ziehe man CV, schneide dieselbe in zwey gleiche Theile in T und richte darauf die Perpendicularlinie TM auf, welche in M nicht nur ein punctum in curva quaesita, sondern auch die positionem tangentis geben wird. Dahero aus einer jeden gegebenen Aequation inter $CR = r$ et $\cos CRM = u$ die curva quaesita EMB determinirt und leicht construirt werden kann, indem man nur immer zu nehmen hat $RV = a + \int \frac{udr}{c}$.

Hieraus ist nun leicht das proponirte problema catoptricum zu solviren, denn da muss aus dem angulo CRM das spatium $CR = r$ dergestalt bestimmt werden, dass wenn man den Winkel CRO anstatt des Winkels CRM setzt, für CR einerley Werth herauskomme. Da nun des Winkels CRO sinus ist $= - s$ und der cosinus $= - u$, so muss r eine solche functio seyn von s und u, welche einerley Werth behalte, wenn gleich für s und u ihre negativa $- s$ und $- u$ gesetzt werden. Folglich muss r eine functio parium dimensionum seyn von s und u, als z. Ex. $r = b + \frac{\alpha s^2 + \beta s u + \gamma u^2}{c}$. Hat man nun r solchergestalt angenommen, so kann daraus die curva problemati satisfaciens folgendergestalt bestimmt werden. Man setze $MR = z$, so wird

$$CM = \sqrt{\left(rr + zz - \frac{2urz}{c}\right)} = RV - z = a + \int \frac{udr}{c} - z.$$

Folglich wird $rr - \frac{2urz}{c} = \left(a + \int \frac{udr}{c}\right)^2 - 2\left(a + \int \frac{udr}{c}\right) z$ und also

$$z = \frac{\left(a + \int \frac{udr}{c}\right)^2 - rr}{2\left(a + \int \frac{udr}{c} - \frac{ur}{c}\right)}.$$

Aus z findet man ferner $PM = y = \frac{sz}{c}$ und $PR = \frac{uz}{c}$, da-

hero wird $CP = x = r - \frac{uz}{c}$ und, wie schon gefunden ist, $CM = a + \int \frac{udr}{c} - z$.

Will man nun curvas algebraicas haben, so muss für r eine solche functio von s und u, jedoch nach der obigen Vorschrift angenommen werden, dass sich die formula $\int \frac{udr}{c}$ integriren lasse.

Um aber formulas generales für alle mögliche curvas algebraicas zu finden, so setze ich

$$\int \frac{udr}{c} = \frac{ur}{c} - \int \frac{rdu}{c} = \frac{ur}{c} - \nu, \text{ oder } \int \frac{rdu}{c} = \nu.$$

Weil nun r eine functio parium dimensionum ipsarum s et u seyn muss, so wird $\nu = \int \frac{rdu}{c}$ eine functio imparium dimensionum. Man nehme also für ν eine solche functionem quamcunque an, so wird $r = \frac{cd\nu}{du}$ und $\int \frac{udr}{c} = \frac{ud\nu}{du} - \nu$. Hieraus wird ferner

$$RM = z = \frac{\left(a - \nu + \frac{ud\nu}{du}\right)^2 - \frac{cc\,d\nu^2}{du^2}}{2(a - \nu)},$$

das ist

$$MR = z = \frac{a - \nu}{2} + \frac{ud\nu}{du} - \frac{(cc - uu)d\nu^2}{2(a - \nu)du^2} = \frac{a - \nu}{2} + \frac{ud\nu}{du} - \frac{ss\,d\nu^2}{2(a - \nu)du^2},$$

wegen $ss = cc - uu$

$$PM = y = \frac{(a - \nu)s}{2c} + \frac{sud\nu}{cdu} - \frac{s^3 d\nu}{2(a - \nu)c\,du^2}$$

$$CP = x = \frac{ssd\nu}{cdu} - \frac{u(a - \nu)}{2c} + \frac{uss\,d\nu^2}{2(a - \nu)c\,du^2}$$

$$CM = \frac{a - \nu}{2} + \frac{ss\,d\nu^2}{2(a - \nu)du^2}.$$

Hieraus ist $CM + MR = a - \nu + \frac{ud\nu}{du}$, und positis u, s negativis, in welchem Fall auch ν negativum wird, so bekommt man die summam radiorum infra axem $= a + v - \frac{udv}{du}$, dahero klar ist, dass die summa omnium radiorum, d. i. der Weg, welchen ein jeglicher radius ex C egressus, donec eodem post geminam reflexionem revertatur, seyn wird $= 2a$; welche Eigenschaft, ungeacht sie unmittelbar aus der Betrachtung, dass $CM + MO = Cm + mO$, folget, so haben doch Ew. mir dieselbe zuerst entdeckt. Im übrigen kommen diese Formuln mit meinen vorhergehenden völlig überein, nur dass diese zweymal kleiner sind, als jene. Wann das spatium CR maximum wird, ist aus der Formul $CR = \frac{cdv}{du}$ leicht zu sehen, nehmlich wenn $ddv = 0$. Es ist aber hiebey zu merken, dass s und u immer kleiner seyn müssen als c, indem sonst die formulae imaginariae werden. Es sey z. Ex. $v = \frac{u^3}{cc}$, so wird $CR = \frac{3uu}{c}$, dessen Werth am grössten wird, wenn $u = \pm c$; also ist in diesem Fall der grösste valor $CR = 3c$, und der kleinste $CR = 0$. Man bekommt also die völlige curvam, wenn man successive dem u alle mögliche valores gibt von -1 bis zum $+1$.

Es ist ganz richtig, dass der auf die quadraturam circuli gesetzte Preis Demjenigen mit Recht gebührte, welcher eine der extractioni radicis quadratae ähnliche Operation erfände, um die Zahl 3,14159 etc. nach Belieben immer weiter fortzusetzen. In dieser Absicht bin ich auf den Gedanken gekommen, ob es nicht möglich, divisores certa lege progredientes zu finden, aus welchen nach der letztbeschriebenen Divisionsregel eben diese Zahl 3,14159 herausgebracht würde; denn diese Art schien mir eben den gradum facilitatis, welchen Ew. verlangen, noch vor der extractioni radicis zu haben.

Euler.

LETTRE XCI.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Projets d'inscriptions pour des médailles en l'honneur du Roi.

Berlin d. 5 Febr. 1746.

Ew. bitte nicht ungütig zu deuten, dass ich die Freyheit nehme Denselben nachfolgende problemata betreffend einige médailles, welche I. K. M. prägen zu lassen Allergnädigst befohlen haben, vorzulegen. Als nach dem ersten schlesischen Krieg Ew. die Güte gehabt mir einige Inventionen zu den damals projectirten médailles zu überschicken, so haben dieselben bey dem Staats-Ministerio allhier eine völlige Approbation erhalten, obgleich wegen anderer Umstände keine médailles zum Vorschein gekommen. Anjetzo ist mir nun wiederum eine ordre aus dem Ministerio zugeschickt worden, in welcher 5 Inventionen zu médailles verlangt werden:

I. Auf die Bataille bey Sorr.

II. Auf die Expedition nach Sachsen, da I. K. M. sich so schnell gegen Görlitz gewendet und allda den Feind bis in Böhmen zurückgetrieben.

III. IV. Auf die Bataille bey Kesselsdorf und auf die Einnahme von Dresden. Diese beyden könnten wohl in eine gebracht werden.

V. Auf den doppelten Frieden mit Oestreich und Sachsen.

Ew. werden sich wundern, dass über solche Sachen von mir Vorschläge gefordert werden; allein, ausser dem, dass ich das vorige Mal die besten geliefert, so befinden sich hier in der That sehr wenige, welche es besser machen könnten als ich, wenn ich auch mich unterstehen sollte selbst etwas darauf zu ersinnen.

Sinnbilder weiss ich gar nicht zu finden, aber folgende Inscriptionen sind mir darüber eingefallen, welche ich aber nicht im Stande bin auszupoliren.

I. Gravissimus hostium impetus summa fortitudine a Rege reprimitur.

II. Hostes ferrum flammamque minitantes repentino Regis adventu perculsi aufugiunt.

III. IV. Hostibus ad Kesselsdorff ingenti proelio profligatis, Metropolis Dresda occupatur.

V. Rex Pace non minus quam Bello invictus hostibus ad incitas redactis pacem largitur.

Bey dem letzten wollte ich nehmlich diesen Gedanken anbringen: Rex pace non minus quam bello hostes devicit, aber ich gestehe, dass derselbe mit dem übrigen nicht recht zusammenpasst.

Sollte der gute Freund, von welchem Ew. mir das vorige Mal Inventionen zuzusenden die Güte gehabt, auch auf diese Puncte einige Aufmerksamkeit wenden, so ersuche Ew. gehorsamst mir desselben Gedanken darüber zu communiciren.

Euler.

LETTRE XC.

Goldbach à Euler.

Sommaire. G. refuse de se mêler de la composition des médailles.

St. Petersburg d. 26. Februar 1746.

Da ich mich nach reifer Ueberlegung nicht getraue, solche inscriptiones, die der Hoheit des sujet's einigermaassen conform wären, zu erfinden, und vielmehr davor halte, dass der berühmte Hr. Baron von Stosch, als welcher in re numaria eine ungemeine connoissance hat, zu diesem Endzwecke für vielen andern geschickt wäre, so habe solches zur schuldigen Antwort zu melden nicht unterlassen wollen.

