strationem directam zu sehen, welche gewiss zu Entdeckung vieler anderer herrlichen Eigenschaften der Zahlen den Weg bahnen würde; bisher ist aber alle meine darauf gewandte Mühe umsonst gewesen. Gleichfalls habe ich bisher auch nicht das gemeldte theorema Fermatianum, dass eine jede Zahl eine summa trium trigonalium sey, demonstriren können, welches freylich darauf beruhet, dass eine jede Zahl von dieser Form $8m+3$ in drey quadrata zertheilet werden könne. Ich habe aber dieses theorema auf folgendes gebracht: Proposito numero quocunque m, ab eo semper ejusmodi numerum trigonalem subtrahere licet, ut residui quadruplum unitate auctum sit numerus primus. Wenn dieses bewiesen werden könnte, so wäre auch jenes ausser Zweifel gesetzt. Von diesem aber will ich der Deutlichkeit halber etliche Exempel hersetzen:

m — trig.	resid.	4 res. + 1	m — trig.	resid.	4 res. + 1	m — trig.	resid.	4 res. + 1
1 — 0	1	5 pr.	4 — 0	4	17 pr.	7 — 0	7	29 pr.
1 — 1	0	1 pr.	4 — 1	3	13 pr.	7 — 1	6	25 *n. pr.*
2 — 0	2	9 *n. pr.*	4 — 3	1	5 pr.	7 — 3	4	17 pr.
2 — 1	1	5 pr.	5 — 0	5	21 *n. pr.*	7 — 6	1	5 pr.
3 — 0	3	13 pr.	5 — 1	4	17 pr.	8 — 0	8	33 *n. pr.*
3 — 1	2	9 *n. pr.*	5 — 3	2	9 *n. pr.*	8 — 1	7	29 pr.
3 — 3	0	1 pr.	6 — 0	6	25 *n. pr.*	8 — 3	5	21 *n. pr.*
			6 — 1	5	21 *n. pr.*	8 — 6	2	9 *n. pr.*
			6 — 3	3	13 pr.	9 — 0	9	37 pr.
			6 — 6	0	1 pr.	9 — 1	8	33 *n. pr.*
						9 — 3	6	25 *n. pr.*
						9 — 6	3	13 pr.

Bisher triffts immer zu, dass zum wenigsten ein numerus primus herauskommt; und da in grösseren Zahlen immer mehr casus vorkommen, so ist sehr wahrscheinlich, dass sich unter denselben zum wenigsten immer ein primus befinde, oder ein solcher compositus, der ein Quadrat, oder in zwey quadrata resolubel ist. Es ist auch eben zur Demonstration des ersteren nicht nöthig, dass bey dem letztern sich unter den 4 resid. + 1 ein numerus primus befinde. Wenn darunter nur entweder ein quadratum vorkommt, oder eine Zahl per nullum hujusmodi numerum $4p-1$ divisibilis, so kann daraus die Demonstration des ersteren hergeleitet werden. Der Grund davon beruhet hierauf: ich kann nun beweisen, dass

I. Omnem numerum primum hujus formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.

II. Omnem quoque numerum non primum formae $4n+1$, dummodo nullum habeat divisorem formae $4p-1$, esse summam duorum quadratorum.

Es sey also $4n+1$ vel primus vel saltem non habens divisorem formae $4p-1$, so ist $4n+1$ und folglich auch ejus duplum $8n+2$ summa duorum quadratorum. Wenn also $8m+3=8n+2+aa$, so ist $8m+3$ in tria quadrata resolubel. Es wird also $8m+1=8n+aa$; man setze $a=2x+1$, so wird $8m=8n+4xx+4x$ und $n=m-\frac{1}{2}(xx+x)$. Denotante ergo m numerum quemcunque, wenn man nur immer von m einen solchen numerum trigonalem subtrahiren kann, dass der Rest 4 mal genommen $+1$ keinen divisorem formae $4p-1$ hat, so kann $8m+3$ in drey quadrata resolvirt werden. Dass aber eine jede Primzahl von dieser Form $4n+1$ allzeit eine summa duorum quadratorum sey, dafür habe ich nach langer Mühe endlich folgende Demonstration gefunden, welche sich auf verschiedene Präliminarsätze gründet, so zwar gemeiniglich für wahr angenommen werden, wovon ich doch gleichwohl noch keine gültige Demonstration gesehen, und also diese zu suchen nöthig gehabt habe.

Theor 1. Productum ex duobus numeris, quorum uterque est summa duorum quadratorum, est quoque summa duorum quadratorum.

Demonst. Sint $aa+bb$ et $cc+dd$ duo numeri propositi, erit productum $aacc+aadd+bbcc+bbdd = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$, ergo duplici modo summa duorum quadratorum. — Diese Demonstration ist zwar gemein, nicht aber die folgenden.

Theor. 2. Si summa duorum quadratorum $aa+bb$ (existentibus a et b numeris inter se primis) fuerit divisibilis per numerum primum formae $pp+qq$, tum etiam quotus, ex divisione resultans, erit summa duorum quadratorum. (Dieses theorema folget nicht aus dem vorigen nothwendig, denn man würde sich betrügen, wenn man hieraus: productum ex duobus numeris paribus est numerus par, schliessen wollte: ergo si numerus par fuerit divisibilis per numerum parem, quotus quoque erit numerus par. Wie kann man nun wissen, dass diese Art zu schliessen hier richtig ist? Dahero ist meines Erachtens folgende Demonstration nöthig.)

Demonstr. Quia $aa+bb$ est divisibilis per $pp+qq$, erit quoque $(aa+bb)pp = aapp+bbpp$ divisibile, at $aa(pp+qq)$ quoque est divisibile per $pp+qq$, ergo etiam differentia $bbpp-aaqq$ h. e. $(bp+aq)(bp-aq)$ erit per $pp+qq$ divisibile. Hinc ob $pp+qq$ numerum primum, erit vel

$bp+aq$ vel $bp-aq$ divisibile per $pp+qq$. Sit ergo $bp \mp aq = mpp+mqq$, fietque $b = mp + \frac{mqq \pm aq}{p}$. Cum igitur $mqq \pm aq$ per p divisibile esse debeat, at q et p sint necessario numeri inter se primi (alioquin $pp+qq$ non foret primus), necesse est ut $mq \pm a$ divisibile sit per p. Fiat ergo $mq \pm a = np$, erit $\pm a = np - mq$ et $b = mp+nq$. His autem valoribus substitutis prodit $aa+bb = (mm+nn)(pp+qq)$ et $\frac{aa+bb}{pp+qq} = mm+nn$. Q. E. D.

Theor. 3. Si summa duorum quadratorum $aa+bb$ (a et b existentibus perpetuo numeris inter se primis) divisibilis esset per numerum x, qui non sit summa duorum quadratorum, tum quotus vel non erit summa duorum quadratorum, vel certe factorem haberet qui non erit summa duorum quadratorum.

Demonstr. Sit quotus z et ob $\frac{aa+bb}{x} = z$, erit $\frac{aa+bb}{z} = x$. Jam si z esset primus formae $pp+qq$, tum quoque x foret ejusdem formae contra hyp. Si z esset productum ex pluribus hujusmodi primis $(pp+qq)(rr+ss)(tt+uu)$, tum ob $\frac{aa+bb}{pp+qq} = cc+dd$, $\frac{cc+dd}{rr+ss} = ee+ff$ et $\frac{ee+ff}{tt+uu} = gg+hh = \frac{aa+bb}{z}$, foret quoque $x = gg+hh$ contra hyp. Quare quotus z neque primus erit formae $pp+qq$, neque productum ex aliquot ejusmodi primis; ideoque necessario vel z non erit summa duor. quadr., vel factorem habebit qui non erit summa duor. quadr. Q. E. D.

Theor. 4. Summa duor. quadr. inter se primorum $aa+bb$ dividi nequit per ullum x, qui non ipse sit summa duor. quadratorum.

Demonstr. Ponamus x non esse summam duor. quadr., sitque $a = mx \pm c$, $b = nx \pm d$, semperque m et n ita capi poterunt ut fiat $c < \frac{1}{2} x$ et $d < \frac{1}{2} x$. Cum autem $aa + bb$ ponatur divisibile per x, erit quoque $cc + dd$ per x divisibile, et quia $cc + dd < \frac{1}{2} xx$, quotus erit $< \frac{1}{2} x$, ideoque dabitur numerus z non summa duor. quadr., per quem $cc + dd$ quoque erit divisibilis (Theor. 3). Sit iterum $c = mz \pm e$ et $d = nz \pm f$, erit $e < \frac{1}{2} z$ et $f < \frac{1}{2} z$, ideoque $ee + ff < \frac{1}{2} zz$ divisibile per z; unde quotus (per quem $ee + ff$ itidem divisibile existit) $< \frac{1}{2} z$, qui vel ipse erit *non summa* duor. quadr., vel ejusmodi habebit factorem. Dabitur ergo *non summa duor. quadr.* $< \frac{1}{2} z$ divisor ipsius $ee + ff < \frac{1}{2} zz$, sicque tandem deveniretur ad numerum *non summam duor. quadr.* minimum, puta 3, qui foret divisor summae duor. quadr $gg + hh < \frac{1}{2} g$, quod cum sit absurdum, sequitur summam duorum quadr. $aa + bb$ nullum admittere divisorem x, qui non sit ipse summa duor. quadr. Q. E. D.

Coroll. 1. Omnis ergo divisor summae duor. quadr. inter se primorum ipse est summa duor. quadr., loquor autem de ejusmodi summis duor. quadr. $aa + bb$ quorum radices a et b sunt numeri inter se primi, nam si esset v. gr. $a = mx$ et $b = nx$, tum $aa + bb$ utique per quemvis numerum x divisibilis esse posset.

Coroll. 2. Qui ergo numerus x in integris non est summa duor. quadr. idem nec in fractis poterit esse summa duor. quadr. Sit enim $x = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss} = \frac{ppss + qqrr}{qqss}$, foret $qqss = \frac{ppss + qqrr}{x}$, ideoque x divisor summae duor. quadratorum

$ppss + qqrr$, ergo x quoque esse debet summa duor. quadr. in integris. Hievon hatte ich lange eine Demonstration umsonst gesucht, aber diese erst neulich gefunden, welche, wie ich glaube, zu vielen andern Sachen führen kann.

Theor. 5. Si $4n + 1$ fuerit numerus primus, tum certo erit summa duor. quadr.

Demonstr. Si enim $4n + 1$ sit numerus primus, demonstravi hanc formulam $a^{4n} - b^{4n}$ quicunque numeri pro a et b ponantur, semper fore divisibilem per $4n + 1$. Erit ergo vel $a^{2n} + b^{2n}$ vel $a^{2n} - b^{2n}$ per $4n + 1$ divisibile. At semper innumeri dantur casus, quibus formula $a^{2n} - b^{2n}$ non est divisibilis per $4n + 1$; iis ergo casibus haec formula $a^{2n} + b^{2n}$ erit per $4n + 1$ divisibilis. At $a^{2n} + b^{2n}$ est summa duor. quadr., ergo etiam quivis ejus divisor $4n + 1$. Q. E. D.

Theor. 6. Qui numerus a duplici modo est summa duor. quadr., ille non est primus.

Demonstr. Sit enim $a = pp + qq = rr + ss$, ponatur $p = r + x$ et $q = s - y$ erit $pp + qq = rr + 2rx + xx + ss - 2sy + yy = rr + ss$, ergo $2sy = xx + yy + 2rx$ et $s = \frac{xx + yy + 2rx}{2y}$, hinc

$$a = rr + ss = \frac{(xx + yy)^2 + 4rx(xx + yy) + 4rrxx}{4yy} + rr$$

$$= \frac{(xx + yy)(xx + yy + 4rx + 4rr)}{4yy}.$$

Consequenter numerus a necessario duos ad minimum habet factores, quorum uterque est summa duor. quadr. Q. E. D.

Das theorema: Omnem numerum in quatuor quadrata esse resolubilem, dependiret hievon:

Omnem numerum hujus formae $4m \mp 2$ semper discerpi posse in duas hujusmodi partes: $4x + 1$ et

$4y+1$ quarum neutra divisorem habeat formae $4p-1$.

welches ich noch nicht demonstriren kann, aber doch nicht schwer scheinet. — Denn alsdann ist sowohl $4x+1$ als $4y+1$ summa duor. quadr. und folglich $4m+2$ summa 4 quadr. Dahero auch ejus duplum $8m+4$ und hujus quadrans $2m+1$ und also omnis numerus impar, woraus die Folge leicht auf alle numeros extendirt wird.

Des Hn. Mitzlers critique über meine Music habe ich nicht gesehen, ausser was davon in den gel. Zeitungen stehet, woraus ich geschlossen, dass dieselbe meistentheils übel gegründet ist, indem der Auctor meine Gedanken nicht genugsam eingesehen. An des Hn. Prof. Knutzen Logic habe ich eben nicht viel Sonderbares finden können; zum wenigsten kommt sie derjenigen bei weitem nicht bey, welche der H. Prof. Segner in Göttingen herausgegeben. Dieses Jahr hat mir die Akademie zu Paris wiederum die Hälfte des Preises zuerkannt, welche 2000 livr. beträgt.

M. Buffon in Paris hat eine neue Art von Brennspiegeln erfunden, vermittelst welcher er in einer Distanz von 200 Schuh Holz in Brand gestecket, und diese Distanz kann nach Belieben noch vermehrt werden.

Euler.

LETTRE CVI.*)

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Réponse à la précédente Machine à mouvement perpétuel d'Orffyrei.

St Petersburg d. 2 Juni 1747.

Für die mir communicirten theoremata bin ich Ew. sehr verbunden. Das merkwürdigste darunter halte ich, dass Sie meinen, es sey nicht schwer $4m+2$ in zwey solche Theile $4x+1$ und $4y+1$ zu resolviren, welche keinen divisorem hujus formae $4p-1$ haben. Ich kann das problema: numerum $8m+3$ in tria quadrata resolvere auch auf dieses reduciren: Datis duobus numeris n et p, invenire tertium x hujus naturae, ut $2+8n+8px-4xx-4x$ fiat summa duorum quadratorum, da dann vor x eine solche functio ex n et p composita gefunden werden soll, welche unter andern diese seltsame Eigenschaften habe, dass sie in allen

*) Le premier feuillet de la lettre originale étant égaré, le commencement a été suppléé du livre des minutes.

