \frac{1}{(-a)^2} = E\ldots 1 + 2\alpha + 3\alpha\alpha + 4\alpha^3 + \text{etc.}$ und die series A verwandelt sich in

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ \vdots & + b\alpha - b\alpha\alpha & & & & \\ \vdots & \vdots & + c\alpha\alpha \mp 2c\alpha^3 + & c\alpha^4 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & + d\alpha^3 \mp 3d\alpha^4 \ldots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & + e\alpha^4 \ldots & \\ = E\ldots 1 & + 2\alpha & + 3\alpha\alpha & + 4\alpha^3 & + 5\alpha^4 \ldots & \end{array}$$

Comparatis singulis terminis seriei A transmutatae cum singulis seriei E, fit $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$, etc.

Ich hatte in meinem Brief vom 15. Juni unter andern auch des casus Erwähnung gethan, wenn in der aequatione $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 =$ quatuor quadratis, $\delta = \frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}$ numero integro. Selbigen casum haben Ew. in Dero Antwort mit Stillschweigen übergangen; es sind aber die quatuor quadrata invenienda in solchem Falle

$$\frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma + 6)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma - 6)^2}{3^2} + \frac{(-\alpha + 2\beta + 2\gamma)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha - \beta + 2\gamma)^2}{3^2}$$

und der valor δ kann noch generaler angenommen werden, wen man setzet $\delta = \frac{\alpha - 2qq\beta - 2q\gamma}{1 + 2qq} =$ numero integro, und zugleich $\varepsilon = \frac{-2q\alpha - 2q\beta + (2qq - 1)\gamma}{1 + 2qq} =$ numero integro, quibus positis erunt

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\delta\delta + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - \alpha + \beta)^2 + \varepsilon\varepsilon.$$

Hinc sequitur pro quocunque casu $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\delta\delta + 8$ assignari posse quatuor quadrata integra si

$$\gamma\gamma + 2(\beta + \delta)(\alpha - \delta)$$

sit numerus quadratus, ubi α, β, etc. sunt numeri permutabiles sive affirmativi sive negativi.

Imgleichen positis tribus quadratis imparibus

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 8n + 3 \quad \text{et} \quad \delta = (uu - u - 4n - 1),$$

ubi u sit numerus quicunque integer, erunt

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\delta\delta + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - u)^2 + (\delta + u - 1)^2.$$

Unter die problemata, zu deren Solution es an einer sichern Methode fehlet, rechne ich auch dieses: Determinare numerum e per f et constantes hac lege, ut $2ee - ff + 2$ fiat quadratum. *Solutio*: ponatur $e = 13^2 f \pm 239$.

Goldbach.

LETTRE CXLII.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Même sujet. Réponse à la précédente.

Berlin d. 4. December 1751.

Ew. Schwierigkeit, betreffend die Auswickelung der Formul $\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$, wird sogleich gehoben, wenn man die Formul $\sqrt{(1-4a)}=(1-4a)^{\frac{1}{2}}$ nach gewöhnlicher Art in eine seriem verwandelt. Denn da

$$\sqrt{(1-4a)}=1-\frac{1}{2}\cdot 4a-\frac{1.1}{2.4}\cdot 4^2a^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot 4^3a^3-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot 4^4a^4-\frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cdot 4^5a^5-\text{etc.}$$

oder wenn ein jeder coëfficiens numericus des termini antecedentis, die potestatem von 4 mit eingeschlossen, durch P angedeutet wird, so wird

$$\sqrt{(1-4a)}=1-2a-\frac{4}{4}Pa^2-\frac{12}{6}Pa^3-\frac{20}{8}Pa^4-\frac{28}{10}Pa^5-\text{etc.}$$

oder

$$\sqrt{(1-4a)}=1-2a-\frac{2}{2}Pa^2-\frac{6}{3}Pa^3-\frac{10}{4}Pa^4-\frac{14}{5}Pa^5-\text{etc.}$$

folglich

$$\sqrt{(1-4a)}=1-2a-2\cdot\frac{2}{2}a^2-2\cdot\frac{2.6}{2.3}a^3-2\cdot\frac{2.6.10}{2.3.4}a^4-2\cdot\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}a^5-\text{etc.}$$

Dahero bekommt man

$$\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}=\frac{2}{2}+\frac{2.6}{2.3}a+\frac{2.6.10}{2.3.4}aa+\frac{2.6.10.14}{2.3.4.5}a^3+\text{etc.}$$

wobey merkwürdig ist, dass alle diese Coëfficienten ganze Zahlen werden, welches zu besondern Betrachtungen Anlass geben kann.

Also gibt auch $\sqrt[3]{(1-9a)}$ eine seriem, deren alle Coëfficienten ganze Zahlen werden, nehmlich

$$\sqrt[3]{(1-9a)}=1-3a-3\cdot\frac{6}{2}a^2-3\cdot\frac{6.15}{2.3}a^3-3\cdot\frac{6.15.24}{2.3.4}a^4-3\cdot\frac{6.15.24.35}{2.3.4.5}a^5-\text{etc.}$$

und generaliter geschiehet dieses

$$\sqrt[n]{(1-nna)}=1-na-n\frac{(nn-n)}{2}a^2-n\cdot\frac{(nn-n)(2nn-n)}{2.3}a^3-n\cdot\frac{(nn-n)(2nn-n)(3nn-n)}{2.3.4}a^4-\text{etc.}$$

Ew. casus, quo $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=$ quatuor $\square$, nehmlich $\delta=\frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$, hat allerdings etwas Besonderes an sich, welches ich sogleich nicht bemerket, und noch jetzt nicht sehe, wie derselbe in den von mir angeführten Fällen enthalten ist. Nun sehe ich zwar, dass derselbe herauskommt, wenn von den gesuchten 4 quadratis zwey dergestalt an-