Goldbach.

LETTRE XCII.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Questions relatives à la nature des comètes. Courbe catoptrique. Observation sur une série.

St. Petersburg d. 12 März 1746.

Die Fragen nebst den Antworten von den Cometen*) habe ich alsofort durchgelesen, und zweifle nicht es werden dieselben wegen ihrer Deutlichkeit und Richtigkeit eine generale Approbation erhalten haben. Wenn man annimmt, dass der Comet ein entzündeter Cörper ist, so lässet es sich vielleicht am besten darthun 1. dass er keine solche phases, als der Mond oder die Venus zeigen kann, 2. dass er sein eignes Licht quaqua versus von sich wirft, ohngeachtet selbiges von den Sonnenstrahlen nicht anders als in parte a sole aversa unter dem Namen der comae oder caudae kenntbar wird, 3. dass diese cauda cometae desto grösser werden muss, je länger sich der Comet in der Nähe

*) Ces questions ne se sont par trouvées.

der Sonne aufhält und je mehr er von derselben entzündet wird.

Ich glaube, dass man das problema catoptricum auch ohne Consideration einiges anguli folgendermaassen solviren kann. Sit (Fig. 23) axis curvae $AB = a$, radius incidens $CM = \frac{a \pm p}{2}$, radius reflexus $MO = \frac{a \mp p}{2}$, ita ut

$$CM + MO = CN + NO = a.$$

Sit CO (functio quaecunque ipsius p, sed major quam p) $= q$, erit elementum curvae quaesitae $\frac{dp\sqrt{(aa-pp)}}{2\sqrt{(qq-pp)}} = Mm$.

Goldbach.

P. S. Ich habe schon längst observiret, dass die series, deren lex progressionis ist $A^2 + 4A = B$, designante A terminum quemcunque, et B terminum proxime sequentem, diesen terminum generalem hat $a^{-2^x} - 2 + a^{2^x}$, und hieraus lässt sich auch der terminus generalis hujus seriei

$$1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 + 1.3.5.17.257 + \text{etc.}$$

finden, davon die factores terminorum lauter Zahlen sind, welche Fermatius pro numeris primis gehalten.

LETTRE XCIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Réponse à la précédente. Plusieurs théorèmes de la doctrine des séries. Concours de l'académie de Berlin sur la théorie des vents.

Berlin d. 5. April 1746.

— — Dass Ew. meine ziemlich in Eil aufgefassten Fragen über die Cometen einiger Aufmerksamkeit gewürdiget, erkenne ich als ein Zeichen Dero ganz besondern Gewogenheit. Ich habe aber noch starke Zweifel, ob sich die phaenomena cometarum eorumque caudarum bloss allein dadurch erklären lassen, dass man annimmt, ihre Cörper seyen würklich entzündet. Denn ausserdem, dass eine blosse Erleuchtung nicht hinlänglich ist in dem aethere eine Helle hervorzubringen, sondern dazu noch in derselben Gegend solche Cörperlein erfordert werden, welche die Erleuchtung empfangen, und daher einen Schein zu uns zurückwerfen: so ist auch die Abweichung der caudae eines Cometen ab oppositione solis ein solches phaenomenon, welches eine besondere Erklärung zu erfordern scheinet. Die Idee, welche ich in diesen Fragen kürzlich entworfen, und darin bestehet, dass die durch die grosse Atmosphaer eines Cometen durchstreichenden Sonnenstrahlen einige subtile particulas daraus mit sich fortreissen, habe ich letztens weitläufiger ausgeführt und ziemlich deutlich dargethan, dass auf solche Art nicht nur die Cometenschweife, sondern auf unserer Erde die lumina borealia und um die Sonne selbst das lumen Cassinianum entstehen. Diese Ausführung hat auch dem Herrn de Maupertius so wohl gefallen, dass er derselben völlig beypflichtet.

Ew. Idée das problema catoptricum zu solviren, gibt zwar leichte Formuln, allein da die positio lineae CO nicht bestimmt wird und das elementum curvae Mm wenig zu Bestimmung der krummen Linien, insonderheit wenn algebraische verlangt werden, beyträgt, so sehe ich noch nicht ab, wie die natura functionis q determinirt werden müsste, dass die beyden Reflexionspuncta M et N in eandem lineam curvam continuam zu liegen kämen.

Ueber die seriem $1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 +$ etc. erstaunte ich anfänglich; als ich aber dieselbe genauer betrachtete, sahe ich bald, dass ich den terminum generalem davon schon vor einiger Zeit unter andern Umständen ausgedrückt hatte. Denn ich fand, dass wenn

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)(1+a^{16})\ldots(1+a^{2^n}) = s$$

so ist $(1-a)s = 1 - a^{2^{n+1}}$, und also $s = \dfrac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1}$.

Dahero wenn $a=2$, so ist $1.3.5.17\ldots(2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}}-1$. Dieses hatte ich schon angemerket, als ich suchte, was für eine series herauskomme, wenn man dieses productum infinitum $(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)$ etc. wirklich evolvirte, da ich dann gefunden, dass diese series geometrica $1+a+a^2+a^3+a^4+$ etc. $=\frac{1}{1-a}$ herauskomme. Evolvirt man aber dieses Product $(1-a)(1-a^2)(1-a^4)(1-a^8)$ etc., so bekommt man $1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+a^6-a^7-a^8+a^9+a^{10}-a^{11}+a^{12}-a^{13}-a^{14}+a^{15}-a^{16}+a^{17}$ etc., wo die ordo signorum merkwürdig ist. Von dieser Art habe ich noch nachfolgende theoremata gefunden:

Theorema. Si sit

$s=(1-na)(1-n^2a)(1-n^3a)(1-n^4a)(1-n^5a)$ etc. in infin. erit

$$s=1-\frac{na}{1-n}+\frac{n^3a^2}{(1-n)(1-n^2)}-\frac{n^6a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$+\frac{n^{10}a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}-\text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{s}=1+\frac{na}{1-n}+\frac{n^2a^2}{(1-n)(1-n^2)}+\frac{n^3a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$+\frac{n^4a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}+\text{etc.}$$

Ew. glaube ich auch schon geschrieben zu haben, dass wenn man dieses productum infinitum

$$(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)\text{ etc.}$$

evolvirt, diese series herauskomme

$1-a-a^2+a^5+a^7-a^{12}-a^{15}+a^{22}+a^{26}-a^{35}-a^{40}+$ etc.,

wo der ordo exponentium sehr merkwürdig ist, und sich per inductionem also bestimmen lässt, dass alle in hac formula $\frac{3xx\pm x}{2}$ enthalten sind, ungeacht ich diese legem observatam noch nicht ex rei natura habe herausbringen können.

Theor. Si fuerit in serie $\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ldots\overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},$ $Q=mP^2+nP+\frac{nn-2n-8}{4m}$, ubi m et n sunt numeri constantes, quaerantur numeri F et G ut sit

$$F+G=mA+\tfrac{1}{2}n \text{ et } FG=1,$$

eritque

$$P=\frac{F^{2^{x-1}}+G^{2^{x-1}}}{m}-\frac{n}{2m}.$$

Theor. Si fuerit in serie $\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ldots\overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},$

$$Q=mP^2+nP+\frac{nn-2n}{4m} \text{ erit } P=\frac{(mA+\frac{1}{2}n)^{2^{x-1}}}{m}-\frac{n}{2m},$$

welches Ew. theoremata sind.

Folgende theoremata scheinen auch einiger Aufmerksamkeit werth zu seyn:

Theor. Si n sit numerus integer affirmativus quicunque, erit

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}+\text{etc.}=n.$$

Theor. Si n sit numerus integer affirmativus quicunque, erit

$1-a^{n-1}+a^{2n-3}-a^{3n-6}+a^{4n-10}-a^{5n-15}+a^{6n-21}-$etc.$=0$

exclusis scilicet terminis, qui exponentes habent negativos.

Theor. Sit in circulo arcus $90^\circ=q$, sumaturque arcus quicunque s, cujus sinus sit $=a$, $\sin 2s=b$, $\sin 3s=c$, $\sin 4s=d$ etc. erit semper

$$q=\tfrac{1}{2}s+a+\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{3}c+\tfrac{1}{4}d+\tfrac{1}{5}e+\text{etc.}$$

Theor. In circulo radii $=1$ capiatur arcus quicunque s, cujus tangens sit $=a$, tang $\frac{1}{2}s=b$, tang $\frac{1}{4}s=c$, tang $\frac{1}{8}s=d$, tang $\frac{1}{16}s=e$ etc., erit

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}d + \frac{1}{16}e + \text{etc.}$$

Ich bin jetzund mit Durchlesung derjenigen Pièçen, welche über die von der Akademie aufgegebene Frage von der Ursach und der Ordnung der Winde sind eingesandt worden, beschäftiget. Es sind darüber 10 eingelaufen, unter welchen sich eine, so vor allen andern in Betrachtung gezogen zu werden verdient, befindet. Die Devise, so sich zu Ende derselben befindet, ist auch schön; sie lautet also:

Haec ego de ventis: dum ventorum ocyor alis
Palantes pellit populos Fridericus, et orbi,
Insignis lauro, ramum praetendit olivae. *)

*) C'est la pièce de concours de d'Alembert. Comp. dans le 2 volume, les lettres de Daniel Bernoulli sur ce concours.