Fällen, da $2+8n$ eine summa duorum quadratorum ist, $=0$ werde, und in allen Fällen, da $2+8n-8p$ eine summa duorum quadratorum ist, $=-1$ werde, in welchen beyden conditionibus allein ich eine solche Schwierigkeit finde, dass ich an der Wahrheit des ganzen theorematis zu zweifeln anfange, ungeachtet es leicht ist unzählige formulas vor m anzugeben, in welchen $8m+3$ in tria quadrata zertheilet werden kann: als z. Ex. $m=bb\pm bc+cc$.

Seit der Zeit, da die Relation von dem perpetuo mobili des Hn. Orffyrei, in welcher der sechs Wochen lange Umlauf des Rades attestiret war, herausgekommen, hat man, meines Wissens, keine öffentliche Meldung gethan, dass diese machine weiter perfectionniret, oder zu einem Gebrauch angewendet worden wäre, welches desto bedenklicher scheinet, da der autor derselben noch viele Jahre hernach gelebet und vielleicht bis dato am Leben ist. Der Oberbaumeister in Wien, H. Fischer von Erlach (ni fallor), welcher dieselbe machine nebst dem Hn. Gravesande in Gegenwart des Hn. Landgrafen von Hessen besehen, hat davon ehemals gegen mich mit vielem Ruhm gesprochen und dabey erwähnt, dass er dem Rade, als es still gestanden, mit Fleiss einen ganz schwachen Stoss gegeben, worauf es sich von selbsten immer geschwinder usque ad certum celeritatis gradum beweget, in welchem es hernach aequabiliter fortgegangen.

Goldbach.

LETTRE CVII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Traité sur la faculté de la pensée. Concours au prix de l'académie de Paris, relatif à la théorie de Saturne, et de celle de Berlin sur le système des des monades. Miroirs ardents de Buffon. Suite des recherches arithmétiques.

Berlin d. 4. Juli 1747.

Ew. erkenne mich für die Bemühung, womit Dieselben meine geringe Schrift von dem Vermögen zu gedenken*) in Erwägung zu ziehen gewürdiget, gehorsamst verbunden. Es ist an dem, dass mein letzter Schluss nur auf diejenigen geht, welche die Seele für eine besondere Substanz, dabey aber doch für materiell halten, wobei ich insonderheit auf einige mir bekannte Wolfianer gesehen, welche glaubten, dass die Immaterialität der Seele von ihrem Meister nicht genugsam erwiesen worden. Nach den Lehrsätzen dieses Philosophi haben dieselben auch ganz recht zu zweifeln, denn wenn die Cörper und ihre Elemente mit so vielerley

*) Cet ouvrage m'est inconnu. Aussi ne se trouve-t-il pas dans la liste des oeuvres d'Euler placée en tête de ce volume.

thätigen und auf die Veränderung ihres Zustandes abzielenden Kräften begabet sind, so ist nicht abzusehen, wie die Kraft zu gedenken davon ausgeschlossen werden soll. Diese Leute geben also ohne Schwierigkeit zu, dass zum Gedenken eine thätige Kraft seinen Zustand zu verändern erfordert werde, und in Ansehung derselben glaube ich, dass mein Beweis Stich hält. Gegen diejenigen aber, welche glauben, dass das Vermögen zu gedenken ohne eine solche Kraft bestehen und blos allein durch die vim inertiae bewerkstelliget werden könne, muss ich gestehen, dass mein Beweis nicht gilt. Es deucht mich aber, sobald man zugibt, dass in der Materie, ausser der vi inertiae, keine andere Kraft befindlich, das Vermögen zu gedenken nothwendig ausgeschlossen werden müsse. Denn, ungeacht in dem menschlichen Körper und insonderheit in dem Gehirn die subtilsten Theilchen fast in einer unbegreiflichen Bewegung sind, worauf die Materialisten insonderheit ihre Meinung gründen, so geht doch dabey nichts anders vor, als dass ein jegliches Theilchen so lang in seinem Zustand verharret, als solcher mit dem Zustand der benachbarten bestehen kann; widrigenfalls aber nach den regulis mechanicis eine Veränderung in ihrer Bewegung vorgehen muss. Hieraus kann auch kein anderes Resultat entstehen, als eine Aenderung des Zustands blos allein in Absicht auf die Bewegung, und sobald man behaupten will, dass damit vielleicht noch ein anderes Resultat verknüpfet sey, indem uns das Wesen der Körper nicht genugsam bekannt, so ist man genöthiget zu behaupten, dass ausser der inertia noch andere Kräfte darin vorhanden seyn müssen; und alsdann findet mein Beweis wiederum Platz.

Bey der Akademie in Paris werde ich auf künftiges Jahr

wenig Competenten haben, denn der Herr Bernoulli, welcher angefangen darauf zu arbeiten, ist wegen der allzuweitläufigen und verdrüsslichen Rechnungen wiederum davon abgestanden Die Bewegung des Saturni war bisher noch weit weniger bekannt, als des Monds, denn noch bis jetzo haben die loca observata von den besten tabulis bis auf 20 Minuten differirt. Um diese Irregularitäten zu bestimmen werden erstaunliche calculi, sowohl theoretici als practici erfordert, welche ich auch für ein dreyfaches praemium nicht noch einmal unternehmen wollte. Denn ich habe über 100 loca Saturni mit dem Jupiter berechnet, und vermittelst der Theorie endlich solche tabulas herausgebracht, welche von allen sowohl alten als neuen Observationen nicht über 5 Minuten differiren. Eine grössere Accuratesse ist wegen der Unrichtigkeit der älteren Observationen nicht wohl zu hoffen, weil die neuen dazu nicht allein hinlänglich sind. Anjetzo stellt M. le Monnier zu Paris so accurate Observationen an, dass man auf etliche Secunden sicher seyn kann. Aus dergleichen Observationen habe ich meine tabulas solares rectificirt, und mit dem grössten Vergnügen befunden, dass dieselben anjetzo niemals über 5″ von den Observationen differiren.

Die Pièce de Monadibus, welche bey uns das praemium erhalten, hat meine völlige Approbation, als welcher ich auch mein votum gegeben. In derselben ist das ganze Lehrgebäude der Monaden völlig zerstört. Wir haben über diese Materie 30 Pièces bekommen, von welchen noch 6 der besten, sowohl pro als contra monades, gedruckt worden. In denselben ist beiderseits zum wenigsten die Sach so deutlich ausgeführt, dass die bisherigen Klagen, als wenn man einander nicht recht verstanden, ins künftige gänzlich aufhören werden. Die ganze Sach beruhet auf der Auswickelung dieses raisonnements: die Cörper sind divisibel; diese Divisibilität gehet entweder immer ohne Ende weiter fort, oder nur bis zu einem gewissen Ziel, da man auf solche Dinge kommt, welche nicht weiter theilbar sind. Im letztern Fall hat man die Monaden; im erstern, die divisibilitatem in infinitum, welche zwey Sätze einander so e diametro entgegengesetzt sind, dass davon nothwendig der eine wahr, der andere aber falsch seyn muss. Alle argumenta pro monadibus gründen sich hauptsächlich auf scheinbare Absurditäten, womit die divisibilitas in infinitum verknüpfet seyn soll. Da man sich aber meistentheils von diesem infinito verkehrte Ideen gemacht, so fallen auch dieselben Absurditäten weg. Die Meinung der Monaden zertheilet sich wieder in zwey Parteien, wovon die eine den Monaden alle Ausdehnung gänzlich abspricht, die andere aber dieselben für ausgedehnt hält, jedoch ohne dass sie partes hätten und folglich divisibel wären, welche letztere Meinung meines Erachtens am leichtesten zu refutiren ist. Diejenigen, welche monades magnitudinis expertes statuiren, müssen endlich zugeben, dass auch aus der Zusammensetzung derselben kein extensum entstehen könne, und sind dahero genöthiget sowohl die Extension als die Cörper selbst für blosse phaenomena und phantasmata zu halten, ungeacht sie bey dem Anfang ihres ratiocinii die Cörper als reell angesehen; dergestalt, dass, wenn der Schluss wahr wäre, die praemissae nothwendig falsch seyn müssten.

Die Brennspiegel des Hn. Buffon sind aus lauter kleinen speculis planis, bey 200 an der Zahl, zusammengesetzt, welche alle leicht dergestalt gestellt werden können, dass von allen der Schein, auf einen Platz geworfen wird; wodurch

er diesen Vortheil erhält, dass er den focum so weit und wohin er will richten kann, die Sonne mag stehen wo sie will, welches bey den ordentlichen Brennspiegeln nicht möglich ist. Er hat damit Holz in einer Weite von 200 Schuh angezündet, und es ist kein Zweifel, dass wenn ein Vogel durch den focum fliegen sollte, derselbe gesenget werden müsste.

Wenn $2+8n+8px-4xx-4x$ eine summa duor. quadr., als $=aa+bb$, so wird $3+8n+8px$ seu $3+8(n+px)=aa+bb+(2x+1)^2$, folglich eine summa trium quadr. Inzwischen kann ich nicht sehen, dass wenn $2+8n$ schon für sich eine summa duor. quadr. wäre, deswegen x nothwendig $=0$ seyn müsse, indem ja zu einer summa duor. quadr. noch solche Zahlen gesetzt werden können, dass die Summe diese Eigenschaft behält. Hernach da $3+8(n+px)$ dieser Formul $8m+3$ gleich seyn soll, so wird $n+px=m$, und folglich darf nur x gefunden werden, dass $2+8m-4xx-4x$ eine summa duor. quadr. werde, d. i., man müsste sehn, ob man nicht von $8m+3$ ein solches Quadrat subtrahiren könnte, ut residuum esset summa duor. quadr., welches die Frage selbst ist. Nimmt man nun an $2+8m$ sey schon eine summa duor. quadr., so kann freylich x entweder 0 oder -1 seyn; ausser diesen sind aber öfters noch mehrere Fälle möglich. Als, die vorgelegte Zahl $8m+3$ soll seyn $=59$. Da ist $8m+2=58=49+9$ eine summa duor. quadr. Soll nun $2+8m-4xx-4x$, d. i. $58-4xx-4x$ eine summa duor. quadr. seyn, so geschieht dieses wenn x entweder 0 oder -1; ausser diesen Fällen aber kann x noch seyn $=1$, oder 2, oder 3. Denn $58-4.2=50=49+1=25+25$; ferner ist $58-4.6=34=25+9$, und wenn $x=3$, ist $58-$

$4.12 = 10 = 9 + 1$. Die Ursach hievon ist, weil dergleichen Zahlen $8m + 3$ öfters auf mehr als eine Art können summae trium quadr. seyn, als in diesem Exempel ist $59 = 1 + 49 + 9 = 25 + 25 + 9$. In welchem Umstand ich nichts finde, welches mir die Gewissheit des Satzes $8m + 3 = 3\square$ verdächtig machen könnte.

Ich glaube, dass Orfyré noch am Leben ist, weil er vor einiger Zeit ein Schiff unter dem Wasser zu fahren erfunden haben wollte. Sein perpetuum mobile hatte er in Stücke zerschlagen, und nach der Zeit nicht wieder verfertigen wollen, welches die Erfindung nicht wenig verdächtig macht. Der von Ew. angeführte Umstand, dass diese Maschine, als sie ein wenig in Bewegung gesetzt worden, sich hierauf immer geschwinder bis auf einen gewissen Grad beweget, in welchem sie fortgelaufen, befindet sich in einer jeden Pendule. Denn wenn die Pendule aufgezogen und das pendulum still steht, so geht auch die Uhr nicht. Gibt man aber dem pendulo nur den geringsten Stoss, so kann das Gewicht wirken und die Bewegung kommt in ihren ordentlichen Gang. Statt des Gewichts möchte wohl in der Orfyreischen Maschine ein elastrum angebracht worden seyn: und dergleichen wäre wohl möglich, die ein ganzes Jahr lang fortgingen ohne von neuem aufgezogen zu werden. Auf diese Art sind alle erzählten Umstände dieser Maschine zu erklären, ausser demjenigen, welcher auch pflegt angeführt zu werden, dass Orfyré dem seel. Landgrafen das ganze Geheimniss entdecket, und dieser Herr die Maschine für ein wahres perpetuum mobile gehalten haben soll, welches nicht zu vermuthen wäre, wenn die Bewegung einen solchen Grund gehabt hätte. Ich weiss aber nicht, ob dieser letzte Umstand seine völlige Richtigkeit hat.

Euler.

LETTRE CVIII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches arithmétiques.

St. Petersburg d. 12. August 1747.

Für die mir communicirten unterschiedenen éclaircissements danke ich dienstlich; in meinem vorigen Schreiben aber soll es billig heissen: *dass in allen Fällen, da* $2 + 8n$ *eine summa duorum quadratorum unico modo ist*....und *in allen Fällen, da* $2 + 8n - 8p$ *eine summa duorum quadratorum unico modo ist etc.*

In nachfolgender serie 1, 3, 7, 17, 41, 99, etc., deren lex progressionis $A + 2B = C$ oder $B = A + \sqrt{(2AA \pm 2)}$ und die formula generalis $\frac{(1+\sqrt{2})^x + (1-\sqrt{2})^x}{2}$, siehet man alsofort, dass die termini locis paribus nicht quadrati seyn können, indem sie alle $\square \pm 1$ sind; ob aber alle termini locis imparibus, praeter primum, auch keine quadrata sind, muss ich dahingestellet seyn lassen, weil ich die Unmöglichkeit noch zur Zeit nicht einsehe, imgleichen, ob es unendlich viel casus gibt, darin $2A^4 - 1$ ein quadratum werden kann, wie in den casibus $A = 1$ und $A = 13$.

Goldbach.

LETTRE CIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Propriété des séries recurrentes.

Berlin d. 2. September 1747.

Dass in den seriebus recurrentibus, wo ein jeder terminus aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird, zugleich ein jeder terminus aus dem vorhergehenden allein angegeben werden könne vermittelst einer quadratischen Aequation, ist eine sehr merkwürdige Eigenschaft. Denn wenn in dieser serie $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}, \overset{x+2}{R}$ ist $C = aB - bA$ und $R = aQ - bP$, so wird $QQ - aPQ + bPP$ ad b^x in ratione constante seyn, welche, wenn $x = 1$, ist wie $BB - aAB + bAA$ ad b; folglich ist $QQ - aPQ + bPP = (BB - aAB + bAA)b^{x-1}$. Und in der von Ew. angeführten serie $\overset{1}{1}, \overset{2}{3}, \overset{3}{7}, \overset{4}{17}, \overset{5}{41}, \overset{6}{99} \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$, wo $a = 2$ und

$b = -1$, $A = 1$, $B = 3$, wird seyn $QQ - 2PQ - PP = 2(-1)^{x-1}$ und also $Q = P + \sqrt{(2PP + 2(-1)^{x-1})}$ oder $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$. Bey dieser Betrachtung bin ich auf den Gedanken gefallen, ob etwan in einer serie recurrente, deren jeder terminus aus den drey vorhergehenden bestimmt wird, nicht auch ein jeder aus den zwey vorhergehenden, vermittelst einer aequationis cubicae, angegeben werden könnte. Es sey in $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \overset{4}{D}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}, \overset{x+2}{R}, \overset{x+3}{S}$ etc., $D = aC - bB + cA$ und $S = aR - bQ + cP$, so habe ich gefunden, dass folgende ratio immer constans seyn müsse

$$\left.\begin{array}{l} R^3 - 2aQR^2 + (aa+b)\,Q^2R - (ab-c)\,Q^3 \\ \quad + \; bPR^2 - (ab+3c)PQR + (ac+bb)\,PQ^2 \\ \qquad\qquad + \quad acP^2R - \quad 2bcP^2Q \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \quad ccP^3 \end{array}\right\} : c^x,$$

welche ratio constans aus den terminis initialibus A, B, C, posito $x = 1$ erkannt wird.

Um aber wieder auf die von Ew. gemeldte seriem $1, 3, 7, 17, 41$ etc., wo $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$ zu kommen, so ist allerdings gewiss, dass kein terminus derselben ausser dem ersten, 1, ein Quadrat seyn könne. Denn, es sey P als ein terminus derselben ein Quadrat, nehmlich $P = zz$, so müsste auch $2z^4 \pm 2$ ein Quadrat seyn, welches nicht seyn kann. Denn es sey pro signo — erstlich $2z^4 - 2 = 4(zz-1)^2\frac{pp}{qq}$, so wird $zz + 1 = \frac{2ppzz}{qq} - \frac{2pp}{qq}$ und $zz = \frac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun p et q numeri primi inter se, so kann zz kein numerus integer seyn, wenn nicht $2pp - qq = 1$; daher aber wird $qq = 2pp - 1$, folglich $zz = 4pp - 1 = P$, also ist P um 1 immer kleiner als ein Quadrat, und kann also in integris kein Quadrat seyn. Wenn aber das Zeichen

$+$ gilt, so ist $2z^4 + 2 = (zz+1)^2 + (zz-1)^2$. Damit nun solches ein Quadrat werde, so setze man: $zz + 1 = aa - bb$ und $zz - 1 = 2ab$, wobey zu merken, dass z ein numerus impar seyn müsse, denn sonsten würde $2z^4 + 2$ ein numerus impariter par, folglich kein Quadrat. Es kann aber generaliter diese Formul $2z^4 + 2y^4$ kein quadratum seyn, ausser $y = z$, welches ich also beweise: Da $2z^4 + 2y^4 = (zz+yy)^2 + (zz-yy)^2$, so sey $zz - yy = ab$, so wird $zz + yy = \frac{aa-bb}{2}$, und $2z^4 + 2y^4 = \left(\frac{aa+bb}{2}\right)^2$. Nun sey $a = pq$ und $b = rs$, dass $zz - yy = pqrs$ und $zz + yy = \frac{ppqq - rrss}{2}$, und man setze $z + y = pr$, $z - y = qs$, so wird $2zz + 2yy = pprr + qqss$, folglich $zz + yy = \frac{pprr+qqss}{2} = \frac{ppqq-rrss}{2}$, oder $ss = \frac{pp(qq-rr)}{qq+rr}$. Dahero müsste $\frac{qq-rr}{qq+rr}$, d. i. $q^4 - r^4$ ein quadratum seyn, welches unmöglich.

Die Formul $2A^4 - 1$, welche in den Fällen $A = 1$ und $A = 13$ ein quadratum wird, kann noch in unendlich viel andern ebenfalls ein Quadrat werden, allein nicht in numeris integris. Denn wenn $A = \frac{1525}{1343}$, oder $A = \frac{2165017}{2372159}$, so wird auch $2A^4 - 1$ ein Quadrat. Ob aber in numeris integris keine andern Fälle als die beyden gemeldten möglich sind, bin ich nicht im Stande zu decidiren.

Euler.

LETTRE CX.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Même sujet.

St. Petersburg d. 30. Sept. 1747.

Die Aequation, welche Sie bey den seriebus recurrentibus observiret haben, wird vielleicht mit nachfolgender Anmerkung übereinkommen: Wenn man in dem casu, da die lex progressionis ist $C = aB - bA$, den terminum generalem setzet $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1}$, so wird der terminus primus $m + n$, der secundus $m\alpha + n\beta$, der tertius $m\alpha\alpha + n\beta\beta = am\alpha + an\beta - bm - bn$, oder $\alpha\alpha = a\alpha - b$, und $\beta\beta = a\beta - b$, woraus folget, dass α und β zwey radices ejusdem aequationis sind, und wenn $\alpha = \frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, alsdann $\beta = \frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$. Auf gleiche Weise, wenn $D = aC - bB + cA$, wird posito termino generali $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1} + p\gamma^{x-1}$,

$\alpha^3 = a\alpha\alpha - b\alpha + c$, und wenn von den dreyen radicibus dieser Aequation die eine α, die andere β, die dritte γ genannt wird, so hat man den völligen terminum generalem, wobey doch als etwas seltsames anzusehen ist, dass, obgleich in den aequationibus quintae, septimae, etc. potestatum, diese radices sehr complicatae seyn müssen, die aus denenselben zusammengesetzten termini generales dennoch, wenn nur a, b, c, etc., item m, n, p, etc. integri sind, auch allezeit integri werden und die in den radicibus aequationis enthaltenen quantitates surdae sich einander destruiren.

Um zu demonstriren, dass $2z^4 - 2$ kein Quadrat seyn kann, setzen Ew. $2z^4 - 2 = 4(zz - 1)^2 \frac{pp}{qq}$, und supponiren, dass p et q numeri inter se primi sind. Wie ich nun den zureichenden Grund dieser Supposition nicht einsehe, so finde an demselben desto mehr Ursach zu zweifeln, weil Sie endlich auf diesen Schluss kommen, dass P immer um 1 kleiner seyn muss, als ein □, da doch die Zahl 17 und unzählige andere zeigen, dass P auch um 1 grösser als ein □ seyn kann, denn es sind

$$\begin{array}{rrl} \text{pro } \square - 1, \text{ die termini} & 3 = & 1^2.2^2 - 1 \\ & 99 = & 5^2\ 2^2 - 1 \\ & 3363 = & 29^2.2^2 - 1 \\ & & \text{etc.} \\ \text{pro } \square + 1, \text{ die termini} & 17 = & 1^2.4^2 + 1 \\ & 577 = & 6^2.4^2 + 1 \\ & 19601 = & 35^2.4^2 + 1 \\ & & \text{etc.} \end{array}$$

und alle die numeri 1, 5, 29, sind termini seriei, cujus lex progressionis est $6B - A = C$; 1, 6, 35, etc. aber sind die summae derselben seriei.

Die grossen numeri in fractis, welche Ew. für $\sqrt{(2A^4-1)}$ gefunden haben, machen sehr wahrscheinlich, dass ausser 1 und 13 keine pro A substituiret werden können, damit $2A^4-1$ ein quadratum in integris werde; indessen sind doch solche propositiones, eben wegen der Schwierigkeit sie zu demonstriren, merkwürdig.

Nachfolgendes problema kann ich solviren; weil ich aber ohngefähr darauf gefallen, so weiss ich nicht, ob die Solution schwer oder leicht zu finden seyn mag: Datis duobus quadratis 1 et bb, invenire infinitis modis tertium cc hac lege, ut summa $1+bb+cc$ sit aequalis tribus aliis quadratis.

Von dem Hn. Doppelmayer habe ich seit der Zeit des fatalen Experiments, so in den Zeitungen erzählet worden, nichts vernommen. Im Fall Ew. wissen, wie er sich befindet, und ob er völlig wieder restituiret worden, bitte ich mich davon zu benachrichtigen.

Goldbach.

LETTRE CXI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Même sujet. Suite des recherches arithmétiques.

Berlin d. 24. October 1747.

Die letztens überschriebene Aequation pro seriebus recurrentibus beruhet allerdings auf der von Ew. gemeldten Eigenschaft dieser serierum. Denn wenn in der serie

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D} \ldots \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R},\ \overset{x+3}{S},\ \overset{x+4}{T}, \text{ etc.}$$

ist $C=mB-nA$ und generaliter $R=mQ-nP$, und man formirt diese Aequation $zz-mz+n=0$, wovon die radices seyn sollen a, b, so dass $a+b=m$ und $ab=n$, so wird der terminus generalis diese Form haben $P=\alpha a^x+\beta b^x$, folglich ist $Q=\alpha a.a^x+\beta b.b^x$. Aus diesen zwey Aequationen suche ich die valores a^x und b^x, und finde $\alpha a^x=\frac{bP-Q}{b-a}$, $\beta b^x=\frac{aP-Q}{a-b}$; diese multiplicire ich in einander $\alpha\beta\, a^x b^x = \frac{abPP - aPQ - bPQ + QQ}{-aa + 2ab - bb}$. Da nun $ab = n$, $a + b = m$, $-aa + 2ab - bb = -(a+b)^2 + 4ab = -m^2 + 4n$, so wird $\alpha\beta n^x = \frac{nPP - mPQ + QQ}{4n - mm}$, folglich $\frac{nPP - mPQ + QQ}{n^x} = \alpha\beta(4n - mm) =$ quantitati constanti, welche (posito $x = 1$) seyn muss $= \frac{nAA - mAB + BB}{n}$.

Wenn aber pro serie recurrente ist $D = mC - nB + pA$ und $S = mR - nQ + pP$, so formire ich diese Aequation $z^3 - mzz + nz - p = 0$, wovon die radices seyn sollen a, b, c, so wird $P = \alpha a^x + \beta b^x + \gamma c^x$, $Q = \alpha a . a^x + \beta b . b^x + \gamma c . c^x$, $R = \alpha a^2 a^x + \beta b^2 b^x + \gamma c^2 c^x$. Aus diesen drey Aequationen suche ich die valores αa^x, βb^x, γc^x, welche in einander multiplicirt geben $\alpha\beta\gamma a^x b^x c^x = \alpha\beta\gamma p^x$, weil $a + b + c = m$, $ab + ac + bc = n$ und $abc = p$; und durch Hülfe dieser Formuln lassen sich in der aequatione resultante die Buchstaben a, b, c durch m, n et p bestimmen und kommt die letzt überschriebene Aequation inter P, Q, R heraus.

Den Zweifel, welchen Ew. gegen meine Demonstration, dass $2z^4 - 2$ kein Quadrat seyn kann, machen, kann ich nicht recht einsehen, und glaube, dass ich mich entweder nicht deutlich genug ausgedrückt habe, oder dass Dieselben meine Demonstration auf einen andern casum gezogen.

Wenn $2z^4 - 2$ ein Quadrat wäre (in integris), so würde es grad, und folglich per 4 divisibel seyn. Ferner, da $z^4 - 1 = (zz - 1)(zz + 1)$, muss das Quadrat auch per $zz - 1$ divisibel seyn, und auch per $(zz-1)^2$, wenn $zz - 1$ keine factores quadratos hat. Dahero, wenn $2z^4 - 2$ ein Quadrat wäre, so müsste dasselbe eine solche Form haben

$2z^4 - 2 = \frac{4(zz-1)^2 pp}{qq}$, wo qq die etwan in $zz - 1$ enthaltenen factores quadratos aufheben soll. Nun nehme ich billig an, dass pp und qq numeri inter se primi sind, oder dass die fractio $\frac{pp}{qq}$ schon ad minimos terminos reducirt sey. Denn wenn pp et qq einen divisorem communem hätten, so würde solches in der Fraction $\frac{pp}{qq}$ per divisionem weggebracht werden können. Wenn demnach $2z^4 - 2 = \frac{4(zz-1)^2 pp}{qq}$, so ist $2(zz + 1)(zz - 1)qq = 4(zz - 1)^2 pp$, und folglich $(zz + 1)qq = 2(zz - 1)pp$, woraus entstehet $zz = \frac{2pp + qq}{2pp - qq}$. Da nun zz ein numerus integer ist, so muss $2pp - qq$ ein divisor seyn von $2pp + qq$, folglich auch von $4pp$ oder von $2qq$. Da aber pp et qq numeri inter se primi sind, so kann solches nicht geschehen, als entweder wenn $2pp - qq = 1$, oder wenn $2pp - qq = 2$, denn da $\frac{2pp + qq}{2pp - qq} = 1 + \frac{2qq}{2pp - qq} = \frac{4pp}{2pp - qq} - 1$ und p et q numeri primi inter se, so ist auf keine andere Art möglich, dass $\frac{2pp + qq}{2pp - qq}$ ein numerus integer werde.

Es sey also I. (si fieri possit) $2pp - qq = 1$, so wird $zz = 2pp + qq = 4pp - 1$, welches in numeris integris unmöglich ist.

Wenn II. $2pp - qq = 2$, so wird $zz = \frac{2pp + qq}{2} = qq + 1$, welches gleichfalls nicht möglich ist. Also kann auf keinerley Art $2z^4 - 2$ in integris ein Quadrat werden.

Setzt man z für zz um zu suchen in welchen Fällen $2zz - 2$ ein Quadrat werden könne, so gibt es zweyerley Fälle I. $z = 4pp - 1$, und II. $z = qq + 1$, welches diejenigen sind, so Ew. anführen, die aber meine vorige Demonstration nicht entkräften, welche, so viel ich mich erinnere, generaler war; denn ich hatte bewiesen, dass nicht nur $2z^4-2$ sondern auch $2z^4-2u^4$ kein Quadrat seyn könne. Wie ich sehe, so ist diese meine Demonstration nun im X. tomo Commentariorum gedruckt.