Euler.

LETTRE XCIV.

=

Goldbach à Euler.

Sommaire. Suite des recherches sur les séries. Remarques ultérieures sur le problème de la courbe catoptrique.

St. Petersburg d. 5. Mai 1746.

Den terminum generalem seriei

$$1 + 1.3 + 1.3.5 + 1.3.5.17 + \text{etc.}$$

hatte ich, als mein letztes Schreiben abging, nur in potestate, und dachte nicht, dass selbiger so leicht seyn sollte, indem ich dessen sonst gar keine Erwähnung gethan haben würde.

Ich weiss nicht, ob man methodum hat von dergleichen seriebus als diese ist

$$\frac{1.3.5}{2.4.8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.10} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.12} - \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.14} + \text{etc.}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 2,$$

cujus lex progressionis est $\frac{-A(2x+5)(x+3)}{2(x+2)(x+4)} = B$, die summas zu finden.

Die in meinem vorigen angeführte Idée einer Solution gehet noch weiter, wenn man vor q eine functionem quamcunque ipsius p annimmt, nur mit der Limitation dass $q > p$ und $q < a$ (denn ich sehe zum wenigsten nicht, dass ex natura problematis mehrere limitationes erfordert werden), und ferner $x^2 + y^2 = \frac{(a+p)^2}{4}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{(aa-pp)dp}{4(qq-pp)}$, so wird die abscissa ad applicatam in curva quaesita seyn wie x zu y.

Goldbach.

P. S. d. 21. Mai 1746. Es ist mir gestern eingefallen, dass sich das problema catoptricum auch folgendermaassen solviren lässet: Sit (Fig. 24) AB axis curvae $= a$, punctum radians C. Sint CM et CN radii in curvam incidentes; MR et NR radii ad idem punctum axis R reflexi; capiatur in MN punctum O, ita ut sint $CM + MO = CN + NO = a$, et ponatur recta $CO = q$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+\nu}{2}$, $NO = \frac{a-\nu}{2}$ (ubi ν jam datur per p et q; est enim $\nu = \frac{(2a+p)qq+aap}{aa+2ap+qq}$). Ponatur porro $RO = z$, $RS = uz$, invenietur spatium, quod inter radium incidentem et reflexum in axe intercipitur

$$CR = CS - RS = \sqrt{(qq - zz(1-uu))} - uz = CQ - RQ$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{((a+\nu)^2 - (a-\nu+2z)^2(1-uu))} - \frac{(a-\nu+2z)u}{2}$$
$$= CP + PR = \frac{1}{2}\sqrt{((a-p)^2 - (a+p-2z)^2(1-uu))} + \frac{(a+p-2z)u}{2}.$$

Sed cum ν jam supra data sit in p et q, per has aequa-

tiones pro CR inventas dari etiam poterunt u et z in p et q, qui valores deinde substituendi sunt in applicata

$$MP = \frac{(a+p-2z)}{2}\sqrt{(1-uu)}$$

et in abscissa

$$CP = \sqrt{\left(\left(\frac{a-p}{2}\right)^2 - MP^2\right)}.$$

Ob nun zwar die würkliche Determination der quantitatum u und z durch p und q etwas weitläufig seyn möchte, so ist doch hingegen zu consideriren, dass in dieser Solution keine differentialia vorkommen.

LETTRE XCV.

Euler à Goldbach.

Sommaire Sommation de la série de la lettre précédente.

Berlin d. 28. Mai 1746.

— — Die von Ew. gemeldte series

$$\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{9}{12}-\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{11}{14}+\text{etc.}$$

kann durch meine Methode leicht gefunden werden. Denn wenn ich nach der lege progressionis noch die zwey vorhergehenden terminos dazu setze, so kommt

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}+\text{etc.}$$

Diese ist in der folgenden enthalten, wenn man setzt $x=1$

$$s=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}x^6+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}x^8-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}x^{10}+\text{etc.}$$

Man differentiire diese seriem und theile allenthalben durch dx, so bekommt man

$$\frac{ds}{dx}=1.x^3-\frac{1}{2}\cdot 3x^5+\frac{1.3}{2.4}\cdot 5x^7-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot 7x^9+\text{etc.}$$

Man multiplicire durch $\frac{dx}{x^3}$, so wird

$$\frac{ds}{x^3}=1\,dx-\frac{1}{2}\cdot 3xx\,dx+\frac{1.3}{2.4}\cdot 5x^4dx-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot 7x^6dx+\text{etc.}$$

Wenn man nun integrirt, so bekommt man

$$\int\frac{ds}{x^3}=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1.3}{2.4}x^5-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^7+\text{etc.}$$

Hier siehet man leicht, dass diese series ist $=$

$$x(1+xx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}},$$

folglich ist $\int\frac{ds}{x^3}=\frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ und $\frac{ds}{x^3}=\frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$ also

$$s=\int\frac{x^3dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}-\int\frac{x\,dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=(1+xx)^{\frac{1}{2}}+(1+xx)^{-\frac{1}{2}}-2,$$

denn hier muss die quantitas constans 2 subtrahirt werden, weil posito $x=0$, werden muss $s=0$. Setzt man nun $x=1$, so bekommt man

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{9}{12}-\text{etc.}$$

$$=2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}-2.$$

Letztens bin ich auf nachfolgende seriem gekommen, deren Summ, ob sie gleich so leicht ausgedrückt wird, dennoch durch diese Methode nicht wohl gefunden werden kann, denn ich komme auf eine Differentio-differential-Aequation, welche sich generaliter nicht integriren lässt: Die series ist diese:

$$1+\frac{n}{4}+\frac{n(n+3)}{4.8}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}+\text{etc.}$$

$$=2^n,$$

wenn also $n=1$, so ist

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.5.6}{4.8.12}+\frac{1.6.7.8}{4.8.12.16}+\frac{1.7.8.9.10}{4.8.12.16.20}+\text{etc.}=2.$$

Diese wird leicht in diese Form verwandelt:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.6}+\frac{1.3.5}{4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}+\text{etc.}=2\left(1-(1-1)^{\frac{1}{2}}\right)=2,$$

in welchem Fall die Richtigkeit leicht zu ersehen.

Ich glaube kaum, dass die ratio diametri ad peripheriam $1:\pi$ leichter per approximationem gefunden werden könne, als durch Hülfe beyder folgenden serierum:

$$p=\frac{1}{5}-\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}-\frac{1}{7.5^7}+\frac{1}{9.5^9}-\frac{1}{11.5^{11}}+\text{etc.}$$

$$q=\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\frac{1}{7.239^7}+\frac{1}{9.239^9}-\frac{1}{11.239^{11}}+\text{etc.}$$

Denn wenn hieraus die Werthe von p und q gefunden werden, so ist $\pi=16p-4q$.

Nach dem letzt ergangenen Urtheil der Akademie zu Paris über den Magneten ist meiner pièce der dritte Theil des dreyfachen Preises zuerkannt worden, wie Ew. schon aus unsern Zeitungen werden ersehen haben. Hr. Bernoulli hat auch ein Drittel bekommen. Hingegen haben wir den Preis der hiesigen Akademie von 50 Ducaten, über die Winde, der pièce: *Haec ego de ventis* etc. zuerkannt, davon der auctor Hr. D'Alembert aus Paris ist.

Euler.

LETTRE XCVI.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE. Problème catoptrique. Suite.

Berlin d. 14. Juni 1746.

Ew. letzt überschriebene Solution des problematis catoptrici hat mich anfänglich nicht wenig frappirt, da dieselbe keine differentialia in sich enthält und ich doch versichert bin, dass die Betrachtung der Reflexion nothwendig differentialia erfordere. Als ich aber die Sach genauer erwogen, habe ich bald gesehen, dass die drey gefundenen Formuln für die Linie CR unmöglich zwey quantitates incognitas determiniren können, sondern nachdem man eine bestimmet, eine aequatio identica herauskommen müsse.

Denn in einem jeglichen triangulo CMN (Fig. 24) kann eine Seite MN allzeit in O dergestalt geschnitten werden, dass $CM+MO=CN+NO$, wodurch also keine besondere