Das problema: Datis duobus quadratis aa et bb, invenire tertium xx, ut summa $aa+bb+xx$ alio quoque modo fiat resolubilis in tria quadrata, habe ich also solvirt: Sit

$$aa+bb+xx=(a+2pr)^2+(b+2qr)^2+(x-2r)^2,$$

erit $0=4apr+4pprr+4bqr+4qqrr-4rx+4rr$, unde per $4r$ dividendo fit $x=ap+ppr+bq+qqr+r$, wo pro p, q et r numeri quicunque integri tam affirmativi quam negativi accipi possunt. Woraus unendlich viel solutiones particulares fliessen. Als, es sey $p=1$, $q=-1$, erit $x=a-b+r$ und

$$aa+bb+xx=(a+2r)^2+(b-2r)^2+(x-2r)^2.$$

Meine Pièce über den Saturnum ist in Paris nicht nur wohl angekommen, sondern ich höre auch, dass man mit derselben sehr wohl zufrieden ist und sie allen andern, so eingelaufen, weit vorziehet.

Euler.

LETTRE CXII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. *Suite des recherches précédentes.*

St. Petersburg d 27. Januar 1748.

Aus der Inlage, welche mir wieder zurückzusenden bitte, werden Ew. am besten sehen, worauf mein voriges dubium gegründet gewesen.

Dero Solution des problematis: datis duobus quadratis aa et bb, invenire tertium xx hac lege, ut $aa+bb+xx$ plus quam uno modo sit summa trium quadratorum, ist offenbar und general; denn obzwar die aequatio

$$0=4apr+4pprr+4bqr+4qqrr-4rx+4rr,$$

per $4r$ divisa nicht $x=ap+prr+bq+qrr+r$, sondern $x=ap+ppr+bq+qqr+r$ gibt, so hat doch dieser kleine error calculi keine influence in die Methode selbst. Indessen bleibet die Demonstration, dass eine summa trium quadratorum imparium vor $8m+3$ in quocunque casu ipsius m angegeben werden könne, noch sehr dunkel. Es ist mir eingefallen, dass wenn man die drey radices quaesitas setzen möchte A, B, C, und

$$A=1+am+bmm+cm^3+dm^4+\text{etc.}$$
$$B=1+am-bmm-cm^3-dm^4-\text{etc.}$$

folglich

$$\begin{array}{llllll} AA=1+2am & +2bmm & +2cm^3 & +2dm^4 & +2em^5 & +\text{etc.} \\ & +aa & +2ab & +2ac & +2ad & \\ & & & +bb & +2bc & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} BB=1+2am & -2bmm & -2cm^3 & -2dm^4 & -2em^5 & +\text{etc.} \\ & +aa & -2ab & -2ac & -2ad & \\ & & & +bb & +2bc & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllll} CC=1+8m & -2aamm & * & -2bbm^4 & -4bcm^5 \\ \quad -4a & & & & \end{array}$$

alsdann $AA+BB+CC=8m+3$ und alle coëfficientes b, c, d, etc. per solam a determinirt werden könnten, so dass a eine quantitas indeterminata bliebe, denn es wird posita

$$C=1+\alpha m+\beta mm+\gamma m^3+\delta m^4+\text{etc.}$$
$$\alpha=4-2a,\quad \beta=-2aa-\alpha\alpha,\quad \gamma=-2\alpha\beta,\ \text{etc.}$$

hieraus würde ferner folgen, dass wenn das theorema an sich selbst wahr ist, die series A, B, C allezeit numeris integris gleich seyn würden, man möchte auch vor a annehmen, was man wollte.

Goldbach.

LETTRE CXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Suite des recherches précédentes. Théorème de géométrie.

Berlin d. 25. Februar 1748.

Das über meinen vorigen Brief gehabte dubium wird sogleich wegfallen, wenn Ew. sich zu erinnern belieben werden, dass daselbst von numeris integris die Rede sey, denn da $P=4pp-1$, so kann in ganzen Zahlen P unmöglich ein Quadrat seyn; in Brüchen aber wäre solches auf unendliche Arten möglich.

Dass alle in dieser Formul $8m+3$ enthaltenen Zahlen in drey quadrata imparia resolvirt werden können, bin ich noch keineswegs im Stand zu beweisen, ungeacht ich mir darüber den Kopf schon ziemlich verbrochen habe. So oft $8m+3$ ein numerus primus ist, so ist dieselbe allzeit in dieser Form $2aa+bb$ enthalten, als $3=2.1+1$;

$11 = 2.1 + 9$; $19 = 2.9 + 1$; $43 = 2.9 + 25$, etc. und hievon getrauete ich mir noch die Demonstration zu finden. Ich glaube auch nicht, dass man für diese Proposition, dass $8m + 3 = aa + bb + cc$ eine solche Demonstration finden könne, wodurch die drey radices a, b, c selbst bestimmt werden, sondern man wird nur die possibilitatem resolutionis anzuzeigen im Stande seyn. Aus diesem Grunde habe ich zu dem von Ew. eingeschlagenen Weg kein grosses Vertrauen, weilen dadurch nicht nur die Möglichkeit gezeigt, sondern auch die tria quadrata selbst in genere angegeben werden könnten, welches letztere ich gleichwohl für unmöglich halte. Die Demonstration müsste ungefähr meines Erachtens derjenigen ähnlich seyn, wodurch ich bewiesen, dass omnis numerus primus $4n + 1$ eine summa duorum quadratorum sey. Ich beweise erstlich, dass eine jede summa duorum quadratorum $aa + bb$ (wo a et b numeri inter se primi gesetzt werden) keine andere divisores haben könne, als welche gleichfalls summae duorum quadratorum sind. Hernach so oft $4n + 1$ ein numerus primus ist, kann ich unendlich viel Zahlen hujus formae $p^{2n} + q^{2n}$ angeben, welche durch $4n + 1$ divisibel sind. Da nun $p^{2n} + q^{2n}$ eine summa duorum quadratorum ist, so muss auch $4n + 1$ als ein divisor derselben Formul gleichfalls eine summa duor. quadr. seyn. Die resolutio autem ipsa in duo quadrata wird hierdurch nicht offenbar, sondern nur die Möglichkeit derselben bewiesen.

Man kann aber diese Proposition, dass $8m + 3$ allzeit eine summa trium quadratorum sey, in vielerley andere Formen einkleiden, welche vielleicht leichter zu demonstriren seyn dürften. Als, wenn man beweisen könnte, dass proposito numero quocunque integro m, für p und q allzeit

solche Werthe anzugeben möglich wären, so dass nachfolgende aequatio cubica

$$x^3 - (2p - 1)\,xx + (2pp - 2p - 1 - 4m)\,x - q = 0$$

alle drey radices rationales überkäme, so wäre die Sach auch bewiesen. Denn wenn a, b, c die radices dieser Aequation wären, so würde $2p - 1 = a + b + c$, et

$$2pp - 2p - 1 - 4m = ab + ac + bc.$$

Weil nun

$$4pp - 4p + 1 = aa + bb + cc + 2ab + 2ac + 2bc,$$

so subtrahire man davon

$$4pp - 4p - 2 - 8m = 2ab + 2ac + 2bc$$

so bleibt übrig $8m + 3 = aa + bb + cc$. Ich habe aber hiezu schlechte Hoffnung, weil die Demonstration nur auf valores integros ipsius m gehen müsste; denn in fractis wäre die Sach oft unmöglich.

Ich habe diese Sach auch folgendergestalt betrachtet: Es muss allzeit möglich seyn von $8m + 3$ ein solches Quadrat $4xx - 4x + 1$ zu subtrahiren, dass der Rest

$$8m + 2 - 4xx + 4x$$

in zwey quadrata resolubel werde. Folglich muss auch die Hälfte davon $4m + 1 - 2xx + 2x$ eine summa duor. quadr. seyn, nehmlich $4yy - 4y + 1 + 4zz$, also würde

$$m = \frac{xx - x}{2} + yy - y + zz.$$

Wenn man dahero beweisen könnte, dass diese Formul $\frac{xx - x}{2} + yy - y + zz$ alle numeros integros in sich begreife, so wäre das theorema auch bewiesen.

Fermat sagt in seinen Observationibus ad Diophantum, dass diese Aequation $x^n = y^n + z^n$ in numeris rationalibus allzeit unmöglich sey, exceptis casibus $n = 1$ et $n = 2$, nehmlich weder eine summa duorum cuborum könne ein cubus, noch eine summa duorum biquadratorum ein biquadratum, noch in genere eine summa duarum potestatum altiorum eine gleiche potestas seyn. Er sagt, dass er dafür eine sehr ingenieuse Demonstration habe, welche er aber wegen Mangel des Raums nicht beysetzen könne. Es ist also sehr schad, dass auch diese nebst vielen andern verloren gegangen.

Ich bin neulich auf nachfolgendes theorema geometricum gefallen, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet. Nehmlich, gleich wie in einem jeden parallelogrammo die summa quadratorum laterum der summae quadratorum diagonalium gleich ist, so ist in einem jeden quadrilatero non parallelogrammo die summa quadratorum laterum grösser als die summa quadratorum diagonalium, und der excessus kann also concinne angegeben werden: Man bisecire (Fig. 28) in dem trapezio $ABCD$ die diagonales AC und BD in N et M und jungire die Linie MN, so wird seyn:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2.$$

Euler.

LETTRE CXIV.

=

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE Suite des recherches arithmétiques.

St Petersburg d. 6. April 1748.

In Ew. Schreiben vom 2. Sept. hatte ich die Worte: *dass P um 1 immer kleiner als ein Quadrat seyn muss*, für eine zur vorhergehenden Formul $Q = P + \sqrt{(2PP \pm 2)}$ gehörige Condition angesehen, welche sich aber, wie ich nunmehro finde, blos auf die Aequation $zz = 4pp - 1 = P$ rapportiren, so dass alles seine Richtigkeit hat.

Wenn Ew., wie Sie vermuthen, demonstriren könnten, dass alle numeri $8m + 3$, wenn sie primi sind, zu dieser Formul $2aa + bb$ gebracht werden können, so werden Sie auch leicht finden, dass alle numeri primi $4m + 3$ zu dieser Formul gehören $2aa + bb + cc$, weil dieselbe meines Erachtens alle numeros impares in sich begreift; wenn aber solches nur von allen numeris primis demonstrirt wäre, so würde offenbar seyn, dass alle numeri integri affirmativi aus vier quadratis bestehen.

Was die transmutationes einer summae quatuor quadratorum betrifft, so habe ich derselben unterschiedene gefunden, welche ich folgendergestalt exprimiren will, dass $\triangle$ einen numerum trigonalem, $2\triangle$ ein duplum trigonalis, $3\triangle$ ein triplum etc. $\square + \square$ ein aggregatum duorum quadratorum, $2\square$ ein duplum quadrati etc. bedeuten; solchemnach wird eine jede Zahl seyn:

$$\text{I. } 2\square + \square + 4\triangle; \quad \text{IV. } 2\square + \square + \triangle;$$
$$\text{II. } \square + 2\square + 2\triangle; \quad \text{V. } \square + \triangle + 4\triangle;$$
$$\text{III. } \square + 2\triangle + 4\triangle; \quad \text{VI. } 2\square + \triangle + 2\triangle;$$
$$\text{VII. } \triangle + 2\triangle + 4\triangle;$$
$$\text{VIII. } \square + \square + 2\triangle;$$
$$\text{IX. } \frac{\square + \square + \square}{2};$$

aus welchen noch viele andere deducirt werden können.

In der nachfolgenden Formul

$$aa - a + bb - b + cc - c + dd - d + 1$$

ist offenbar, dass selbige eine summa quatuor quadratorum wird, wenn $d = -a - b - c + 1$; wenn aber auch d pro numero quocunque genommen wird, muss die formula dennoch eine summa quatuor quadratorum seyn. Sollte mir etwas Neues von dieser Materie einfallen, werde ich das Vergnügen haben selbiges Ew. zu communiciren.

Goldbach.

P. S. Wenn die numeri a, b, c in casu

$$2aa + bb + cc = 2n + 1$$

gegeben sind, so können daraus die vier quadrata pro summa $2n + 3$, $4n + 3$, $6n + 3$, $4n + 6$, $8n + 6$ etc. imgleichen vor $2n + 2pp + 1$, $4ffn + 2ff + dd$, allwo p, f, d numeri integri quicunque sind, leicht angegeben werden, und diese formula $2aa + 4bb + (2c + 1)^2 + 2$ ist allezeit gleich einer andern $2AA + 4BB + (2C + 1)^2$, von welcher letztern Proposition aber die demonstratio rigorosa fehlt.

LETTRE CXV.

=

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Recherches ultérieures sur les nombres.

Berlin d. 4. Mai 1748.

Wenn der Satz wahr ist, dass $8m+3=2aa+bb$, so oft $8m+3$ ein numerus primus ist, so sehe ich nicht, dass auch immer seyn müsse $4n+3=2aa+bb+cc$, so oft $4n+3$ ein numerus primus ist; es wäre denn, dass man beweisen könnte, dass in diesem Fall immer wäre $4n+3=8m+3+4(2p+1)^2$. Vielleicht aber ist dieses sogar wahr, wenn auch $4n+3$ kein numerus primus ist. Zum wenigsten däucht mich, dass $8n+7=(8m+3)(2q+1)^2+4(2p+1)^2$, existente $8m+3$ numero primo. Wäre nun dieses wahr, so würden freylich alle numeri primi, und folglich alle Zahlen summae quatuor quadratorum seyn. Allein ich glaube kaum, dass sowohl bey diesem als bey

andern Fermatianischen theorematibus mit General-Formuln etwas auszurichten ist. Denn was das theorema anlangt, dass eine jegliche Zahl eine summa trium trigonalium sey, so ist solches nur von numeris integris zu verstehen, und würde daher sogar unmöglich seyn diesen Generalsatz

$$n=\frac{aa+a}{2}+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$$

zu beweisen, weil derselbe sogar in viel Fällen, nehmlich wenn $n=\frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{2}$, oder $\frac{5}{2}$ etc. falsch wäre. Denn wenn dieser Satz auch für gebrochene Werthe von n wahr wäre, so würde eine jegliche Zahl sogar eine summa trium quadratorum seyn können, indem $8n+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, und $8n+3$ alle Zahlen in sich begriffe. Also kann Ew. IX. Formul, kraft welcher eine jede Zahl seyn soll $=\frac{\square+\square+\square}{2}$, wofern kein Schreibfehler darin befindlich, nicht Statt finden; denn wenn quivis numerus $n=\frac{\square+\square+\square}{2}$, so würde quivis numerus par $2n=\square+\square+\square$, welches doch bey unendlich vielen, als 28, 60 etc. nicht angeht. Hingegen kommt mir die VIII. Formul $n=\square+\square+2\triangle$ sehr merkwürdig vor, von deren Wahrheit ich durch die Induction bin überführt worden, ungeacht ich nicht sehe, wie dieselbe aus dieser $n=\square+\square+\square+\square$, oder dieser $n=\triangle+\triangle+\triangle$ folget.

Die Formul $aa-a+bb-b+cc-c+dd-d+1$ ist generaliter, und also nicht allein in dem Fall da $a+b+c+d=1$, eine summa quatuor quadratorum; denn dieselbe ist $=$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2+\left(d-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Denn ungeacht diese quadrata fracta sind, so ist doch gewiss, omnem numerum, qui sit summa quatuor quadrator. fractorum, eundem in integris esse 4 quadratorum summam. Folgendes theorema kann auch dienen in vielen Fällen die quatuor quadrata selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammengesetzt ist: Si $m = aa + bb + cc + dd$ et $n = pp + qq + rr + ss$ erit $mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ existente

$$A = ap + bq + cr + ds$$
$$B = aq - bp - cs + dr$$
$$C = ar + bs - cp - dq$$
$$D = as - br + cq - dp.$$

Weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s sowohl affirmative als negative annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit einander combiniren oder ihre Ordnung verändern kann, so ist die resolutio producti mn auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.

Meines Erachtens ist also nicht leicht eine Demonstration von dergleichen Fermatianischen theorematibus zu erwarten, so lang man die numeros trigonales, tetragonales, pentagonales etc. durch die gewöhnlichen Generalformuln ausdrückt, weil in denselben auch die numeri fracti mit begriffen sind, welche doch in den meisten theorematibus ausgeschlossen werden. Ich habe mir zu diesem Ende die Sach folgendergestalt vorgestellt:

Es sey $s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \text{etc.}$, wo keine andere potestates ipsius x vorkommen, als deren exponentes sind $= \triangle$. Wenn man nun das quadratum dieser seriei nimmt, so wird $ss =$ einer seriei, in der keine andere potestates ipsius x vorkommen, als deren exponentes sind $= \triangle + \triangle$, und s^3 wird gleich einer seriei, da der Potestäten ipsius x Exponenten sind $= \triangle + \triangle + \triangle$. Wenn man nun beweisen könnte, dass in der serie s^3 alle pote-

states ipsius x vorkommen, so wäre dieses ein Beweis omnem numerum integrum esse summam trium trigonalium. Diese series lassen sich aber leicht generaliter bestimmen; denn es sey

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + \text{etc.}$$

so sind die valores dieser Coëfficienten für die verschiedenen valores von n, wie folgt:

	1.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.	K.	L.	M.	N.	O.	P.	Q.	R.	S.	T.	U.	V.	W.	X.	Y.	Z.	α.	β.	γ.	δ.	ε.
Si $n=1$. Dazu addire eben die series, wie zu sehen:	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
		1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
				1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
							1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
											1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
																	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1
																							1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
Si $n=2$. Dazu addire eben die series, wie zu sehen:	1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2	2	0	2			
		1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2	2	0			
				1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4	2	0	2			
							1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0	2	0	1	4			
											1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1	2	0	2	4	0			
																	1	2	1	2	2	0	3	2	0	2	2	2	1			
																							1	2	1	2	2	0	3			
Si $n=3$	1	3	3	4	6	3	6	9	3	7	9	6	9	9	6	6	15	9	7	12	3	15	15	6	12	12	9	12	etc.		

Wenn man also zeigen könnte, dass in dieser serie pro $n = 3$ kein terminus $= 0$, so wäre bewiesen, dass eine jede ganze Zahl eine summa trium trigonalium ist. Gleich wie man aus der serie $n = 2$ siehet, da viel termini $= 0$, dass viel Zahlen auch nicht summae duorum trigonalium sind, nehmlich 5, 8, 14, 17, 19, 23, 26, etc.

Auf gleiche Weise kann auch die Composition numerorum ex quadratis vorgestellt werden; denn ich setze zu diesem Ende

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + x^{49} + \text{etc.}$$

und

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{etc.}$$

Hier werden nun die coëfficientes singularum potestatum ipsius x pro valoribus ipsius n successive folgendergestalt gefunden:

Exponentes ipsius x......	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	etc.
Coëfficientes casu $n=1$	1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	1.	etc.
dazu addire		1.	1	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	
					1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	
										1.	1.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	
																	1.	
Coëfficientes casu $n=2$	1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	2.	0.	0.	2.	
		1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	2.	0.	0.	
					1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	1.	2.	2.	0.	0.	
										1.	2.	1.	0.	2.	2.	0.	0.	
																	1.	
Coëfficientes casu $n=3$	1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	6.	6.	0.	3.	
		1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	6.	6.	0.	
					1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	3.	6.	6.	3.	1.	
										1.	3.	3.	1.	3.	6.	3.	0.	
																	1.	
	1.	4.	6.	4.	5.	12.	12.	4.	6.	16.	18.	12.	8.	16.	24.	12.	5.	

Hier kommen in der serie für $n=2$ noch häufig 0 vor, als bey 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, welches ein Zeichen ist, dass diese Zahlen nicht sind $\square + \square$. In der serie $n=3$ findet

sich die 0 bey den Zahlen 7, 15, dahero diese Zahlen nicht summae trium $\square$ sind, in der serie $n=4$ aber kommt keine 0 mehr vor. Dahero müsste nur dieses bewiesen werden können.

Auf beyliegendem Zettel habe ich die verba Fermatii über seine demonstrationes theorematum copirt, woraus man ungefähr merken kann, aus was für Gründen dieselben hergeleitet waren, und eben deswegen ist der Verlust derselben meines Erachtens um so viel mehr zu bedauern.

Hier gehet das Gerücht, dass von der Akademie zu Paris für dieses Jahr der ganze Preis mir zuerkannt worden, worüber vielleicht morgen die Nachricht selbst erhalten werde.

Euler.

(Billet annexé:)

Fermatius in Observationibus ad Diophantum. Imo propositionem generalem et pulcherrimam nos primi deteximus, nempe omnem numerum (integrum) vel esse triangularem, vel ex 2 vel 3 triangularibus compositum: Item vel esse quadratum vel ex 2, vel 3, vel 4 quadratis compositum; item esse vel pentagonum, vel ex 2, vel 3, vel 4, vel 5 pentagonis compositum, et sic in infinitum. Hujus autem propositionis demonstrationem, quae ex multis, variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet. Opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus et Arithmeticen hac in parte ultra veteres ac notos terminos mirum in modum promovere.

LETTRE CXVI.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 8. Juni 1748.

Ich bin noch gänzlich der Meinung, dass nicht nur $4n+3$, sondern auch $4n+1$ und folglich ein jeder numerus impar zu dieser Formul gebracht werden kann: $2aa+bb+cc$, welches auch in der That eben so viel ist, als die sub N. II von mir angeführte Formul $\square+2\square+2\triangle$, so dass, wenn Ew. an dieser letztern, wie ich sehe, nicht zweifeln, auch die aequatio $2n+1=2aa+4bb+cc$ gewiss ist. Hingegen kann die sub N. VIII aus Versehen gesetzte $\frac{\square+\square+\square}{2}$ nicht Statt haben, als an deren Stelle es heissen muss $2\square+\triangle+\triangle$, oder auch $\frac{\square+\square}{2}+\triangle$. Ausser diesem ist aber in meiner Copie von der Tabelle der Formeln noch ein lächerlicher Fehler, so sich vermuthlich auch im Original finden wird,

indem sub N. I et N. IV eben dieselbe Formul $2\square+\square+\triangle$ stehet. Was diese: $\square+\square+2\triangle$, welche Ew. für merkwürdig halten, betrifft, so fliesset dieselbe alsofort aus der Consideration, dass ein jeder $4n+1$ eine summa duor. quadr. parium et unius imparis ist, gleich wie im Gegentheil $4n+2$ aus duobus imparibus et uno pari bestehet.

Ohngeachtet ich mir zur Demonstration des theorematis Fermatiani wenige Hoffnung mache, so habe dennoch nach Anleitung desselben einige andere gefunden, die ich für eben so wahr halte, als z. Ex.

> Omne quadratum numeri imparis vel numeri impariter paris, modo sit minus quam $8n+7$, est unum ex quatuor quadratis, quorum summa est $8n+7$. Imgleichen: Omnis numerus $8n+2$ est hujus formae $(2\pm 2)^{2e}+\square+\square$.

Die hiebeyliegende Demonstration von Ew. theoremate de quadratis laterum trapezii*) will ich eben nicht für die kürzeste ausgeben, ich glaube aber, dass man gar leicht auf noch viel weitläufigere verfallen kann. Die Gelegenheit dazu hat neulich ein guter Freund gegeben, welcher mir sagte, dass er einen casum particularem davon, nehmlich in einem trapezio, wo duo anguli recti und duo latera parallela sind, demonstriren könnte.

Dass Ew. das ganze praemium von der Acad. royale des sc. erhalten haben, ist mir eine sehr angenehme Nachricht gewesen. Ich gratulire Deroselben dazu von Herzen, und meine Hoffnung, dass Sie bey allen künftigen Aufgaben nicht weniger réussiren werden, wird immer grösser.

Goldbach.

---

*) Cette démonstration ne s'est pas trouvée.

LETTRE CXVII.

Euler à Goldbach

Sommaire. Suite sur les propriétés des nombres. Conditions de rationalité de certaines formules irrationelles. Démonstration du théorème de géométrie précédent. Oechliz, Solution du problème de la courbe catoptrique.

Berlin d. 25. Juni 1748.

— — — Nun bin ich endlich auf den Grund der mir neulich von Ew. überschriebenen schönen Formuln gekommen, wobey ich das in der Abschrift derselben begangene geringe Versehen sogleich eingesehen. Dieselben gründen sich meines Erachtens auf folgende drey Hauptformuln I. $n = \triangle + \triangle + \triangle$; II. $4n+1 = \square + \square + \square$ und III. $4n+2 = \square + \square + \square$, von deren Wahrheit ich schon längst völlig versichert bin, ungeacht ich davon keine Demonstration angeben kann.

Aus der ersten, $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget $n = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$. Nun sey $a = d+e$ und $b = d-e$, so wird

$n = dd + d + ee + \frac{cc+c}{2}$, folglich ist auch eine jegliche Zahl $n = \square + 2\triangle + \triangle$, woraus zugleich erhellet, dass immer $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$.

Aus der zweyten, $4n+1 = \square + \square + \square$, folget $4n+1 = 4aa + 4bb + (2c+1)^2$, also $n = aa + bb + cc + c$, und dahero $n = \square + \square + 2\triangle$.

Ferner, da eine jede ganze Zahl $= aa + bb + cc + c$, so ist auch eine jede gerade Zahl $2n = aa + bb + cc + c$, und also $n = \frac{aa+bb}{2} + \frac{cc+c}{2} = \frac{\square+\square}{2} + \triangle$. Oder man setze $a = d+e$ und $b = d-e$, so wird $n = dd + ee + \frac{cc+c}{2} = \square + \square + \triangle$.

Ebenfalls wird auch eine jede ungerade Zahl seyn $2n+1 = aa + bb + cc + c$, da nun $cc + c$ immer grad ist, so muss von den Zahlen a und b die eine grad, die andere ungrad seyn, dahero $2n+1 = 4aa + (2b+1)^2 + cc + c$ und also $n = 2aa + 2bb + 2b + \frac{cc+c}{2}$, folglich $n = 2\square + 4\triangle + \triangle$.

Die dritte Formul $4n+2 = \square + \square + \square$ gibt $4n+2 = 4aa + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$ also ist $n = aa + bb + b + cc + c$, und dahero $n = \square + 2\triangle + 2\triangle$. Setzt man $b = d+e$, $c = d-e$, so wird

$$n = aa + 2dd + 2d + 2ee = \square + 2\square + 4\triangle.$$

Ferner ist auch $2n = \square + 2\triangle + 2\triangle$ und also $\square$ grad, dahero wird $2n = 4aa + bb + b + cc + c$ und

$$n = 2aa + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2} = 2\square + \triangle + \triangle.$$

Weil weiter $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$, so ist $n = 2\square + \square + 2\triangle$, folglich auch $2n = 2\square + 4\square + 2\triangle$ und also $n = \square + 2\square + \triangle$.

Oder da auch $2n+1=2aa+(2b+1)^2+cc+c$, so wird $n=aa+2bb+2b+\frac{cc+c}{2}=\square+4\triangle+\triangle$. Endlich ist auch

$2n+1=\square+2\triangle+2\triangle=(2a+1)^2+bb+b+cc+c$, und $n=2aa+2a+\frac{bb+b}{2}+\frac{cc+c}{2}$, oder $n=4\triangle+\triangle+\triangle$ $=\square+2\triangle+4\triangle$.

Also ist auch $2n=4\square+2\triangle+4\triangle$ oder $n=2\square+\triangle+2\triangle$, oder $2n+1=(2a+1)^2+2\triangle+4\triangle$ und also $n=\triangle+2\triangle+4\triangle$.

Da $4n+2=4aa+(2b+1)^2+(2c+1)^2$, so ist $2n+1=2aa+2bb+2b+2cc+2c+1$. Es sey $b=d+e$, $c=d-e$, so wird $2n+1=2aa+4dd+4ee+4d+1$ $=2\square+\square+\square$. Also ist ein jeglicher numerus impar $2n+1=2\square+\square+\square$, welches Ew. erstes, meines Erachtens sehr merkwürdiges theorema war. Alle diese hier gefundene Formuln sind also folgende

I. $n=\triangle+\triangle+\triangle$;	VIII. $n=2\square+\square+2\triangle$;
II. $n=\square+2\triangle+\triangle$;	IX. $n=\square+2\square+\triangle$;
III. $n=\square+\square+2\triangle$;	X. $n=2\square+\triangle+\triangle$;
IV. $n=\square+\square+\triangle$;	XI. $n=\square+4\triangle+\triangle$;
V. $n=2\square+\triangle+4\triangle$;	XII. $n=4\triangle+\triangle+\triangle$;
VI. $n=\square+2\triangle+2\triangle$;	XIII. $n=2\square+\triangle+2\triangle$;
VII. $n=\square+2\square+4\triangle$;	XIV. $n=\triangle+2\triangle+4\triangle$;

XV. $2n+1=\square+\square+2\square$.

Da sowohl $8n+3$ als $8n+6$ allzeit in 3 quadrata zertheilt werden kann, so folgt, dass $8n+7-pp$, wenn $pp=8m+4$ oder $=8m+1$, d. i. wenn p entweder ein numerus impar oder impariter par ist, allzeit eine summa trium quadratorum sey, wie Ew. gemeldet haben.