Beschaffenheit bestimmet wird. Wenn man nun setzt $CM + MO = CN + NO = a$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+v}{2}$ und $NO = \frac{a-v}{2}$, so kann daraus die Linie $CO = q$ bestimmt werden, denn es wird $qq = \frac{aa(v-p)+2apv}{2a-v+p}$ oder $qq + aa = \frac{2a(aa+pv)}{2a-v+p}$. Setzt man nun ferner $RO = z$ und den cosinum des Winkels $BRO = u$, so kann per p, v, z und a der Werth von u gefunden werden. Das intervallum z aber bleibet willkührlich, weil noch kein Umstand in Betrachtung gezogen worden, wodurch z bestimmt werden könnte. Sollen aber die Linien CM und MO, item CN und NO lege reflexionis aequaliter ad curvam inclinirt seyn, so müsste in situ proximo das punctum O unverändert bleiben, und folglich sowohl diff. $CS = 0$ als diff. $SO = 0$, wodurch das problema plus quam determinatum würde, oder vielmehr nur eine einzige lineam satisfacientem, nehmlich die ellipsin geben würde. Die Ursach davon ist diese: dass man ohne Nothwendigkeit angenommen $CM + MO = CN + NO$; da diese beiden valores auch ungleich seyn können, wenn nur ihre Summ $CM + MN + NO$ constans bleibt. Endlich ist auch hier nicht der Hauptumstand in Betrachtung gezogen worden, dass die beyden puncta M und N in eadem linea curva continua seyn müssen. Uebrigens glaube ich kaum, dass von diesem problemate eine kürzere und leichtere Solution gefunden werden könne, als diese: Sit $CMNC$ radius post geminam reflexionem ad C reversus, sumtaque pro lubitu recta CB pro axe, ad quem curvae quaesitae aequatio referatur. Vocetur $CR = r$, angulus $CRM = \varphi$, ejus sinus $= s$ et cosinus $= u$, posito radio $= 1$, ita ut sit: $ss + uu = 1$ et $d\varphi = \frac{ds}{u} = \frac{-du}{s}$. Hic angulum φ consideravi quatenus ad punctum M spectat, pro puncto N autem is abibit in CRO, et quia in partem contrariam cadit, erit is $= -180^0 + \varphi$, ejusque ergo sinus $= -s$ et cosinus $= -u$. Quia jam punctum R ad utrumque punctum M et N aequaliter pertinere debet, quantitatem $CR = r$ ita per s et u exprimi oportet, ut eundem valorem retineat, etiamsi pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Unde hujusmodi erit relatio inter r et s, u: $r =$

$$\alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \text{etc.},$$

vel in fractionibus

$$r = \frac{\alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \theta s u^3 + \text{etc.}}{A + Bss + Csu + Duu + Es^4 + Fs^3 u + Gs^2 u^2 + Hsu^3 + \text{etc.}}$$

vel etiam

$$r = \frac{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon s u^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \theta s^4 u + \text{etc.}}{As + Bu + Cs^3 + Ds^2 u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + Hs^4 u + \text{etc.}}$$

Quaecunque ergo hujus generis aequatio pro r definiendo assumitur, punctum R aeque respiciet utrumque punctum M et N, ac propterea puncta M et N in una eademque linea curva continua erunt sita. Superest ergo ut ex hujusmodi aequatione, inter r, s et u assumta, ipsa curva definietur, et aequatio inter coordinatas $CP = x$ et $PM = y$ eliciatur. In hunc finem consideretur reflexio proxima $CmnC$, sitque O intersectio rectarum MN et mn: atque ex natura reflexionis manifestum est fore particulam curvae Mm elementum ellipseos focis C et O, atque Nn elementum ellipseos iisdem focis C et O descriptae. Hinc ergo habebimus $CM + MO = Cm + mO$, et $CN + NO = Cn + nO$. Sed sufficit alteram tantum conditionem $CM + MO = Cm + mO$ spectasse, quia per determinationem ipsius r alterius ratio jam simul involvitur. Cum igitur sit $CR = r$, erit $Rr = dr$, et ex r in OM demisso perpendiculo rs fiet $rs = sdr$ et

$Rs = udr$. Appelletur $CM + MR = q$, erit $Cm + mr = q + dq$, ideoque ob $CM + MO = Cm + mO$, fiet $q + OR = = q + dq + Or$, seu $OR - Or = Rs = dq = udr$, ita ut hinc prodeat $q = a + \int udr = CM + MR$. Sit jam $MR = z$, erit $PM = y = sz$, $PR = uz$ et $CP = x = r - uz$, unde fit $CM = \sqrt{(rr - 2urz + zz)}$ ob $ss + uu = 1$. At est $CM = q - z$, ergo $\sqrt{(rr - 2urz + zz)} = q - z$, sumtisque quadratis: $rr - 2urz = qq - 2qz$, qua fit $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$. Assumto ergo valore quocunque idoneo pro r, in s et u expresso, hinc quaeratur $q = a + \int udr$, porroque $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$, quibus inventis erit $x = r - uz$ et $y = sz$, sicque habebitur curva problemati satisfaciens, quae quidem erit transcendens, si formula $\int udr$ algebraice exprimi nequeat. Ad curvas ergo algebraicas inveniendas ejusmodi functionem pro r eligi oportet ut formula $\int udr$ fiat integrabilis, quod quidem hoc modo generaliter praestari potest: Cum sit $\int udr = ur - \int rdu$, ponatur $\int rdu = v$, fietque $r = \frac{dv}{du}$. Quo igitur r fiat functio parium dimensionum ipsarum s et u, ut supra requirebatur, necesse est ut v sit functio imparium dimensionum ipsarum s et u seu talis, quae abeat in $-v$, si pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Hujusmodi ergo functione pro v assumta, erit $r = \frac{dv}{du}$, ubi ob $ds = -\frac{udu}{s}$, differentialia destruentur, ita ut r fiat quantitas finita algebraica. Inventa autem r erit $\int udr = ur - v$ et $q = a + ur - v$ atque $z = \frac{qq - rr}{2q - 2ur}$, ex quibus denique elicientur coordinatae $CP = x = r - uz$ et $PM = y = sz$, ambae per s et u expressae, unde curva construi et aequatio inter x et y eliminandis s et u ope $ss + uu = 1$, erui poterit.

Ex. gr. Cum v debeat esse functio imparium dimensionum ipsarum s et u, assumatur $v = bs + cu$, erit

$$dv = bds + cdu = \frac{-budu}{s} + cdu$$

atque $r = \frac{-bu}{s} + c$. Tum $q = a - \frac{buu}{s} - bs = a - \frac{b}{s}$; porro ob $qq = aa - \frac{2ab}{s} + \frac{bb}{ss}$ et $rr = \frac{bbuu}{ss} - \frac{2bcu}{s} + cc$, erit

$$z = \frac{aa - \frac{2ab}{s} + bb + \frac{2bcu}{s} - cc}{2a - 2bs - 2cu},$$

seu

$$z = \frac{(aa + bb - cc)s - 2ab + 2bcu}{2s(a - bs - cu)}.$$

Unde fiunt coordinatae

$$CP = x = \frac{2ac - 2bcs - (aa - bb + cc)u}{2(a - bs - cu)},$$

$$PM = y = \frac{-2ab + 2bcu + (aa + bb - cc)s}{2(a - bs - cu)},$$

unde eliminandis s et u, aequatio resultat inter x et y duarum tantum dimensionum, qua natura ellipsis ad rectam quamcunque per focum C tanquam axem relata exprimitur. Si sit $b = 0$, recta CB per alterum quoque focum transibit.

Letztens habe gefunden, dass diese expressio $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ einen valorem realem habe, welcher in fractionibus decimalibus $= 0{,}2078795763$, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet.

Euler.

LETTRE XCVII.

Goldbach à Euler.

Sommaire. Mêmes sujets. Réponse aux lettres précédentes.

St. Petersburg d. 5. Juli 1746.

Dass Ew. einen Theil des neulich distribuirten Preises von Paris bekommen würden, hatte ich zwar fest vermuthet, habe aber die eigentliche Nachricht davon nicht eher als aus Dero letztem Schreiben bekommen, wie mir denn auch die dritte Person, so an diesem Preise Theil gehabt, bis dato unbekannt ist. Die zum künftigen praemio bey der Parisischen académie des sciences ausgesetzte Frage gibt mir auch vor Ew. sehr gute Hoffnung. Ich bitte mir bey Gelegenheit zu melden, wie viel mal Dero pièces schon bey selbiger académie victorieuses gewesen sind?

Es gehöret meines Erachtens schon eine ziemliche Fertigkeit dazu, dass man aus der serie $x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\,3}{2.4}x^5 -$ etc.

die summam $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{8} -$ etc. nach Ew. Methode finde, und von der serie

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} + \frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12} + \text{etc.}$$

habe ich folgendes angemerket: Wenn man setzet

$$2^n = 1 + \beta n + \gamma nn + \delta n^3 + \text{etc.},$$

so ist kein Zweifel, dass die quantitates β, γ, δ, etc. ihre determinatos valores haben, wie denn ex. gr. $\beta =$ ist $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ etc.; machet man aber series, in deren terminis immer mehr potestates ipsius n vorkommen, so werden zwar die series, aus welchen die quantitates β, γ, δ, etc. bestehen, (wie solches in der serie $1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n+3)}{4.8} +$ etc. $= 2^n$ geschiehet) gleichsam mit einander verwickelt, aber diese quantitates an sich selbst bleiben nichts desto weniger invariabiles. So oft also dergleichen series, wo die quantitas indeterminata n in jedem termino ad diversas potestates evecta ist, vorkommen, so meine ich der sicherste Weg die summam zu finden wäre, dass man zuvorderst die coëfficientes β, γ, δ, etc. suche.