Dass aber omnis numerus $8n+2$ in dieser Form $(2\pm2)^{2e}+\square+\square$ enthalten sey, kann ich nicht recht begreifen. Sollte der Sinn davon dieser seyn, dass allzeit $8n+2=\square+\square+q$, da q ist entweder 0, oder 16 oder 256, oder 4096 etc., welches die Werthe sind von $(2+2)^{2e}$, so würde solches in dem Fall $8n+2=154$ nicht Statt finden, indem $154-q$ immer eine summa duor. quadr. wird; es wäre denn, dass der exponens e auch 0 seyn könnte und folglich auch $q=1$; ob ich gleich zweifle, ob auch in diesem Fall sich keine Ausnahme finden sollte.

Ich bin neulich auf eine sonderbare Betrachtung gefallen, vermittelst welcher viel Diophanteische problemata sehr leicht können solvirt werden. Wenn man z. Ex. für x, y, z numeros rationales bestimmen kann, dass dieser Aequation

$$xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$$

satisfacirt wird, so müssen alle surdische (*sic!*) Formuln, in nachfolgenden Aequationen, so aus jener entstehen, rational werden,

$$\begin{aligned}
x&=1\pm\sqrt{(2y+2z-yy-zz)};\\
y&=1\pm\sqrt{(2x+2z-xx-zz)};\\
z&=1\pm\sqrt{(2x+2y-xx-yy)};\\
x+y&=1\pm\sqrt{(2z-zz+2xy)};\\
x+z&=1\pm\sqrt{(2y-yy+2xz)};\\
y+z&=1\pm\sqrt{(2x-xx+2yz)};\\
x-y&=1\pm\sqrt{(2z+4y-2xy-zz)};\\
y-x&=1\pm\sqrt{(2z+4x-2xy-zz)};\\
x-z&=1\pm\sqrt{(2y+4z-2xz-yy)};\\
z-x&=1\pm\sqrt{(2y+4x-2xz-yy)};\\
y-z&=1\pm\sqrt{(2x+4z-2yz-xx)};\\
z-y&=1\pm\sqrt{(2x+4y-2yz-xx)};\\
x+y+z&=1\pm\sqrt{(2xy+2xz+2yz)}.
\end{aligned}$$

Wenn also nur eine von diesen Formuln rational gemacht wird, welches sehr leicht ist, so werden alle übrige 12 von selbsten rational; solches geschieht also nach der ersten, wenn

$$x = \frac{pp+qq+rr+2pr+2qr}{pp+qq+rr}, \quad y = \frac{2p(p+q)}{pp+qq+rr}, \quad z = \frac{2q(p+q)}{pp+qq+rr}.$$

Wenn also drey solche Zahlen gesucht werden sollten, dass alle obigen XIII surdischen Formuln rational werden, welches problema nach der gewöhnlichen Art beynahe unmöglich seyn würde, so können doch hieraus leicht unendlich viel Solutionen angegeben werden. Als, wenn $p=1$, $q=2$, $r=2$, so wird $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{4}{3}$.

Meine Demonstration des vorher gemeldten theorematis verhält sich so: Sit (Fig. 29) propositum trapezium $ABCD$ cum diagoniis AC, BD. Compleatur 1$^{\text{mo}}$ parallelogrammum $ABED$, cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parallelogr. $ACEF$ cum diag. CF, ductisque BF, DF, erit quoque $BCDF$ parallelogr. Jam cum in omni parallelogrammo sit summa quadr. diagon. = summae quadr. laterum, ex $\square ACEF$ erit $AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2$

ex $\square BCDF$ erit $BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2$

ergo

$$2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2.$$

Porro $\square ABED$ dat $AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2$, quae aequatio ad priorem addita dat

$$2AC^2+2CE^2+BD^2 = 2AB^2+2BC^2+2CD^2+2AD^2-BD^2$$

adde

$$BD^2 = \qquad\qquad BD^2$$

et divide per 2, fiet

$$AC^2 + CE^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

At quia AE uti et BD bisecta est in G, bisecetur quoque

AC in H, et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2 = 4GH^2$, quo substituto erit $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2 = AC^2+BD^2+4GH^2$, Q. E. D.

Wenn man, wie gemeiniglich in der Geometrie zu geschehen pflegt, eine demonstrationem more veterum verlangt, so verdienet diese einen grossen Vorzug vor derjenigen, welche Ew. mir zu überschreiben die Güte gehabt. Will man aber nur von der Wahrheit, worauf doch die Hauptsach ankommt, überzeugt seyn, so würde meine Demonstration allen Vorzug verlieren, weil ich darin die angeführte Eigenschaft der parallelogrammorum voraussetze, deren Ew. nicht nur nicht nöthig haben, sondern dieselbe auch zugleich mit beweisen.

Hr. Oechliz aus Leipzig, welcher nach St. Petersburg zur mathesi sublimiori berufen worden, die Vocation aber ausgeschlagen, hat eine sehr schöne Solution des schon längst erwähnten problematis catoptrici erfunden, welche Ew. unfehlbar gefallen wird.

Es sey (Fig. 30) MN eine von den gesuchten curvis, welche alle radios ex puncto fixo C emissos post geminam reflexionem in M et N factam in idem punctum C remittat. Man verlängere MN beiderseits in E et F, so dass $ME = CM$ et $NF = CN$, so wird die longitudo EF constans seyn und die Puncte E und F werden in einer solchen krummen Linie EIF seyn, dass die grade Linie EF beiderseits auf dieselbe perpendiculär fällt. Die ganze Sache kommt also darauf an, dass man solche krumme Linien EIF finde, dass die auf ein jegliches Punct derselben gezogenen Perpendicular-Linien EF dieselbe krumme Linie nochmal in F ad angulos rectos durchschneiden. Denn diese Eigenschaft schliesst jene schon in sich, dass die quantitas lineae hujus EF constans seyn müsse. Man sieht nun alsbald, dass die Linie EIF ein Circul seyn könne, dessen diameter $= EF$; es gibt aber noch unendlich viel andere krumme Linien, welche diese Eigenschaft mit dem Circul gemein haben, wie ich bald zeigen werde.

Hat man aber eine solche krumme Linie EIF gefunden, so kann daraus sehr leicht die gesuchte krumme Linie MN gefunden werden, und das auf unendlich vielerley Art. Denn man kann das punctum radians C nach Belieben annehmen, und wenn man daraus ad terminos lineae EF die graden Linien CE und CF zieht, dieselben in G und H in zwey gleiche Theile schneidet, aus den Puncten G und H auf dieselben die Perpendicular-Linien GM und HN aufrichtet, bis solche der EF begegnen, so sind nicht nur die Puncte M und N in der gesuchten Linie MN, sondern GM und HN sind auch tangentes derselben. Nimmt man für EIF ein Circul an, diametri EF, so wird MN eine ellipsis, deren foci sind das punctum radians C und das centrum circuli EIF.

Um aber alle mögliche krumme Linien EAF (Fig. 31) zu finden, welche von ihren normalibus ERF nochmal in F normaliter durchschnitten werden, so setze ich die abscissas $AP = x$, $AQ = X$, die applicatas $PE = y$, $QF = -Y$, (weil diese ad partes oppositas axis fällt). So ist die subnormalis $PR = \frac{y\,dy}{dx}$ und die subnormalis $QR = \frac{-Y\,dY}{dX}$. Da nun $PE : PR = QF : QR$, so wird $y : \frac{y\,dy}{dx} = -Y : \frac{-Y\,dY}{dx}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$. Jetzt setze ich $dx = p\,dy$, so wird auch $dX = p\,dY$ und $PR = \frac{y}{p}$, $QR = \frac{-Y}{p}$; also $PQ = \frac{y-Y}{p} =$

$X - x$. Diese Aequation differentiiret gibt

$$\frac{dy - dY}{p} - \frac{(y-Y)\,dp}{pp} = dX - dx = p(dY - dy),$$

oder

$$(dy - dY)\left(\frac{1+pp}{p}\right) = \frac{(y-Y)\,dp}{pp},$$

das ist

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p(1+pp)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1+pp}.$$

Dahero ist $l(y-Y) = l\,2a + lp - l\sqrt{(1+pp)}$, oder $y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, und folglich $X - x = \frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}} = PQ$. Da nun $PE + QF = y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, so wird $EF^2 = PQ^2 + (PE+QF)^2 = 4aa$, und also $EF = 2a$, dahero constans.

Da $y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, so setze ich $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ und $Y = P - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, wo P eine functionem rationalem quamcunque ipsius p bedeuten mag, denn solchergestalt wird die conditio continuitatis erfüllt, weil die Formul $P \pm \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ wegen des Radicalzeichens von Natur ambigua ist, und also auf beide Puncte E und F zugleich geht. Weil nun $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$, so ist $dy = dP + \frac{a\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und also

$$dx = p\,dy = p\,dP + \frac{ap\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das integrale ist $x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$. Wenn demnach für P eine functio quaecunque rationalis von p angenommen wird, so hat man pro curva AE diese Formuln

$$AP = x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}, \quad PE = y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

aus welchen zugleich die coordinatae pro puncto altero respondente F gefunden werden, wenn man nur das signum des radicalis $\sqrt{(1+pp)}$ verwandelt. Will man curvas algebraicas haben, so darf man für P nur eine solche functionem ipsius p annehmen, dass $\int p\,dP$ integrabel wird. Zum Ex. setze man $P=2bp$, so wird

$$x=2b\int p\,dp-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}=bpp-\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}+a$$

und $y=2bp+\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Erstere gibt

$$px=bp^3+ap-\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}},$$

welche zu jener addirt gibt $y+px=bp^3+(a+2b)p$. Wenn nun aus diesen zwey Aequationen der Buchstab p eliminirt wird, so erhält man die Aequation zwischen x und y. Zur Construction sind aber obige Formuln bequemer, weil in diesem Exempel seyn wird $AR=bpp+a+2b$, $PQ=\frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PR=2b+\frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, $PE+QF=\frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Man kann aber auch in genere eine sehr leichte Construction geben, welche alle mögliche curvas, so diese Eigenschaft haben, in sich begreift, sie seyen algebraisch oder transcendentes.

Euler.

LETTRE CXVIII.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente.

St. Petersburg d. 15. Juli 1748.

Ew. danke ich dienstlich für die viele Mühe, welche Sie über sich nehmen wollen, damit mir die verlangte Beschreibung der Sonnenfinsterniss zu rechter Zeit übersandt werden möchte, und will hoffen, dass selbige noch intra terminum allhie eintreffen werde. Ich würde aber auf Dero geehrtes letzteres Schreiben so zeitig noch nicht geantwortet haben, wenn ich nicht die von mir angeführte, aber mit $(2\pm 2)^{2e}$ übel exprimirte Formul je eher je lieber zu corrigiren nöthig gefunden hätte, denn es ist

$$8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\square+\square,$$

allwo e allezeit einen numerum integrum affirmativum bedeutet, oder auch $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\square+\square$, gleichwie $8n+1=(1\pm1)^{2e}+(1\pm1)^{2f}+\square$, allwo e und f integros affirmativos bedeuten; es ist auch sehr wahrscheinlich, dass sogar $4n+1=(1\pm1)^{2e+1}+\square+\square$. Insonderheit aber halte ich für merkwürdig, dass in dieser aequatione

$$4n+3=2aa+4bb+cc+2=2AA+4BB+CC,$$

allwo a ein numerus par und A impar ist, a in quocunque casu numeri n so angenommen werden kann, dass A gleich sey $a+1$. In dem casu, wo $a=0$, ist solches offenbar, in den übrigen casibus aber fehlet es more solito an der Demonstration, jedoch ist wohl zu verstehen, dass, wie gesagt, der valor a also angenommen werden kann und nicht nothwendig also beschaffen ist, als z. Ex. wenn $n=19$ und $4n+3=79$, so kann a zwey valores haben, nehmlich 4 und 6. Nicht der andere, sondern der erste ist hier applicable, damit die aequationes

$$4.19+3=2.4^2+6^2+3^2+2=2(4+1)^2+2^2+5^2$$

Statt finden und $A=a+1=4+1$ werde.

Meine vorige formulas habe ich auf folgende Art herausgebracht, so in der That mit Ew. Methode übereinstimmet: Wenn man annimmt

1.) $4aa+2bb+4cc+4c+1=2n+1$,

so wird

2.) $n=2aa+bb+2cc+2c=2\square+\square+4\triangle$.

Es sey n ein numerus par $=2m$, so muss auch b ein numerus par $=2d$ seyn, ergo

3.) $m=aa+2dd+cc+c=2\square+\square+2\triangle$.

Es sey $m=2p$, so muss auch $a=2e$ seyn, ergo

4.) $p=2ee+dd+\frac{cc+c}{2}=2\square+\square+\triangle$.

Sit in formula 2.) $n=2m+1$, erit $b=2d+1$, ergo

5.) $m=aa+2dd+2d+cc+c=\square+4\triangle+2\triangle$.

Sit $m=2p$, erit $a=2e$, ergo

6.) $p=2ee+dd+d+\frac{cc+c}{2}=2\square+2\triangle+\triangle$.

Sit in formula 4.) $m=2p+1$, erit $a=2e+1$, ergo

7.) $p=2ee+2e+dd+d+\frac{cc+c}{2}=4\triangle+2\triangle+\triangle$.

Si in formula 3.) $m=2p+1$, erit $a=2e+1$, ergo

8.) $p=2ee+2e+dd+\frac{cc+c}{2}=4\triangle+\square+\triangle$. etc.

Das Präsent, welches mir Ew. von Dero Introductione in analysin infinitorum machen, wird mir überaus angenehm seyn; ich hatte gar nicht gewusst, oder wenigstens gänzlich vergessen, dass Sie dergleichen Buch geschrieben, welches nunmehro vermuthlich in den gelehrten Zeitungen bald recensirt werden wird. Bey dieser Gelegenheit möchte ich wissen, ob Ew. Scientia navalis schon gedruckt worden? item, was Sie von einer Abhandlung ejusdem argumenti, so M. Bouguer herausgegeben, halten? item, möchte gern benachrichtigt seyn, ob der in Ew. Antworten auf die Fragen von den Cometen erwähnte neuentdeckte Planet sich in seiner Possession mainteniret und durch fernere Observationen bestätiget worden? item, ob der Comet von A. 1742 in dem Lauf des Mercurii einige Alteration verursacht?

Was die Aequation $xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$ betrifft, so wird selbige positis $x-1=A$, $y-1=B$, $z-1=C$, in diese $AA+BB+CC=2$ verwandelt, woraus alsofort offenbar ist, dass posito $A=\sqrt{(2-BB-CC)}$ rationali, auch $-BB=AA+CC-2$, oder $B=\sqrt{(2-AA-CC)}$ oder $C=\sqrt{(2-AA-BB)}$ rationales seyn müssen.

Vor Dero mir communicirte Solution des problematis von den diagonalibus trapezii sage ich schuldigsten Dank, und observire hiebey annoch, dass wenn von den quatuor lateribus (Fig. 29) AB, BC, CD, DA eines durch einen numerum impariter parem, und die drey übrigen durch numeros impares exprimiret werden, alsdann die drey quadrata $AC^2 + BD^2 + 4GH^2$ unmöglich aus numeris integris bestehen können.

Die Solution des problematis catoptrici durch Hülfe einer curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans sey, ist allerdings sehr schön. Ich habe dabey angemerket, dass in der formula $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ in casu $y =$ applicatae maximae, allezeit seyn müsse $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$, hingegen kann ich mir nicht recht vorstellen, wie die curva aussehen müsse, wenn man (Fig. 32) das spatium EM a vertice E usque ad applicatam maximam MP interceptum ganz klein, als $\frac{a}{1000}$ annimmt, und schliesse daraus, dass eben dieses spatium EM gewisse limites haben werde.

Goldbach.

LETTRE CXIX.

Euler à Goldbach.

Sommaire Accord des tables lunaires d'Euler avec l'observation de l'éclipse du soleil. Examen du théorème numérique de Goldbach. Introduction à l'analyse des infinis et Science navale. Action de la comète de 1744 sur le cours de Mercure. Observations sur le quadrilatère et la courbe catoptrique.

Berlin d. 6. August 1748.

Nachdem uns allnier der Himmel ziemlich günstig gewesen, um neulich die Sonnenfinsterniss sehr genau zu beobachten, so habe ich Ursach mit meinen neuen tabulis lunaribus vollkommen zufrieden zu seyn. Denn sowohl der Anfang als das Ende hat näher als auf eine Minute mit meiner Rechnung übereingetroffen, indem der Anfang nur 15″ und das Ende 30″ später bemerket worden, als ich angesetzet hatte. Insonderheit aber war diese Finsterniss würklich annularis, wie ich gefunden hatte, ungeacht nicht nur die andern tabulae, welche doch für die besten gehalten werden, keinen annulum anzeigten, sondern auch einige HH. Pariser astronomi meine Rechnung durch einige bey den tabulis angebrachte vermeinte correctiones widerlegen und behaupten wollen, dass diese Finsterniss allhier nur partialis seyn würde. Die nach den übrigen tabulis lunaribus angestellten Rechnungen haben sowohl im Anfang als Ende um 2, 3 ja bis auf 10 Minuten gefehlt. Uebermorgen werde ich sehen, wie genau meine Rechnung bey der Mondfinsterniss eintreffen wird.

Was die Formul $8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\square+\square$ betrifft, so kann ich zwar keinen casum in contrarium entdecken, ich sehe aber doch die Wahrheit davon nicht ein. Hingegen kann ich diese Formul $8n+1=(1\pm 1)^{2e}+(1\pm 1)^{2f}+\square$ nicht zugeben, wofern dieselbe so viel anzeigen soll, dass eine jede Zahl von dieser Form $8n+1$ allzeit in drey dergleichen quadrata zertheilet werden könne, wovon zwey zugleich potestates binarii seyen, *cyphra non exclusa*. Denn wenn $8n+1=217$, so findet diese Formul nicht Statt.

Wenn es gewiss, dass $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\square+\square$, so folget von selbsten, dass $4n+1=(1\pm 1)^{2e+1}+\square+\square$, wenn man nur jene durch 2 dividirt, weil $\frac{\square+\square}{2}=\square+\square$. An der Wahrheit dieser gedoppelten Formul $4n+3=2aa+4bb+cc+2=2AA+4BB+CC$ und dass allzeit seyn könne $A=a+1$, finde ich keine Ursach zu zweifeln; ich kann aber eben so wenig den Grund davon einsehen. Indessen sind solche Sätze, welche durch kein Exempel refutirt werden können, freylich um so viel mehr merkwürdig.

Für die gütige Communication der Demonstrationen der mir letzt überschriebenen schönen Eigenschaften der Zahlen sage ich allerschuldigsten Dank, und es freut mich nicht wenig, dass die selbenmit denen, so ich herausgebracht, so schön übereinstimmen.

Die Introductio in analysin infinitorum, welche mir die Ehre gegeben Ew. zu praesentiren, ist schon seit drey Jahren unter der Press gewesen und anjetzo wird von Mr. Bousquet meine Abhandlung vom Calculo differentiali gedruckt.

Weil die Kaiserl. Akademie der Wissenschaften ihren Anspruch auf meine Scientiam navalem erneuert, so habe ich letztens das ganze Werk an des Herrn Präsidenten Exc. überschicket und ersuche Ew. bey Gelegenheit etwan den Druck derselben durch Vorstellungen bey dem Hn. Schumacher gütigst beschleunigen zu helfen; insonderheit da in des Hn. Bouguer's Werk von dieser Materie schon ziemlich viel enthalten, was ich darüber herausgebracht habe, und da meine principia, worauf die ganze Sache beruhet, je länger je mehr bekannt werden, so befürchte ich, dass gar Alles anderwärts herauskommen möchte, wenn der Druck meines Werks nicht bald zu Stande kommt. Von dem erwähnten neuen Planeten, welcher alle 4 Jahre seinen Lauf vollenden soll, ist nicht nur nichts Neues entdeckt worden, sondern ich bin versichert, dass der Auctor desselben nicht genugsam in der theoria planetarum et cometarum erfahren gewesen, dass er aus den Observationen einen solchen Schluss hätte machen können.

Nachdem ich den locum Mercurii auf die Zeit des Cometen A. 1744 genauer berechnet, so habe gefunden, dass derselbe dem Cometen nicht so nahe gewesen, als ich anfänglich gemeinet hatte, und dass folglich in seinem Lauf keine Alteration hat entstehen können.

Wenn die 4 latera trapezii also durch Zahlen ausgedruckt werden, dass eines ein numerus impariter par, die drey übrigen aber numeri impares sind, so wird die summa quadratorum laterum eine solche Zahl $8n+7$, und kann folglich rationaliter nicht in drey quadrata resolvirt werden.

Ew. dubium gegen die figuram curvae, deren normalis curvam secans allenthalben constans ist, kann ich nicht genug einsehen. Es sey (Fig. 31) EAF eine solche curva, wo die recta utrinque normalis $EF = 2a$, die abscissa $AP = x$, die applicata $PE = y$, und P eine functio rationalis von p, so habe gefunden, dass $x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, und $y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hieraus wird $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}$ und folglich die applicata y maxima, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$, d. i. wenn $p = \infty$. Nun kann aber für P eine solche functio von p angenommen werden, dass in diesem Fall eben nicht wird $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$, oder $P = 0$, weil $p = \infty$. Hingegen wird die applicata maxima seyn $= P + a$, wenn in P gesetzt wird $p = \infty$, und die abscissa wird $x = \int p\,dP$.

Euler.

LETTRE CXX.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Réponse à la lettre précédente. Deux théorèmes de nombres.

St. Petersburg d. 7. September 1748.

Die in Charten vorgestellte Sonnenfinsterniss und die dazu gehörige gedruckte Beschreibung sind mir Tages zuvor und also noch zu rechter Zeit eingehändigt worden, vor deren Uebersendung ich Ew. schuldigsten Dank sage, wie ich denn Deroselben zugleich zu der genauen Uebereinstimmung dieser Sonnenfinsterniss mit Dero tabulis astronomicis von Herzen gratulire und ein Gleiches von der letztverwichenen Mondfinsterniss zu erfahren hoffe. Ich habe auch nicht unterlassen gehörigen Ortes die verlangte Erinnerung wegen der Scientiae navalis zu thun, und zuverlässig vernommen, dass man, wie mir schon vorhero bekannt war, und Ew. ohne Zweifel bereits von Andern werden erfahren haben, mit dem Druck dieses Werkes eifrigst fortfährt.

Die für $8n+1$ angegebene Formul ist allerdings unrichtig; ich habe aber bey Gelegenheit des theorematis Fermatiani noch bemerket, dass gleichwie ein jedes quadratum impar, oder radicis impariter paris, dummodo minus sit quam $8m+7$, diese Eigenschaft hat, dass es eines von den vier quadratis ist, deren aggregatum $= 8m+7$; also auch ein jedes quadratum impar, oder radicis pariter paris, dummodo sit minus quam $8m+3$, diese Eigenschaft hat, dass es eines von den vier quadratis ist, deren summa $= 8m+3$. Weil nun 0 unter die quadrata pariter paria mit gerechnet werden kann, so geschiehet es gleichsam per accidens, dass alle numeri $8m+3$ auch aus drey quadratis imparibus allein bestehen können. Wenn man ein quadratum par durch $\square$, und ein quadratum impar durch $\boxdot$, ein quadratum ambiguum aber, so diverso respectu par oder impar seyn kann, durch $\boxminus$ oder $\boxminus$ andeutet, so lässet sich dieses alles durch folgende Formul exprimiren

$$4\boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8m+5 \pm 2,$$

allwo vor $\boxminus$, in casu signi superioris $+$, ein quadratum impar, in casu signi inferioris $-$ aber ein quadratum par zu verstehen ist.

Ich habe auch observiret, dass wenn man setzet

$$2(2a+1)^2 + 4bb + (2c-1)^2 = 4n-1$$

und $8n-6 = 2(2A+1)^2 + 4BB + 4CC$, posito pro n numero eodem integro positivo, alsdann allezeit genommen werden könne $B=b$. Es sey z. Ex. $n=29$, so kann beiden Aequationen ein Genüge geschehen, wenn man setzet $B=b=4$, denn es wird $2.1+4.16+49=115$ und $2.49+4.16+4.16=226$.

Was die curvas, deren normalis curvam secans allenthalben constans ist, anlangt, so bin ich der Meinung, dass

wenn in denselben ein axis curvam in duas partes similes et aequales dividens $=2a$ angenommen wird, die applicata maxima nicht anders als $=a$ seyn könne, und dieses aus folgender Ursache: Sit (Fig. 33) axis $AB=2a$; sit normalis in axem incidens $ER=a-u$, erit normalis ab axe reflexa RF sub eodem angulo $(FRB=ERA)=a+u$. Cum igitur in casu, quo normalis fit perpendicularis ad axem, quantitas variabilis u fiat $=0$, adeoque ipsa normalis $=a$, applicata vero maxima nihil aliud sit nisi normalis ad axem perpendicularis, sequitur applicatam maximam in omnibus istis curvis esse $=a$. Dahero sehe ich nicht, wie die applicata maxima $=a+P$ seyn könne, ohne dass $P=0$ sey.

Goldbach.

LETTRE CXXI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Eclipses du soleil et de la lune. Travaux dioptriques d'Euler.

Berlin d. 12. October 1748.

Die letzte Sonnenfinsterniss ist zwar mit meinen neuen tabulis lunaribus genauer übereingekommen, als mit allen andern und auch denjenigen, welche für die richtigsten gehalten werden, es fand sich aber doch ein geringer Unterschied von ungefähr einer Minute in der Zeit, und der annulus dauerte nicht so lang, als ich nach meiner Rechnung gefunden hatte. Der erstere Fehler kommt theils von der noch nicht genugsam genau bestimmten differentia meridianorum von Berlin und Paris, theils von der noch in den Tabellen selbst befindlichen kleinen Unrichtigkeit her, welche ich mir zu heben nicht getraue, denn ich habe die elementa meiner Tabellen ausser der Theorie, auf observationes

eclipsium lunarium gegründet, über deren momenta man nicht wohl auf eine Minute gewiss seyn kann. Es lässt sich nehmlich wegen der penumbrae weder der Anfang noch das Ende einer Mondfinsterniss so genau besimmen, dass man nicht noch um eine Minute oder mehr fehlen sollte. Was die Dauer des annuli anlangt, so hatte ich mit den meisten astronomis die parallaxin lunae zu gross angenommen, allein eben diese Finsterniss hat mich in den Stand gesetzt, diese parallaxin auf das Genaueste zu bestimmen, welche ich um mehr als 1′ kleiner befunden, als sie in den tabulis Cassinianis angesetzt wird, und M. le Monnier hat auch wirklich gefunden, dass die parallaxis lunae um ein Merkliches kleiner sey, als bisher die astronomi geglaubet, wodurch ich in meiner Conception um so viel mehr bestärket werde. Hieraus habe ich in meinen Tabellen den Articul von der parallaxi corrigirt, und hoffe inskünftige, was diesen Punkt betrifft, in Bestimmung der Finsternisse gar nicht mehr zu fehlen.