Bey Gelegenheit des von Ew. gefundenen valoris vor $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ ist mir etwas eingefallen, an dessen Möglichkeit ich noch den Tag zuvor sehr würde gezweifelt haben, nemlich dass auch diese series $A \ldots \alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} +$ etc. und generatim alle, wo die exponentes numeri a ad formulam generalem reduciret werden können, summabiles sind, nachdem die coëfficientes α, β, γ, etc. determiniret werden, denn wenn gesetzt wird

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1\,3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4\,6} + \text{etc.}$$

$$\beta = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1.3}{2.4} + 3 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 4 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \text{etc.}$$

$$\gamma = 1 \cdot \frac{1.3}{2.4} + 3 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 6 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + 10 \cdot \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + \text{etc.}$$

$$\delta = 1 \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} + 4 \cdot \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + 10 \cdot \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} + 20 \cdot \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} + \text{etc.}$$

etc.

so ist die series $A = a^{\frac{1}{4}}$, und nach eben denselben valoribus pro α, β, γ, δ, etc. wird

$$B \ldots \alpha a^{a} - \beta a^{2a^2} + \gamma a^{3a^3} + \delta a^{4a^4} + \text{etc.} = \sqrt{a^{\sqrt{a}}} = a^{\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2}}.$$

Meine continuirliche distractions sind zum Theil daran Schuld, dass sich in meine Briefe manche Fehler einschleichen, die ich wohl verhüten könnte; und so ist es auch mit meinem letzten *P. S.* ergangen, indem ich bey genauerer Betrachtung desselben noch vor Ankunft Ew. Schreibens bemerket, dass beyde quantitates u und z auf solche Art nicht eliminirt werden können, sondern eine davon übrig bleibet, wie denn die drey valores von u, so durch selbige drey aequationes gefunden werden, nichts anders sind, als (posito $m = 2a + p - \nu$), $\frac{(a\nu + ap - mz)^2}{mmqq - 2a(p+\nu)mz + mmzz} = uu$.

Die Solution, welche Ew. in Dero letztem Schreiben anführen, hat wegen ihrer Kürze und Deutlichkeit für den vorigen, in meinen Augen einen grossen Vorzug; nur dieses scheinet mir noch bedenklich: dass, weil das differentiale von $RO = -dq$ und folglich $CM + MO = $ constanti, wenn dieses constans a gesetzt wird, nicht nur Mm ein elementum ellipseos, sondern die ganze curva quaesita eine ellipsis seyn wird, deren axis durch die focos C und O gehet und $= a$ ist, nur mit dem Unterschiede, dass die abscissae CP und die applicatae MP (wie sie von Ew. durch r und u

bestimmet sind) nicht ad ipsum axem curvae, sondern ad rectam positione datam et per focum C productam genommen werden müssen, es mag im übrigen r eine functionem quamcunque ipsius u andeuten.

Wenn man von nachfolgender serie

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3.5} + \frac{531}{3.5.7} + \frac{8601}{3.5.7.9} + \text{etc.},$$

deren lex progressionis diese ist, dass dato termino quocunque A et exponente ejus x, der terminus sequens sey $B = \frac{4xA+1}{2x+1}$, die formulam generalem geben könnte, dürfte man nur in dem termino generali setzen $x = \frac{1}{2}$, so würde die area circuli, cujus diameter $= 1$, herauskommen.

Goldbach.

LETTRE XCVIII.

EULER à GOLDBACH

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

Berlin d. 26. Juli 1746.

— — Für Dero hochgeneigte Gratulation zu dem erhaltenen Theil des Pariser Preises statte allen gehorsamsten Dank ab. Dieses war das vierte Mal, dass ich etwas von diesem Preis bekommen. Auf das künftige Jahr, da die Frage von Findung der Zeit durch himmlische Beobachtungen zur See vorgelegt ist, habe ich auch schon eine pièce hingeschickt. Die Frage aber für 1748 ist meines Erachtens so schwer, dass ich noch nicht weiss, ob ich im Stande seyn werde etwas darüber zu verfertigen; indessen wollte ich mir von Ew. dazu eine schöne Devise gehorsamst ausgebeten haben.

Dass die Summ dieser seriei

$$1+\frac{n}{4}+\frac{n(n+3)}{4.8}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}+\text{etc.}$$

gleich ist 2^n, hatte ich auf eine sehr weitläufige Art herausgebracht, und kam mir um so viel merkwürdiger vor, weil ich solches durch keine mir bekannte Methode füglich beweisen konnte. Auf eine ähnliche Weise habe ich seit der Zeit gefunden, dass diese series:

$$1+\frac{n}{4}x^2+\frac{n(n+3)}{4.8}x^4+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}x^6+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4.8.12.16}x^8$$
$$+\text{etc.}=2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{xx}\right)^n,$$

welche series, wenn $x=1$, in die vorige verwandelt wird. Setzt man $xx=\frac{1}{2}$, so wird

$$1+\frac{n}{8}+\frac{n(n+3)}{8.16}+\frac{n(n+4)(n+5)}{8.16.24}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{8.16.24.32}+\text{etc.}$$
$$=(4-2\sqrt{2})^n.$$

Wollte man aber, um die Summ dieser seriei zu finden, alle coëfficientes evolviren und die seriem nach den Potestäten des n rangiren, so würde man auf so sehr verwirrte series kommen, dass schwerlich daraus etwas zu finden seyn würde. Denn wenn man z. Ex. setzt

$$A\ldots\ldots 1+\frac{n}{4}+\frac{n(n+3)}{4.8}+\frac{n(n+4)(n+5)}{4.8.12}+\text{etc.}=$$
$$1+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+\text{etc.}$$

so wird

$$\beta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4.8}+\frac{4.5}{4.8.12}+\frac{5.6.7}{4.8.12.16}+\frac{6.7.8.9}{4.8.12.16.20}+\text{etc.}$$

welche series negative sumta $(-\beta)$ den terminum exponentis $\frac{1}{2}$ in dieser serie ausdrückt

$$\overset{\frac{1}{2}}{-\beta};\ \overset{1}{0};\ \overset{2}{\frac{1}{2}};\ \overset{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}};\ \overset{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}};\ \overset{5}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}};$$
$$\overset{6}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}};\ \text{etc.}$$

folglich ist der terminus indicis $\frac{3}{2} = -\beta + 1$, der terminus indicis $\frac{5}{2} = -\beta + 1 + \frac{1}{3}$, und der terminus indicis

$$(\infty + \tfrac{1}{2}) = -\beta + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \text{etc.};$$

der terminus indicis ∞ aber ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \text{etc.}$ Da nun lege seriei die termini infinitesimi einander gleich seyn müssen, so wird

$$\beta = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \text{etc.},$$

wie Ew. angemerket. Dieses gibt sich aber aus der Summ der seriei A, welche ist $= 2^n$; denn, wenn $l2$, oder

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \text{etc.}$$

gesetzt wird $= \beta$, so ist

$$2^n = 1 + \beta n + \frac{\beta^2 n^2}{1.2} + \frac{\beta^3 n^3}{1.2.3} + \frac{\beta^4 n^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

folglich ist in der angenommenen Form

$$1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \text{etc.},\ \gamma = \tfrac{1}{2}\beta^2, \delta = \tfrac{1}{6}\beta^3, \text{etc.},$$

welches aus der serie A selbst schwerlich würde herausgebracht werden können.

Gleiche Schwierigkeit würde man finden, wenn man auf diese Art die Summ dieser seriei suchen wollte

$$B \cdots\cdots 1 + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2+4)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n^2+4)(n^2+16)}{1.2\ldots6} + \frac{n^2(n^2+4)(n^2+16)(n^2+36)}{1.2\ldots8} + \text{etc.}$$

Wenn $\pi = 3{,}14159$ etc. und

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2\ldots6} + \text{etc.}$$

so ist die Summ dieser seriei

$$B = \tfrac{1}{2} e^{\frac{1}{2}n\pi} + \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}n\pi}.$$

Hingegen ist diese series

$$C \cdots\cdots 1 + \frac{n^2}{1.2} + \frac{n^2(n^2+1)}{1.2.3.4} + \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)}{1.2\ldots6} + \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)(n^2+9)}{1.2\ldots8} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} e^{\frac{1}{3}n\pi} + \tfrac{1}{2} e^{-\frac{1}{3}n\pi},$$

oder es ist

$$C = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3.6} + \frac{n^4\pi^4}{3.6.9.12} + \frac{n^6\pi^6}{3.6.9.12.15.18} + \text{etc.}$$

folglich hat man

$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1.2}{3.4.5.6} + \frac{1.2.3}{4.5.6.7.8} + \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8.9.10} + \text{etc.}$$

und

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{10} + \text{etc.}$$

Ew. Erfindung von der Summ solcher serierum

$$\alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \text{etc.}$$

wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. gewisse Werthe haben, ist ungemein sinnreich. Ich habe zwar bald gesehen, dass solche series herauskommen, wenn man den terminum exponentis $\frac{1}{2}$ in dieser serie a^1, a^4, a^9, a^{16} etc., welcher ist $\sqrt[4]{a}$, auf gewöhnliche Art suchet; allein es ist zu bedauern, dass alle diese coëfficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. unendlich werden, indem $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = \frac{1.3}{2.4}(1-1)^{-\frac{5}{2}}$, $\delta = \frac{1.3.5}{2.4.6}(1-1)^{-\frac{7}{2}}$ etc. werden.

Der Zweifel, welchen Ew. gegen meine Solution des bekannten problematis catoptrici zu machen belieben, als wenn dieselbe nur allein die ellipsin gäbe, wird dadurch leicht gehoben, wenn man betrachtet, dass (Fig. 25) das punctum O nicht constans, sondern variabile angenommen wird, indem es ein punctum in caustica EOo ist. Denn, ungeacht ex natura reflexionis ist $CM + MO = Cm + mO$, so ist doch nicht diff. $(CM + MO) = o$, sondern $= Oo$, und also $CM + MO = \text{Const.} + \text{arcu}$ causticae EO, welche Eigenschaft allen causticis gemein ist. Uebrigens geben meine Formuln solche curvas, welche offenbar keine ellipses sind. Es ereignet sich hier nehmlich eben der Fall, als bey Untersuchung des radii osculi MO einer krummen Linie AM (Fig. 26). Denn ungeacht $MO = mO$, so folgt doch nicht, dass diff. $MO = 0$, noch dass $MO = \text{Const.}$, sondern weil das punctum O variabile, nehmlich in evoluta ist, so ist diff. $MO = mo - MO = Oo$ und also $MO = \text{Const.} + \text{arcu}$ evolutae EO.