Die letzte Mondfinsterniss haben wir auch hier mit allem Fleiss beobachtet. Nach meiner Rechnung sollte sich dieselbe d. 8. Augusti also zutragen: I. der Anfang um $11^h\ 3'\ 53''$, II. das Ende $13^h\ 16'\ 52''$. In der Observation selbst war der Unterschied zwischen umbra und penumbra so gering, dass man bey etlichen Minuten weder vom wahren Anfang noch vom wahren Ende gewiss seyn konnte. Es schien uns aber der Anfang um $11^h\ 4'$ à $5'$, das Ende aber um $13^h\ 17'$ à $18'$ geschehen zu seyn. Andere haben diese beyden momenta theils früher theils später estimirt. Ich habe in einer verfinsterten Kammer meines Hauses das Bild des Mondes durch einen 10schuhigen tubum auf ein weisses Papier fallen lassen, worauf sich der Mond mit allen Flecken sehr deutlich praesentirt, und ich habe den Anfang der Finsterniss angeschrieben, als ich auf dem Papier nicht mehr den Rand des Mondes ganz erblickte, das Ende aber als der Bord wiederum rund herum ganz erschien, wobei zu merken, dass wenn die Vorstellung des Bilds stärker oder schwächer gewesen wäre, beyde momenta früher oder später bemerket seyn würden. Denn wenn man durch den tubum grad gegen den Mond sahe, so konnte man auch bey der stärksten Verfinsterung den verfinsterten Theil erkennen, als welcher von den durch die Atmosphaer der Erde durchgedrungenen Lichtstrahlen noch erleuchtet wurde. Der verfinsterte Theil des Monds schien auch ein Stück von einem kleinern Circul zu seyn, als der erleuchtete, wovon aus angeführtem Grund die Ursach ganz klar ist; denn die durch die Atmosphaer der Erde gegangenen Strahlen waren zu schwach, den Rand des Monds, auf welchen sie so schief auffielen, zu erleuchten, dahero wir nicht den ganzen verfinsterten Theil erblicken konnten.

Die Observation, dass $8m + 5 \pm 2 = 4\boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot$ kommt mir sehr merkwürdig vor, und ich vermuthe, dass diese Betrachtungen endlich zur wahren Quelle, woraus diese Eigenschaften fliessen, leiten werden. Ich habe jetzt wegen anderer Geschäfte seit einiger Zeit über diese Materie nicht mehr denken können; und anjetzo bin ich bemühet einen Einfall ins Werk zu richten, welchen ich gehabt, um solche Objectivgläser zu verfertigen, welche eben den Dienst leisten sollen, als die Spiegel in den tubis Newtonianis und Gregorianis. Der Fehler der gewöhnlichen Objectivgläser rühret nur daher, dass die Lichtstrahlen nicht einerley Refraction leiden und also z. Ex. die rothen Strahlen einen andern focum formiren als die blauen. Dahingegen von

einem Spiegel alle Strahlen in eben denselben focum reflectirt werden. Dieser Unterschied zwischen den focis der rothen und blauen Strahlen wird auch um so viel grösser, je weiter dieselben vom Glas entfernt sind, und bey einem Objectivglas von 27 Schuh, fällt der rothe focus einen ganzen Schuh weiter als der blaue, woraus die Undeutlichkeit und die Farben der durch lange tubos gesehenen objectorum entspringen. Wenn man also solche Objectivgläser verfertigen könnte, welche alle Strahlen in einen gemeinen focum zusammenwürfen, so würde man von denselben eben diejenigen Vortheile zu gewarten haben, als von den Spiegeln. Dieses ist aber nicht möglich mit blossem Glas zu bewerkstelligen. Dahero bin ich auf die Gedanken gefallen, ob es nicht möglich wäre aus Glas und Wasser oder zwey andern verschiedenen durchsichtigen Materien solche lentes objectivas zu verfertigen, und zweifelte hieran um so viel weniger, da wir sehen, dass in den Augen, welche aus verschiedenen durchsichtigen Cörpern bestehen, eine solche Undeutlichkeit wegen der verschiedenen Brechung der Lichtstrahlen nicht wahrgenommen wird. Ich habe mir dahero eine solche lentem compositam vorgestellt (Fig. 34), so aus zwey Gläsern *abba*, *cddc* und dem Zwischenraum *bccb* mit Wasser angefüllt bestehen soll.

Nachdem ich die radios der Krümmungen *aa*, *bb*, *cc*, *dd* generaliter durch die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bemerket, so habe ich ex lege refractionis erstlich die distantiam foci a radiis rubris formati, und dann die distantiam foci a radiis violaceis formati gesuchet. Hernach habe ich diese beyden expressiones einander gleich gesetzt uud daraus die Verhältniss zwischen den radiis *a*, *b*, *c*, *d* bestimmet. Die Solution fiel dahin aus, dass beyde Gläser menisci seyn müssen, von welchen sich der radius faciei convexae zum radius faciei concavae verhalte wie 23 zu 10. Solche meniscos habe ich mir schon verschiedene schleifen lassen; es findet sich aber noch diese Schwierigkeit, dass das Glas nicht eben die Figur, welche die Schüssel hat, auf das Genaueste bekommt. Gleichwohl kann ich schon von solchen Objectivgläsern einen merklichen Vortheil spüren. Ich werde aber noch mehrere solche meniscos verfertigen lassen um zu sehen, ob etwan casu die erforderte Proportion näher getroffen wird.

Ew. haben vollkommen Recht, dass in den curvis, deren normales secantes allenthalben constantes sind, die maxima applicata ad diametrum curvae relata der Hälfte jener quantitatis constantis gleich seyn müsse. Die Sache kommt also nur darauf an, ob in diesen curvis immer ein solcher axis curvam in duas partes similes et aequales secans Platz finde? welche Frage ich nicht mit ja beantworten kann.

Euler.

LETTRE CXXII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Courbe catoptrique. Théorème d'analyse indéterminée.

Moscau d. 10. Februar 1749.

Das Vornehmste, so ich jetzo bey der curva catoptrica anzumerken habe, bestehet in Folgendem:

Wenn (Fig. 35) die Catoptrica, deren axis $AB = a$ ist, compendii causa die curva A, und die curva huic respondens, deren axis $\alpha\beta = 2a$ ist, und welche diese Eigenschaft hat, dass alle normales curvam secantes auch $= 2a$ sind, die curva α genannt wird, so wird diese curva α, weil sie allezeit einen axem hat, welcher der axis AB utrinque continuatus ist, zur applicata maxima ad axem haben $ER = a$. Hieraus ziehe ich durch ein sehr simples raisonnement nachfolgende zwey corollaria:

I. Si distantia verticis A a puncto radiante C vocetur b, et abscissa CR sit $= x$, applicata huic abscissae respondens $MR = y$, datae per x, semper invenietur spatium interceptum CR maximum, si ponatur $CR = x = \sqrt{(aa - 2ay)}$.

II. Si in axe curvae α sumatur $\alpha F = F\beta = a$, erit in curva A spatium $CF = a - 2b$ minimum omnium, inter punctum radians C et radium ad axem reflexum interceptorum, ita ut locus radiorum ad axem reflexorum sit inter F et R.

Uebrigens habe ich auch bemerket, dass so oft in dieser Aequation $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + 4\delta + 4 = AA + BB + CC$ alle numeri integri, qui his litteris designantur, bekannt sind, in der folgenden Aequation

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8 = PP + QQ + RR + SS$$

die numeri P, Q, R, S angegeben werden können. Sit ex. gr. $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$, $\delta = 3$, $A = 3$, $B = 3$, $C = 9$, erunt $P = 3$, $Q = 3$, $R = 9$, $S = 1$.

Goldbach.

LETTRE CXXIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Recherches ultérieures sur la courbe catoptrique.

Berlin d. 4. März 1749.

Weil es bey der bekannten curva catoptrica darauf ankommt, dass man eine curvam finde, deren normales utrinque secantes allenthalben constantis magnitudinis seyen, so habe in beygefügter Figur (Fig. 36) eine solche curvam $CMEADNBEC$ mit allem Fleiss aufgerissen, in welcher alle diese normales, CD, MN, IB, EE, AK gleich gross sind, und merke dabey zuvörderst an, dass es auch solche curvas gebe, welche gar keinen diametrum haben; von der beygefügten aber ist CD ein diameter. Hat man eine solche curvam gefunden, so kann man nach Belieben das punctum radians F entweder im axe oder ausser demselben annehmen und daraus leicht die curvam catoptricam GLH beschreiben. Man zieht nehmlich aus dem puncto radiante F ad quodvis curvae prioris punctum M, die Linie FM, schneidet dieselbe in T in zwey gleiche Theile, richtet darauf in T die Perpendicularlinie TL auf, bis sie die normalem MR in L durchschneidet, so ist L ein punctum in der Catoptrica und LT die tangens daselbst. Wenn nun das punctum radians F in dem axe oder diametro CD curvae generatricis angenommen worden, so wird auch die Linie GH ein diameter der curvae catoptricae selbst seyn; sonsten aber, wenn F nicht wäre in axe CD genommen worden, oder wenn die curva generatrix CAB gar keinen diametrum hätte, so würde sich auch in der curva catoptrica kein diameter befinden. Also ist es gewiss, dass so oft die curva catoptrica GLH einen diametrum hat, auch die curva generatrix CAB ebendenselben diametrum haben werde, aber nicht vicissim; und dahero finden Ew. Anmerkungen nur alsdann Statt, wenn die curva catoptrica einen diametrum hat.

Das punctum radians F mag angenommen werden wo man will, wenn man durch dasselbe ad curvam generatricem die normalem zieht CFD, und die partes CF und DF in zwey gleiche Theile schneidet, so bekommt man die puncta G und H in der Catoptrica.

Wenn die curva generatrix CAB einen diametrum hat, als CD, und Ed die grösste applicata ist, weil $Ed = dE$ und ad curvam normalis, so muss $EE = CD$, und also $dE = \frac{1}{2} CD$ seyn. Es sey $CD = 2a$, so wird die applicata maxima $dE = a$. Wenn also in der curva catoptrica gesetzt wird $Fd = x$, $dq = y$, so ist

$$Fq = Eq = \sqrt{(xx + yy)} = a - y,$$

und folglich $x = \sqrt{(aa - 2ay)}$, wie Ew. in der ersten Anmerkung gefunden, und in diesem Fall ist das spatium Fd maximum vel minimum inter punctum radians F et radium reflexum: in meiner Figur nehmlich ist es maximum; es würde aber minimum seyn, wenn ich das punctum radians F auf der andern Seite gegen D angenommen hätte. Gleichwie aber in der Figur das spatium FR in Fd ein maximum wird, so ist hingegen Fc der valor minimus desselben, wenn cC der radius osculi curvae generatricis in C, und folglich cD der radius osculi in D ist. Also fällt dieser Punct c nicht nothwendig in die Mitte des diametri CD; vielmehr wird aus Folgendem erhellen, dass dieser Punct c niemal in die Mitte der Linie CD falle, als wenn die curva generatrix CAB ein Circul ist, in welchem Fall die catoptrica eine ellipsis wird. Denn wenn die curva generatrix in se rediens et quasi circuliformis seyn soll, so muss ihre evoluta cab eine curva tricuspidata seyn, dergleichen unendlich viel gefunden werden können, sowohl triangulis aequilateris als scalenis inscriptibiles. Hiebey ist merkwürdig, dass wenn man eine solche curvam tricuspidatam abc gefunden, aus derselben Evolution, nachdem man den Faden länger oder kürzer annimmt, unendlich viel curvae generatrices CAB beschrieben werden können. Denn wenn Cc nach Belieben angenommen wird, so ist immer $mM = Cc + cm$ und $bL = Cc + cmb$, $Aa = Cc + cmb - adb$ und $cD = Cc + cmb + anc - adb$. Weil nun $cmb + anc$ nothwendig grösser ist als adb, so kann auch cD nimmer dem Cc gleich werden, folglich das Punct c nicht in die Mitte von CD fallen.

Um ein Exempel von einer solchen curva tricuspidata zu geben, welche rectificabel ist, damit sowohl die curvae generatrices als catoptricae algebraicae werden, so sey $cp = t$,

$pm = u$ und man nehme $t = \frac{3c(1+3pp)}{(1+pp)^2}$ und $u = \frac{6cp}{(1+pp)^2}$, woraus wenn man p eliminirt eine Aequation von sechs Dimensionen $4uu(tt+uu)^2 = 12ctuu(uu+9tt) - 243cct^4$ entspringt, darin ist $\frac{dt}{du} = p$. Pro puncto d ist $p = 0$, und also $cd = 3c$. Diese curva ist triangulo aequilatero inscriptibilis, cujus latus $ac = ab = bc = \frac{9\sqrt{3}}{4}c$. Ferner ist diese curva rectificabilis, denn es wird der arcus

$$cm = \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + 2c,$$

und da pro cuspidibus a et b est $p = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, so ist der Bogen $cmb = cna = adb = 4c$. Wenn also genommen wird $Cc = b$, so wird $cD = b + 4c$; ferner

$$Mm = b + 2c + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{2cp(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}},$$

weil $2a = 2b + 4c$. Nun aber ist $pR = pu = \frac{6cpp}{(1+pp)^2}$ und $Rm = u\sqrt{(1+pp)} = \frac{6cp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. At $MR = a - \frac{2cp^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; dahero findet man pro curva generatrice die abscissa

$$CP = a - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c(1-pp)}{(1+pp)^2}$$

und die applicata

$$PM = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{2cp^3}{(1+pp)^2},$$

wobey ich nur anmerke, dass wenn man in einem Circul, dessen radius $= a = \frac{1}{2}CD$, den Bogen (qui est mensura anguli CRM) setzt $= s$, so wird in der curva generatrice der arcus $CM = s + \frac{\frac{2}{3}c(1-3pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und also ist der perimeter

totius curvae $CABC$ accurat gleich der Peripherie eines Circuls, cujus diameter $= CD$. Diese Eigenschaft ist allen curvis, so ex evolutione curvarum tricuspidatarum quarumcunque entstehen, gemein, indem immer der ganze perimeter derselben der peripheriae eines circuli diametro $= CD$ descripti gleich ist. Dieser Circul ist in der Figur punctirt gezeichnet. Der excessus areae circuli supra aream curvae ist nun in gegenwärtigem Fall gleich der areae circuli, cujus diameter $= c = \frac{1}{4}cna = \frac{1}{3}cd$.

Weil nun aus dieser einigen evoluta abc, welche zugleich immer die caustica der daher entstehenden catoptricarum ist, unendlich viel curvae generatrices ABC, und aus jeder generatrice, pro loco puncti radiantis F arbitrario, unendlich viel catoptricae entstehen, so kommen aus einer caustica abc unendlich mal unendlich viel catoptricae, alle algebraicae.

Wenn $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$, so ist $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = A^2 + B^2 + C^2 + (\delta - 2)^2$, welches seyn soll $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$, ist also offenbar $P = A$, $Q = B$, $R = C$ und $S = \delta - 2$.

Euler.