Wenn von der serie $1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3.5} + \frac{531}{3.5.7} + \frac{8601}{3.5.7.9} + \text{etc.}$ der terminus ordine $\frac{1}{2}$ gesucht wird, so wird derselbe $= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$, aus welcher Betrachtung Ew. ohne Zweifel jene seriem gefunden. Es ist aber merkwürdig, dass die lex progressionis sich so bequem ausdrücken lässt.

Stirling hat angemerkt, dass die Summ von dieser serie

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+1)} + \frac{u(u+1)}{t(t+1)(t+2)} + \frac{u(u+1)(u+2)}{t(t+1)(t+2)(t+3)} + \text{etc.}$$

$$\text{sey} = \frac{1}{t-u},$$

ich habe aber gefunden, dass diese series noch weit generaler gemacht werden kann

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t+c)} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{t-u},$$

wenn nur a, b, c, d, etc. dergestalt fortgehen, dass

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \text{etc.}$$

eine summam infinitam ausmachen. Da nun solches geschieht, wenn a, b, c, d, etc. numeri primi sind, so kann man sagen, dass z. Ex.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.4}{2.4.5.7} + \frac{1.3.4.6}{2.4.5.7.9} + \text{etc.} = 1,$$

oder dass

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4.5} + \frac{3.4}{4.5.7} + \frac{3.4.6}{4.5.7.9} + \frac{3.4.6.8}{4.5.7.9.13} + \text{etc.} = 1.$$

wo die factores der Zähler sind numeri primi $+ 1$, die factores der Nenner aber numeri primi $+ 2$.

Euler.

LETTRE XCIX.

═

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Mêmes sujets.

St. Petersburg d. 27. August 1746.

So oft in den summis serierum selbst quantitates per series infinitas exprimendae vorkommen, mögen die coëfficientes ipsius n wohl aus sehr schweren seriebus bestehen; dass aber die series

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4.8} + \frac{4.5}{4.8.12} + \text{etc.} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

hatte ich auf eine von Ew. Methode sehr unterschiedene Art, und sogar ohne die terminos $\frac{1}{4} + \frac{3}{4.8} +$ etc. zu evolviren, aus diesem einigen raisonnement gefunden: Weil

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \text{etc.}$$

und in dieser serie der coëfficiens ipsius n ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.},$$

so muss er auch in allen seriebus welche $= 2^n$ sind, eben denselben valorem haben. Nun zweifelte ich im geringsten nicht, dass die von Ew. angeführte series nicht recht sollte summiret seyn, und konnte dahero den valorem β mit grosser Gewissheit angeben.

Dass die in meinem vorigen angenommenen quantitates α, β, γ, etc. unendliche valores andeuten, habe ich wohl gewusst, und zweifle sehr ob es möglich ist, an deren Stelle valores finitos zu substituiren; warum aber $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$ etc. sehe ich noch nicht ein.

Dass das punctum O (Fig. 27) nicht anders als in der ellipsi fixum seyn könnte, hatte ich zwar gesehen, aber ohne genugsame Betrachtung vermeinet, dass weil OR in situ proximo in Or verwandelt würde, auch $RS = dq$ das differentiale von OR wäre, folglich $CM + MO$ eine constans und die ganze curva eine ellipsis seyn müsste; nach dem von Ew. gegebenen éclaircissement aber ist es deutlich, dass Oo das diff. von $CM + MO$ sey, und dahero RO in situ proximo ro werde, so dass, wenn $RO = w$, $ro = w - dq + Oo$ seyn muss. Es ergibt sich auch aus dieser Figur, dass wenn CR ein maximum ist, die puncta O und R in axe zusammenkommen, und so oft dieses geschiehet $CM = CN$ seyn müsse.

Die summa seriei

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t+c)} + \text{etc.} = A$$

lässt sich folgendergestalt finden: Sit $b = c = d =$ etc. $= 0$ erit ipsa series A

$$= \frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{tt} + \frac{uu}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \text{etc.}\right)$$

hoc est, ob $\frac{1}{t}+\frac{u}{tt}+\frac{uu}{t^3}+\frac{u^3}{t^4}+\text{etc.}=\frac{1}{t-u}$, erit

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t-u)}=\frac{1}{t-u}.$$

Sit $c=d=e=\text{etc.}=0$, erit ipsa series

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}$$
$$+\frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)}\left(\frac{1}{t}+\frac{u}{tt}+\frac{uu}{t^3}+\frac{u^3}{t^4}+\text{etc.}\right),$$

seu

$$A=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+\frac{u(u+a)(u+b)}{t(t+a)(t+b)(t-u)}=\frac{1}{t-u}.$$

Eben diese Eigenschaft haben c, d, e et alii *lusus naturae*, wenn sie so weit als man will reales, alle übrige aber $=0$ gesetzt werden.

Goldbach.

LETTRE C.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Mémoire sur les perturbations de Saturne et de Jupiter. Théorie de la Lune. Réponse à la lettre précédente.

Berlin d. 20 September 1746.

— — — Für die mir gütigst überschickten Devisen zu meiner künftigen pièce über die Verwirrungen der Bewegungen des ♄ und ♃ statte allen gehorsamsten Dank ab. Solche schicken sich vollkommen auf die Art meiner Abhandlung. Ich habe davon die mittlere erwählet, als welche mir mit meinem Vortrag auf das Genaueste übereinzukommen schien. Ich habe dabey jetzt alle Schwierigkeiten fast gänzlich überwunden, welche von einer ganz andern Art sind, als die, so ich bey dem Mond angetroffen; denn der Saturnus behält beinahe eben die Bewegung, als wenn er von der Sonne allein angezogen würde, und wird nur von dem Jupiter etwas wenig verwirrt, dahingegen die Bewegung des Monds sich grossentheils nach der Kraft der Erde richtet und von der Kraft der Sonne etwas geändert wird. Beide Fälle haben dieses gemein, dass die Verwirrungen sehr klein sind, und eben dieses ist das einzige Mittel die Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden, indem die ganze Sach auf Approximationen ankommt. Es wären aber casus möglich, wo man auf keine Art die Bewegung eines Planeten würde bestimmen können. Es ist klar, wenn der Mond sehr viel weiter von der Erde entfernt wäre, derselbe alsdann kein satelles der Erde mehr seyn, sondern als ein planeta primarius seinen Lauf um die Sonne verrichten, dabey aber von der Erde einige Verwirrung, wie der Saturnus vom Jupiter, leiden würde; welche Bewegung noch könnte bestimmt werden. Wenn aber der Mond von der Erde nur so weit entfernet wäre, dass die beiden Kräfte der Sonne und der Erde einander beinahe gleich würden, und der Mond also weder ein planeta primarius noch ein satelles der Erde seyn könnte, so würde seine Bewegung so irregulär seyn, dass dieselbe auf keinerley Art und Weise bestimmt werden könnte. Es ist demnach ein grosses Glück für die Astronomie, dass sich kein solcher Fall in unserm systemate planetario befindet. Wenn der Mond, anstatt dass er jetzt ungefähr 60 radios telluris von uns entfernt ist, etwa 300 radios weit weg wäre, so würde sich der erwähnte Fall ereignen. — Hernach habe ich auch angemerkt, dass wenn der Mond bey seiner gegenwärtigen Entfernung nur entweder eine grössere Excentricität hätte, oder seine orbita nach einem weit grösseren Winkel auf die Ecliptic inclinirt wäre, auch alle bisherige Kunstgriffe nicht hinreichend seyn würden, seinen Ort nur ungefähr voraus zu bestimmen. Da sich nun auch dieser Fall nicht in unserm

systemate befindet, so scheinet es allerdings, dass die Einrichtung dieses systematis nach den Gränzen unserer Erkenntniss gemacht worden, und dass sich vielleicht solche Fälle nur in andern systematibus, wo die Einwohner einen höhern Verstand und tiefere Einsicht in die analysin besitzen, befinden. Denn nach der lege mutuae gravitationis, wornach sich alle Bewegungen in der Welt zu richten scheinen, beruhet die Bestimmung der Bewegung solcher Cörper auf der Integration einiger Differentio-differential-Aequationen, und kommt also die ganze Sach auf unsere Fähigkeit in der analysi an.

Dass die coëfficientes α, β, γ, δ, etc. bey Ew. neulich überschriebenen Formul nicht nur alle infiniti werden, sondern auch per potestates negativas des binomii $1 - 1$ ausgedrückt werden können, habe ich also gefunden: Es sey vorgelegt diese series:

$$a^A,\ a^B,\ a^C,\ a^D,\ a^E,\ a^F,\ \text{etc.}$$

wovon der terminus indici x respondens seyn soll a^X, so wird

$$a^X = a^A + \frac{x-1}{1}(a^B - a^A) + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(a^C - 2a^B + a^A)$$
$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}(a^D - 3a^C + 3a^B - a^A) + \text{etc.}$$

Es sey $\frac{x-1}{1} = \mathfrak{A}$, $\frac{(x-1)(x-2)}{1.2} = \frac{x-2}{2}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\frac{x-3}{3}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\frac{x-4}{4}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ etc., so wird

$$a^X = a^A(1 - \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - \text{etc.})$$
$$+ a^B(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 5\mathfrak{E} - \text{etc.})$$
$$+ a^C(\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} - 10\mathfrak{E} + 15\mathfrak{F} - \text{etc.})$$
$$+ a^D(\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 10\mathfrak{E} + 20\mathfrak{F} - 35\mathfrak{G} - \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

Wenn also gesetzt wird

$$a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D + \text{etc.}$$

so wird

$$\alpha = 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} + \text{etc.}$$
$$= (1-1)^{x-1},$$

wie aus der Evolution erhellt

$$\beta = \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1.2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3} - \text{etc.}$$
$$= (x-1)\left(1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1.2} - \text{etc.}\right)$$
$$= (x-1)(1-1)^{x-2},$$
$$\gamma = \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\left(1 - \frac{3(x-3)}{3} + \frac{6(x-3)(x-4)}{3.4} - \frac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3.4.5} + \text{etc.}\right)$$
$$= \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}(1-1)^{x-3},$$
$$\delta = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}(1-1)^{x-4} \text{ etc.}$$

Man darf also nur jetzt setzen $x = \frac{1}{2}$.

Ew. Demonstration, dass

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.} = \frac{1}{t-u}$$

ist meines Erachtens die einzige, wodurch dieser lusus naturae bewiesen werden kann. Inzwischen, wenn für a, b, c, etc. t und u determinirte Zahlen angenommen werden, so bekommt man öfters series, deren Summation man nicht vermuthen sollte.

Euler.

LETTRE CI.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Sur la série des lettres précédentes.

St. Petersburg d. 25. October 1746.

Die Nachricht, so Ew. aus Petersburg bekommen, dass Ihre Kais. Majestät mich mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget, ist in so weit gegründet, dass Höchst Dieselben mir das Gut Wolmarshof, welches jährlich 1400 R° Arende trägt, ad dies vitae Allergnädigst geschenkt haben. Was aber die akademischen Angelegenheiten betrifft, so habe ich mich derselben schon seit A. 1742 gänzlich entschlagen.

In der serie $\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + \text{etc.}$ finden sich zwey Eigenschaften: 1. dass man dadurch, data summa et datis quibuscunque terminis ab initio, die seriem, cujus summa data est, finden kann; 2. dass man von unzähligen seriebus demonstriren kann, dass ihre summae unendlich gross sind, welches ohne dieses adminiculum sehr schwer seyn würde, z. Ex. wenn ich singulos terminos seriei

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+\text{etc.}$$

aequales setze singulis terminis hujus:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{etc.}=\pi,$$

und alsdann alle quantitates a, b, c, etc. durch u et constantes determinire, so muss folgen, dass die series

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\text{etc.}$$

nur in dem einen casu unendlich gross werde, wenn

$$u=\frac{t\pi-1}{\pi}.$$

Goldbach.

LETTRE CII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Théorie du mouvement de la Lune. Tables du mouvement de Saturne. Suite sur la série précédente.

Berlin d. 29. November 1746.

— — — Ich hoffe nächstens allhier meine neue theoriam motus Lunae unter die Presse geben zu können, und glaube dieselbe so weit gebracht zu haben, dass man durch Hülfe meiner daraus verfertigten tabularum, den locum Lunae jederzeit so genau bestimmen kann, dass der Fehler niemals über 100 Secunden austrägt, da nach den Cassinianischen Tabellen der Fehler sich bisweilen auf 15′, nach den besten englischen aber auf 6′ belaufen kann.

Ich werde jetzt auch anfangen neue tabulas motus Saturni zu verfertigen, nachdem ich die perturbationem a Jove oriundam bestimmt. Dieses ist um so viel nöthiger, da M. le Monnier in seinem Werk: *Introduction dans l'Astronomie* bemerket, dass der locus ♄ computatus nach den besten Tabellen bisweilen um einen halben Grad a loco observato differire.

Dass man vermittelst der series

$$\frac{1}{t-u}=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+\text{etc.}$$

eine seriem angeben kann, deren summa data und termini quotvis ab initio gleichfalls dati sind, scheinet freylich dem ersten Anblick nach sehr merkwürdig zu seyn. Wenn man aber bedenket, dass die daher entstehende series nicht regulär seyn werde, so lässt sich eben dieses auf unendlich viel andere Manieren gleichfalls bewerkstelligen. Als, ich wollte eine seriem geben, deren Summ $=S$ und deren 6 erste termini seyn sollen $a+b+c+d+e+f$, so suche ich eine seriem quamcunque, deren Summ $=S$; solche sey $S=A+B+C+D+E+$ etc. Hernach wird seyn

$$S=\overset{1}{a}+\overset{2}{b}+\overset{3}{c}+\overset{4}{d}+\overset{5}{e}+\overset{6}{f}+(A\overset{7}{-}a)+(B\overset{8}{-}b)+(C\overset{9}{-}c)$$
$$+(D\overset{10}{-}d)+(E\overset{11}{-}e)+(F\overset{12}{-}f)+\overset{13}{G}+\overset{14}{H}+\text{etc.}$$

Was die andere Eigenschaft der angeführten seriei betrifft, dass man aus derselben von unzählig viel seriebus beweisen kann, dass ihre Summ unendlich gross sey, scheint ebenfalls sehr merkwürdig zu seyn, allein bey der würklichen Application kommt man immer auf solche series, wo die Sach vor sich selbst klar vor Augen liegt. Denn wenn die series $\frac{1}{t-u}=\frac{1}{t}+\frac{u}{t(t+a)}+\frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)}+$ etc. wahr ist, so muss der terminus infinitesimus $\frac{u(u+a)(u+b)(u+c)\text{ etc.}}{t(t+a)(t+b)(t+c)\text{ etc.}}=0$ seyn, welches geschiehet, wenn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+$ etc. $=\infty$. Vergleicht man nun diese seriem mit einer vorgelegten serie $S=A+B+C+D+E+F+$ etc., so wird $t=\frac{1}{A}$,

$u=\frac{S-A}{AS}$ und ferner $a=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}-\frac{A}{BS}$, $b=\frac{1}{C}-\frac{1}{A}-\frac{(A+B)}{CS}$, $c=\frac{1}{D}-\frac{1}{A}-\frac{(A+B+C)}{DS}$ etc., folglich wird $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+$ etc. $=$

$$\frac{ABS}{A(S-A)-BS}+\frac{ACS}{A(S-A-B)-CS}+\frac{ADS}{A(S-A-B-C)-DS}+$$
$$\frac{AES}{A(S-A-B-C-D)-ES}+\text{etc.}$$

Wenn nun die summa seriei vera ist, so ist

$$S-A-B-C-D-\text{etc.}=0$$

und werden folglich hier alle termini infinitesimi $=$

$$\frac{AZS}{A.0-ZS}=-A,$$

folglich alle finitae magnitudinis. Dieses erhellet noch deutlicher aus der Form $\frac{u(u+a)(u+b)(u+c)\text{ etc.}}{t(t+a)(t+b)(t+c)\text{ etc.}}$, welche bey dieser Application wird

$$\frac{S-A}{S}\cdot\frac{S-A-B}{S-A}\cdot\frac{S-A-B-C}{S-A-B}\cdot\frac{S-A-B-C-D}{S-A-B-C}\text{ etc.}$$

und folglich wird der Werth, continuatione in infinitum instituta $=\frac{S-A-B-C-D-E-\text{etc.}}{S}$, welcher augenscheinlich, im Fall die Summ wahr ist, gleich 0 wird.

Es ist ein Mathematicus in Ostfriesland Namens Jacobus Adami, welcher mich neulich um die interpolationem hujus seriei gefraget

$$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\text{etc.}=s,$$

welche series die tangentem arcui x respondentem exprimirt und entstehet ex conversione hujus seriei

$$x=s-\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{5}s^5-\frac{1}{7}s^7+\frac{1}{9}s^9-\text{etc.}$$

Ich habe ihm darauf geantwortet, dass der terminus medius inter primum x et secundum $\frac{1}{3}x^3$ sey

$$\frac{16}{\pi^3}x^2\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\text{etc.}\right)$$

Hernach ist der terminus medius inter secundum $\frac{1}{3}x^3$ et tertium $\frac{2}{15}x^5 =$

$$\frac{64}{\pi^5}x^4\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\text{etc.}\right)$$

Ferner ist der terminus medius inter tertium $\frac{2}{15}x^5$ et quartum $\frac{17}{315}x^7 = \frac{256}{\pi^7}x^6\left(1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}+\text{etc.}\right)$.

Euler.

LETTRE CIII.

Euler à Goldbach.

Sommaire. Loi d'après laquelle procèdent les sommes des diviseurs des nombres naturels.

Berlin d. 1. April 1747.

— — Letztens habe ich eine sehr wunderbare Ordnung in den Zahlen, welche die summas divisorum der numerorum naturalium darstellen, entdecket, welche mir um so viel merkwürdiger vorkam, da hierin eine grosse Verknüpfung mit der Ordnung der numerorum primorum zu stecken scheint. Daher bitte Ew. diesen Einfall einiger Aufmerksamkeit zu würdigen.

Wenn n einen numerum quemcunque integrum affirmativum bedeutet, so soll $\int n$ die summam omnium divisorum hujus numeri n anzeigen. Also wird seyn

$\int 1 = 1$
$\int 2 = 1 + 2 = 3$
$\int 3 = 1 + 3 = 4$
$\int 4 = 1 + 2 + 4 = 7$
$\int 5 = 1 + 5 = 6$
$\int 6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$
$\int 7 = 1 + 7 = 8$
$\int 8 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$
$\int 9 = 1 + 3 + 9 = 13$
$\int 10 = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$
$\int 11 = 1 + 11 = 12$
$\int 12 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$
$\int 13 = 1 + 13 = 14$
$\int 14 = 1 + 2 + 7 + 14 = 24$
$\int 15 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$
$\int 16 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

etc.

Diese Bedeutung des Zeichens $\int$ vorausgesetzt, so habe ich gefunden dass

$$\int n = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12)$$
$$+ \int(n-15) - \int(n-22) - \int(n-26) + \text{etc.}$$

wo immer zwey Zeichen $+$ und $-$ auf einander folgen. Die Ordnung der abzuziehenden Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. fällt aus ihren Differenzen, wenn dieselben alternatim betrachtet werden, sogleich in die Augen, als

	1,	2,	5,	7,	12,	15,	22,	26,	35,	40,
Diff.	1,	3,	2,	5,	3,	7,	4,	9,	5,	11,

	51,	57,	70,	77,	92,	100,	117,	126,	145 etc.
Diff.	6,	13,	7,	15,	8,	17,	9,	19 etc.	

Ferner ist zu merken, dass man in einem jeglichen Fall, nicht mehr terminos nehmen müsse, als bis man ad numeros negativos komme, und wenn ein solcher terminus $\int 0$ vorkommt, so muss dafür die vorgegebene Zahl n selbst geschrieben werden, also dass in quovis casu $\int 0 = n$. Folgende Exempel werden zur Erläuterung der Wahrheit dieses theorematis dienen:

Wenn so wird
1. $n=1$; $\int 1 = \int 0 = 1$
2. $n=2$; $\int 2 = \int 1 + \int 0 = 1 + 2 = 3$
3. $n=3$; $\int 3 = \int 2 + \int 1 = 3 + 1 = 4$
4. $n=4$; $\int 4 = \int 3 + \int 2 = 4 + 3 = 7$
5. $n=5$; $\int 5 = \int 4 + \int 3 - \int 0 = 7 + 4 - 5 = 6$
6. $n=6$; $\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 = 6 + 7 - 1 = 12$
7. $n=7$; $\int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - \int 0 = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$
8. $n=8$; $\int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$
9. $n=9$; $\int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$
10. $n=10$; $\int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$
11. $n=11$; $\int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$
12. $n=12$; $\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$

etc.

Der Grund dieser Ordnung fällt um so viel weniger in die Augen, da man nicht sieht, was die Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 etc. für eine Verwandtschaft mit der natura divisorum haben. Ich kann mich auch nicht rühmen, dass ich davon eine demonstrationem rigorosam hätte. Wenn ich aber auch gar keine hätte, so würde man an der Wahrheit doch nicht zweifeln können, weil bis über 300 diese Regel immer eingetroffen. Inzwischen habe ich doch dieses theorema aus folgendem Satz richtig hergeleitet.

Wenn $s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$ etc. in infinitum, so ist auch $s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} +$ etc., wo die exponentes des x eben diejenigen Zahlen sind, welche oben vorgekommen; und wenn dieser Satz seine Richtigkeit hat, wie ich nicht zweifle, ungeacht mir hier eine demonstratio rigorosa fehlt, so ist auch das angeführte theorema völlig gegründet.

*

Denn aus dem doppelten Werth von s bekomme ich erstlich

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx}{1-x} - \frac{2x\,dx}{1-x^2} - \frac{3x^2\,dx}{1-x^3} - \frac{4x^3\,dx}{1-x^4} - \frac{5x^4\,dx}{1-x^5} - \text{etc.}$$

und dann

$$\frac{ds}{s} = \frac{-dx - 2x\,dx + 5x^4\,dx + 7x^6\,dx - 12x^{11}\,dx - 15x^{14}\,dx + \text{etc.}}{1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}}$$

folglich ist $\dfrac{1 - 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.}} =$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{6x^5}{1-x^6} + \text{etc.}$$

wenn aber alle diese letzten Brüche in progressiones geometricas verwandelt werden, so bekommt man für dieselben

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
1 + & x + & x^2 + & x^3 + & x^4 + & x^5 + & x^6 + & x^7 + & x^8 + & x^9 + & x^{10} + & x^{11} + & x^{12} + & \text{etc.} \\
 & +2x & & +2x^3 & & +2x^5 & & +2x^7 & & +2x^9 & & +2x^{11} & & \\
 & & +3x^2 & & & +3x^5 & & & +3x^8 & & & +3x^{11} & & \\
 & & & +4x^3 & & & & +4x^7 & & & & +4x^{11} & & \\
 & & & & +5x^4 & & & & & +5x^9 & & & & \\
 & & & & & +6x^5 & & & & & & +6x^{11} & & \\
 & & & & & & +7x^6 & & & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^7 & +9x^8 & +10x^9 & +11x^{10} & +12x^{11} & +13x^{12} & +\text{etc.} \\
\hline
\end{array}$$

das ist:

$$1 + \int 2x + \int 3x^2 + \int 4x^3 + \int 5x^4 + \int 6x^5 + \int 7x^6 + \int 8x^7 + \int 9x^8 + \int 10x^9 + \text{etc.} =$$

$$\frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - 22x^{21} - 26x^{25} + 35x^{34} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \text{etc.}},$$

woraus das gegebene theorema leicht fliesst. Man sieht aber zugleich, dass dasselbe nicht so obvium ist, und dass zweifelsohne darin noch schöne Sachen verborgen liegen müssen.

Euler.

LETTRE CIV.

GOLDBACH à EULER.

SOMMAIRE. Théorème d'analyse. Chaque nombre est-il véritablement composé de trois nombres trigonaux?

St. Petersburg d. 15. April 1747.

Die Observation, welche Ew. mir communiciret haben, scheinet mir bereits durch die angeführte Induction dermaassen erwiesen, dass man auf deren Wahrheit hundert gegen eins halten könnte. Sonst haben Ew. schon längst angemerket, dass $A \ldots (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)$ etc. $=$ $B \ldots 1 - x - xx + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} +$ etc. und ich erinnere mich, dass ich daraus die an sich selbst sehr leichte conséquence gezogen, dass wenn die potestates ipsius x in B verdoppelt werden, und

$$C = 1 - xx - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + \text{etc.}$$

gesetzt wird, alsdann

$$\frac{C}{B} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ \text{etc.}$$

seyn muss.

Von der Wahrheit eines andern theorematis bin ich bey weitem nicht so persuadiret, nehmlich dass eine jede Zahl aus dreyen trigonalibus bestehet, oder dass ein jeder numerus hujus formae $8m+3$ eine summa trium quadratorum sey. Ew. haben mir schon vor einigen Jahren, wenn ich mich recht erinnere, gesaget, dass Fermatius selbiges seinem Berichte nach, demonstriren können; zu dergleichen Demonstration aber halte ich die inductiones für unzulänglich, weil man unzählige Exempel pro valoribus m angeben kann, die zwar zutreffen, allein zur Generalität des Satzes nichts contribuiren (als ex. gr. wenn m diese Form hat $bb+bc+cc$). Wenn man aber nur beweisen könnte, dass $(2p-1)^2+42$ allezeit eine summa trium quadratorum sey (ich habe es nur bis auf den casum $p=17$ probiret), so hielte ich davor, dass zur völligen Demonstration des theorematis ein guter Anfang gemacht seyn würde. Indessen sehe ich nicht, wie man es demonstriren will, ohne zugleich eine Methode zu finden, wodurch die tria quadrata selbst angegeben werden können. Aber zu beweisen, dass ein jeder numerus aus dreyen trigonalibus uno affirmativo et duobus negativis bestehet, ist bey weitem nicht so schwer.

Aus den Zeitungen von gelehrten Sachen ist zu ersehen, dass ein gewisser H. Mizler über Ew. Buch von der Musik Anmerkungen gemacht. Weil mir dieselben ganz unbekannt sind, so bitte mir nur mit ein paar Worten zu melden, was Sie davon halten. Die neue Logik des Hn. Knutzen, die ich auch noch nicht gesehen habe, wird in den gel. Z. sehr gerühmet.

Goldbach.

LETTRE CV.

EULER à GOLDBACH.

SOMMAIRE Mêmes sujets. Théorèmes de la théorie des nombres.

Berlin d. 6 Mai. 1747.

Der Anmerkung, welche Ew. über die Gleichheit

$$A \ldots (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4) \text{ etc.} =$$
$$B \ldots 1-x-x^2+x^5+x^7-\text{etc.}$$

gemacht, dass, wenn

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\text{etc.},$$

alsdann sey $\frac{C}{B}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)$ etc., erinnere ich mich noch wohl. Ich habe aber weder daraus, noch aus andern Betrachtungen, die Gleichheit zwischen den Formuln A und B richtig darthun können; denn dass $A=B$ und dass in B die Exponenten von x just nach dieser serie 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc. fortgehen, habe ich auch nur per inductionem geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzet, dass ich die Sach für völlig wahr halten kann; allein ich wäre sehr begierig davon eine demon-